Série 2 : Problèmes sur la fonction exponentielle

Problème 1 :

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=e^{2x}-e^{x}-2$. On appelle (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unité 2 cm). On prendra ln 2 = 0,7.

1. Déterminer les nombres a et b tels que $f(x)=(e^{x}+x)(e^{x}+b)$.
2. Étudier les variations de f (domaine de définition, limites, dérivée, tableau de variation).
   En déduire l'existence d'une asymptote horizontale dont on donnera l'équation cartésienne.
3. a) Déterminer les coordonnées du point A, intersection de (C_f) avec l'axe des abscisses.
   b) Donner l'équation cartésienne de la tangente (D) à la courbe (C_f) en A.
4. Tracer la courbe (C_f). (On admettra que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=+\infty$).
5. Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation f(x) = m, m étant un paramètre réel.
6. Déterminer l'aire du domaine plan limité par les droites x = -2, x = 0, y = 0 et la courbe (C_f).

Problème 2 :

Soit f la fonction de IR dans IR définie par $f(x)=-e^{-2x}+3e^{-x}-2$. On note (C) sa courbe représentative dans plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ avec $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=4\,\text{cm}$.

1. a) Déterminer l'intervalle de définition D de f.
   b) Résoudre dans IR l'équation f(x) = 0.
2. a) Calculer à 0,1 près $f(\ln(\frac{3}{4}))$ et $f(\ln(\frac{2}{3}))$.
   b) Montrer que le point I d'abscisse ln (4/3) est un point d'inflexion pour la courbe (C).
3. a) Démontrer que, pour tout réel x, $f(x)=-e^{-2x}(1-3e^{x}+2e^{2x})$.
   b) En déduire les limites de f aux bornes de D.
4. a) Déterminer l'expression de f'(x).
   b) Résoudre l'équation f'(x) = 0 et dresser le tableau de variations de f.
   c) Écrire les équations de la tangente à (C) aux points d'abscisses respectives x_0 = 0 et x_1 = - ln 2.
5. a) Étudier les branches infinies de (C). (On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=+\infty$)
   b) Tracer la courbe (C) et le point I dans un même repère.
6. On note (C') la courbe symétrique de (C) par rapport à l'axe des abscisses (x'Ox).
   a)Tracer directement (C') à partir de (C) dans le même repère.
   b) Calculer, en cm², l'aire géométrique A du domaine plan limité par l'axe (y'Oy), les courbes (C) et (C') et la droite d'équation x = - ln(2). On donne ln(2) = 0,7 ; ln(3) = 1,1.

Problème 3 :

1. Soit la fonction g définie par $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to g(x) = ax + b - e^{-x}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

   Déterminer a et b sachant que g(0) = 1 et $g'(\ln(2)) = -\frac{5}{2}$.

2. Soit la fonction f définie par $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to f(x) = -3x + 2 - e^{-x}$.

   a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Montrer que la courbe représentative de f admet pour asymptote oblique la droite d'équation y = -3x + 2.

   b) Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative (C) dans un plan (P) rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1cm. On donne $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

   c) Donner l'équation de la tangente (T) à (C) en son point d'abscisse x = 0 et tracer (T).

3. Calculer, en cm², l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations x = -ln(3) et x = 0. On donne ln(2) = 0,7 ; ln(3) = 1,1 et e = 2,7.

Problème 4 :

Soit f la fonction numérique de la variable x, définie par $f(x) = \frac{1+e^x}{1+2e^x}$. On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 10\,\text{cm}$.

1. Donner l'ensemble de définition D de f.

2. a) Montrer que f(x) peut s'écrire $f(x) = \frac{1+e^{-x}}{2+e^{-x}}$.

   b) Calculer les limites de f aux bornes de D.

3. Étudier les variations de f.

4. a) Vérifier que le point I (- ln(2) ; 3/4) est un centre de symétrie de (C).

   b) Vérifier que le point I est un point d'inflexion de (C).

   c) Écrire l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point I.

