Séquence 5 : Fonctions rationnelles

1. Définition

Une **fonction rationnelle** est une fonction qui est un rapport de deux fonctions polynômes.

Une fonction rationnelle peut ne pas être définie pour certaines valeurs de x.

Exemple :

Soit $f(x)=2x+1+\frac{1}{x-2}$. En mettant au même dénominateur, on a : $f(x)=\frac{2x^2-3x-1}{x-2}$.

C'est une fonction rationnelle.

2. Ensemble de définition

L'**ensemble de définition** d'une fonction rationnelle est l'ensemble des réels x qui n'annulent pas le dénominateur.

Si $f(x)=\frac{A(x)}{B(x)}$, l'ensemble de définition D_f de f est :

$$D_f=\{x\in\mathbb{R}/B(x)\neq 0\}$$

On écrit D_f sous forme de réunion d'intervalles.

Exemple :

Soit $f(x)=\frac{x+1}{x-3}$. On a $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x-3\neq 0\}$.

Or x - 3 = 0 si x = 3 donc $D_f=]-\infty;3[\cup]3;+\infty[$.

3. Zéro d'une fonction rationnelle

Le **zéro** d'une fonction rationnelle est le réel annulant seulement le numérateur.

Exemple :

Soit $f(x)=\frac{x^2+x-2}{x+3}$. f est définie sur $]-\infty;-3[\cup]-3;+\infty[$. Pour déterminer les racines de f, on résout $x^2 + x - 2 = 0$. Après calcul, on trouve x'= -2 et x'' = 1. Les zéros de f sont alors -2 et 1.

4. Signe d'une fonction rationnelle

Un rapport a même signe qu'un produit. Mais on met une double-barre en-dessous des réels qui annulent le dénominateur.

Exemple :

Étudier suivant les valeurs de x le signe de $f(x)=\frac{x+1}{x-3}$.

On dresse le tableau de signe de f(x).

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
x-3		$-$		$-$	0	+	
x+1		$-$	0	+		+	
f(x)		+	0	$-$	‖	+	

5. Partie entière d'une fonction rationnelle

Soit $f(x)=\frac{A(x)}{B(x)}$ une fonction rationnelle. Si le degré de B(x) est inférieur au degré de A(x), alors il existe deux polynômes Q(x) et R(x) vérifiant : $f(x)=Q(x)+\frac{R(x)}{B(x)}$.

Exemple :

Soit f la fonction rationnelle définie par $f(x)=\frac{x^2-x-6}{x+1}$.

1) Écrire l'ensemble de définition D_f de f sous forme de réunion d'intervalles.
2) Trouver les racines de f.
3) Trouver trois réels a, b et c vérifiant $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$.

1) $D_f=]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$

2) On résout $x^2-x-6=0$ et on trouve x'= -2 et x'' = 3.

3) On fait la division euclidienne de x^2-x-6 par x+1 :

$x^2 - x - 6$ $-(x^2+x)$	$x + 1$
$-2x - 6$	$x - 2$
$-(-2x - 2)$	
-4	

d'où $f(x)=x-2-\frac{4}{x+1}$.