Séquence 3 : Fonctions carrée, racine carrée, cube, inverse

1. Fonction carrée

La **fonction carrée** est la fonction définie par f(x) = x².

1.1 Domaine de définition

Elle est définie sur $\mathbb{R}$: $D_f = \mathbb{R}$.

1.2 Sens de variation

Étudions le signe de τ (pour $x_1 \neq x_1$).

$$\tau = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1}$$

Comme a² - b² = (a-b) (a+b), on a $\tau = \frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}{x_2 - x_1} = x_2 + x_1$ (pour $x_1 \neq x_1$).

Donc : - si $x_1 < 0$ et $x_2 < 0$, $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$

- si $x_1 > 0$ et $x_2 > 0$, $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$

La fonction est décroissante sur] -∞ ; 0[et croissante sur] 0 ; +∞ [.

1.3 Tableau de variations

x	-∞	0	+∞
signe de τ	-		+
f	↘	0	↗

1.4 Courbe

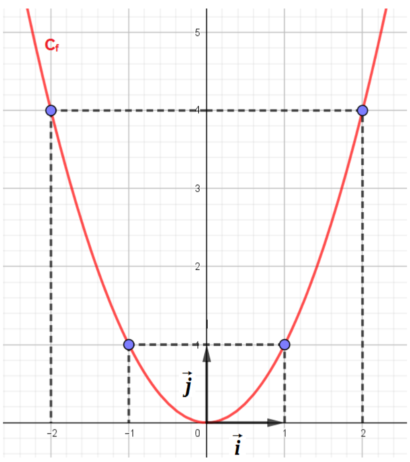


Table de valeurs :

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	4	1	0	1	4

2. Fonction racine carrée

La **fonction racine carrée** est la fonction définie par $f(x)=\sqrt{(x)}$.

2.1 Domaine de définition

f(x) est définie si x ≥ 0 donc le domaine de définition de f est $D_f=[0\,;+\infty[$.

2.2 Sens de variation

En multipliant et en divisant $\sqrt{(x_2)}-\sqrt{(x_1)}$ par $\sqrt{(x_2)}+\sqrt{(x_1)}$ on a :

$$\sqrt{(x_2)}-\sqrt{(x_1)} = \frac{x_2-x_1}{\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}}$$

D'où $\tau=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{1}{\sqrt{(x_2)}+\sqrt{(x_1)}}$ (pour $x_1 \neq x_1$).

Comme $\sqrt{(x)} \geq 0$ quel que soit x ≥ 0, pour tous x_1 et x_2 positifs et non simultanément nuls, $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0$ donc f est strictement croissante.

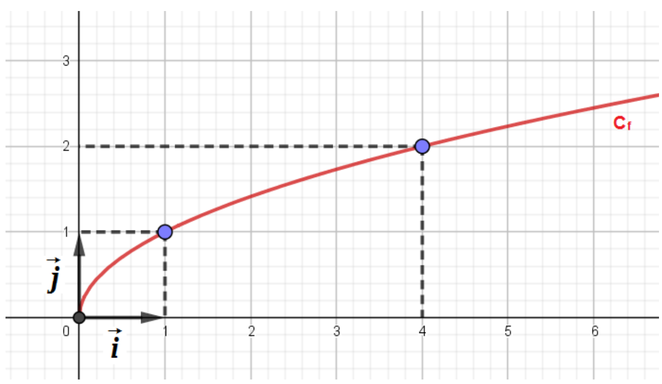
2.3 Tableau de variations

x	-∞ +∞
signe de τ	+
f	↗

2.4 Courbe

Tableau de valeurs :

x	0	1	4
f(x)	0	1	2



3. Fonction cube

La **fonction cube** est la fonction définie par $f(x) = x^3$.

3.1 Domaine de définition

Elle est définie pour tout réel x, donc $D_f = \mathbb{R}$.

3.2 Sens de variation

On montre que $x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_{1.}x_2 + x_2^2)$ quels que soient les réels a,b et c.

Donc $\tau = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{x_2^3 - x_1^3}{x_2 - x_1} = x_2^2 + x_1 x_2 + x_1^2$ (pour $x_1 \neq x_1$).

$x_1^2 \geq 0$ et $x_2^2 \geq 0$ pour tous réels x_1 et x_2. Le produit $x_1.x_2 \geq 0$ lorsque x_1 et x_2 sont de même signe donc $\tau \geq 0$ lorsque x_1 et x_2 sont tous deux positifs ou tous deux négatifs. Ainsi f est croissante.

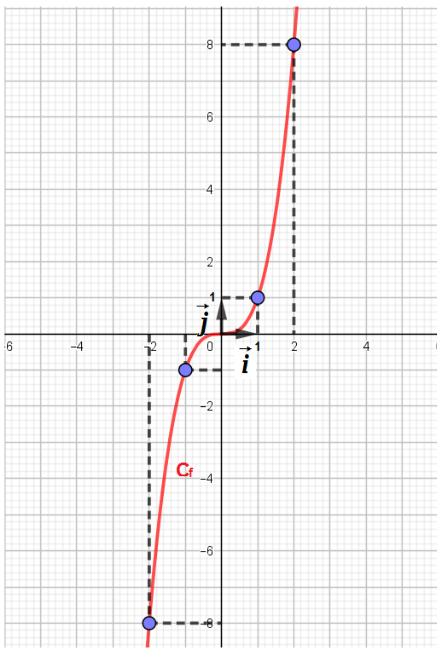
3.3 Tableau de variation

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
signe de τ	+
f	↗

3.4 Courbe

Tableau de valeurs :

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	-8	-1	0	1	8



4. Fonction inverse

La **fonction inverse** est la fonction définie par $f(x)=\frac{1}{x}$.

4.1 Domaine de définition

f(x) est définie pour tout $x\neq0$, donc $D_f=\mathbb{R}^*=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.

4.2 Sens de variation

$$\tau=\frac{f(x_2)\ -f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{\left(\frac{1}{x_2}\right)-\left(\frac{1}{x_1}\right)}{x_2-x_1}$$

En mettant au même dénominateur le numérateur, on a : $\tau\ =\frac{x_1-x_2}{(x_1 x_2)(x_2-x_1)}$.

Après simplification, $\tau\ =-\frac{1}{x_2 x_1}$ qui est toujours négatif si x_1 et x_2 sont de même signe.

Ainsi, f est décroissante sur $]-\infty;0[$ et décroissante sur $]0;+\infty[$.

4.3 Tableau de variation

x	-∞	0	+∞
signe de τ	-	‖	-
f	↘	‖	↘

4.4 Courbe

Tableau de valeurs :

x	-2	-1	1	2
f(x)	- 1/2	-1	1	1/2