5. Tracer la droite (T) et la courbe (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

6. Montrer que f(x) peut encore s'écrire $f(x) = 1 - \frac{e^x}{1+2e^x}$.

7. Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{1}{2}\ln(1+2e^x)$.

   a) Calculer g'(x).

   b) En déduire une primitive de la fonction f.

   c) Calculer, en cm², l'aire A de l'ensemble des points M de coordonnées (x ; y) tels que 0 ≤ x ≤ ln(4) et 0 ≤ y ≤ f(x). On donne ln(2) = 0,69 et ln(3) = 1,10.

Problème 5 :

On considère la fonction f définie par $f(x)=2+\frac{1}{e^x-1}$.

1. a) Déterminer l'ensemble de définition D de f.

   b) Montrer que pour tout x élément de D, on a $f'(x)=\frac{e^x}{(e^x-1)^2}$.

   c) Étudier les variations de f et précisez les limites de f aux bornes des intervalles composant D.

2. On appelle Γ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unité 1cm.

   a) Montrer que le point $\Omega(0;\frac{3}{2})$ est un centre de symétrie pour Γ.

   b) Montrer qu'il existe deux points M_1 et M_2 de Γ, dont on calculera les abscisses respectives, où la tangente à Γ est parallèle à la droite d'équation y = -2x.

   c) Donner une équation de chacune de ces tangentes et les tracer.

3. Tracer Γ en utilisant les résultats précédents.

4. Soit g la fonction définie sur] 0, +∞ [par $g(x)=x+\ln(e^x-1)$.

   a) Démontrer que g est une primitive de f sur] 0, +∞ [.

   b) En déduire l'aire, en cm², de l'ensemble des points dont les coordonnées (x ; y) vérifient les conditions ln(4) ≤ x<= ln(9) et 2 ≤ y ≤ f(x). On donnera le résultat à 0,01 près par défaut.

Problème 6 :

Soit la fonction *f* définie par $f(x)=\frac{e^{2x}}{e^x+1}$. On appelle (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unité 1cm.

1. Vérifier que f(x) peut s'écrire $f(x)=\frac{e^x}{1+e^{-x}}$.

2. Étudier la fonction f (ensemble de définition, sens de variation, limites aux bornes).

3. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

4. Placer les points de (C) d'abscisses -1 ; 0 ; 1 et 2 puis tracer (T) et (C).

5. Résoudre dans IR l'équation $f(x)=\frac{4}{3}$. On en donnera une interprétation graphique.

6. a) Vérifier que f(x) peut s'écrire $f(x)=e^x-\frac{e^x}{e^x+1}$.

   b) Donner une primitive de f sur IR.

   c) Calculer l'aire, en cm², du domaine limité par la courbe (C), les axes de coordonnées et la droite d'équation x=1. En donner une valeur approchée à 10^2 près par défaut.

Problème 7 :

Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie sur IR par : $g(x)=\frac{e^{2x}+ae^{x}+b}{e^{x}}-1$.

1. Déterminer a et b pour que la courbe représentative de la fonction g passe par le point A de coordonnées (ln(2) ; 2) et admette en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

2. Soit f la fonction numérique définie par $f(x)=\frac{e^{2x}-2e^{x}+2}{e^{x}-1}$.

   a) Quel et l'ensemble de définition D de f ?

   b) Vérifier que pour tout x appartenant à D, $f(x)=e^{x}-1+\frac{1}{e^{x}-1}$.

3. Étudier les variations de f.

4. On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé d'unité 2cm.
   a) Écrire l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse ln(4).
   b) Tracer (T) et (C).

5. a) Vérifier que pour tout x de D, $f(x)=e^{x}-2+\frac{e^{x}}{e^{x}-1}$.

   b) En déduire une primitive de f.

   c) Calculer, en cm², l'aire de l'ensemble des points M de coordonnées (x ; y) tels que ln(2) ≤ x ≤ ln(6) et 0 ≤ y ≤ f(x). On donne ln(2) = 0,69 et ln(3) = 1,10.

Problème 8 :

On considère la fonction numérique f d'une variable réelle x définie par $f(x)=x-\frac{4e^{x}}{e^{x}+1}$.

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unité 1cm.

1. a) Quel est l'ensemble de définition D_f de f ?
   b) Quelle est la limite de f quand x tend vers -∞ ?

   c) Vérifier que $\frac{4e^{x}}{e^{x}+1}=\frac{4}{1+e^{-x}}$.

   En déduire la limite de f quand x tend vers +∞.

2. Montrer que les droites (D_1) et (D_2) d'équations respectives y = x et y = x - 4 sont des asymptotes obliques de (C).

3. Calculer f'. Dresser le tableau de variation de f.

4. a) Vérifier que pour tout x de D_f, f(x) + f(-x) = -4.
   b) En déduire que le point A (0 ; -2) est centre de symétrie de (C).
   c) Tracer les droites (D_1), (D_2), la tangente en A à la courbe (C) et (C) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

5. Calculer l'aire, en cm², du domaine limité par la courbe (C), la droite (D_1) et les droites verticales d'équations x = -1 et x = 0. On donne ln(2) = 0,69 et ln(1 + e) = 1,31.

Problème 9 :

Soit f une fonction définie par $f(x)=x+2-\frac{2}{e^x-1}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unité 1cm.

1. a) Donner l'ensemble de définition de f.
   b) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de son définition.
2. Calculer f'(x) et étudier les variations de f.
3. Montrer que les droites d'équations y = x + 4 et y = x + 2 sont des asymptote obliques de (C).
4. a) Calculer les coordonnées du point d'intersection A de (C) et de la droite d'équation y = x.
   b) Écrire l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point A.
5. Vérifier que le point I(0 ; 3) est centre de symétrie de (C).
6. Tracer la courbe (C), ses asymptotes et la droite (T) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.
7. On note S l'aire de la partie du plan limitée par (C) et les droites d'équation y = x + 2, x = ln(2) et x = ln(4).
   a) Vérifier que pour tout x > 0, $\frac{2}{e^x-1}=\frac{2u'(x)}{u(x)}-2$, où $u(x)=e^x-1$.
   En déduire une primitive de la fonction $x \rightarrow \frac{2}{e^x-1}$.
   b) Calculer S en cm².

Problème 10 :

Soit la fonction g définie par $g(x)=a+bxe^x$, où a et b sont des réels donnés.

1. a) Déterminer les nombres a et b pour que la courbe représentative de g dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ passe par le point de coordonnées (8 ; 0) et admette en ce point une tangente de coefficient directeur égal à -9.
   b) a et b ayant les valeurs trouvées à la question 1.a), résoudre l'équation g(x) = 8.
2. On considère la fonction f définie par $\begin{array}{l} f\ :\ [0;8] \rightarrow \mathbb{R} \\ \quad x \rightarrow 8-xe^{x-8} \end{array}$. Établir le tableau de variation de f.
3. Tracer dans un repère orthonormé d'unité 1cm la courbe représentative (C) de la fonction f. On précisera en particulier les points d'abscisses respectives 0 ; 5 ; 6 ; 7 et 8.
4. Soit la fonction h définie par $h(x)=(\alpha x+\beta)e^x$.
   a) Déterminer les réels α et β pour que h soit une primitive de $x:\rightarrow xe^x$.
   b) En déduire l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives x = 0 et x= 8.

Problème 11 :

Dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = 2\text{cm}$ et $\|\vec{j}\| = 1\text{cm}$, on considère la fonction f à variable réelle x définie par $f(x) = x - e + e^{1-x}$. Soit (C) la courbe représentative dans ce repère.

1. a) Quel est l'ensemble de définition de f ?

   b) Calculer la limite de f quand x tend vers +∞.

   c) Calculer la dérivée de f.

   d) On admet que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$. Étudier les variations de f.

2. Montrer que la droite (D) d'équation y = x - e est asymptote à la courbe (C).

   a) Calculer à 0,1 près f(-2), f(-1) et f(2). On prendra e ≈ 2,72 et e² ≈ 7,38.

   b) Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse x = 0.

3. Tracer la tangente (T) et la courbe (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

4. Déterminer, en cm², l'aire géométrique du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives x = -1 et x = 0.