Séquence 1 : Généralités sur les fonctions

1. Fonction numérique

1.1 Définitions

D étant une partie de $\mathbb{R}$, définir une **fonction** f sur D, c'est associer à tout élément x de D un et un seul nombre, appelé image de x par f.

L'image de x est notée f(x) et la fonction notée : $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x)$$

On dit que D est l'ensemble de définition de f.

Si f(x) = y, y est l'image de x et x est **un** antécédent de y.

Remarques :

- D est l'ensemble de réels x possédant une image par f.
- Chaque élément de D possède une et une seule image mais un réel peut avoir aucun, un ou plusieurs antécédents.

Exemple : La fonction f est définie par f(x) = 2x-1.

L'image de1 par f est f(1) = 2x(1) -1. D'où f(1) = 1.

Pour trouver l'antécédent de 3, on cherche le réel x vérifiant f(x)= 3, donc 2x - 1 =3.

Après calcul, on trouve x = 2 : 2 est un antécédent de 3.

1.2 Égalité de deux fonctions

f et g sont deux fonctions de domaines de définition respectifs D_f et D_g.

f et g sont égales si et seulement si $D_f = D_g$ et pour tout x de D_f, f(x) = g(x).

2. Courbe représentative d'une fonction

2.1 Définition

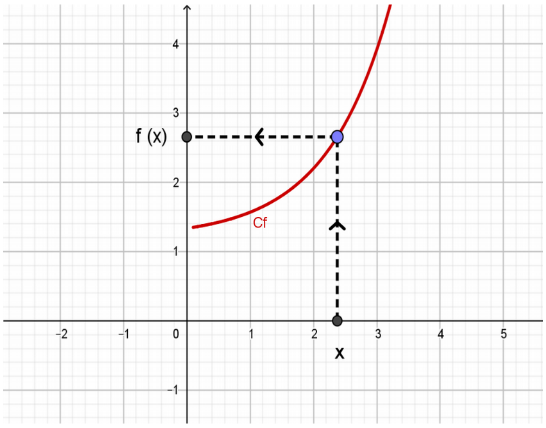
f est une fonction définie sur D.

La **courbe représentative** de f (ou représentation graphique de f) dans le plan rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ est l'ensemble des points M (x ; y) tels que x est un élément de D et y = f (x).

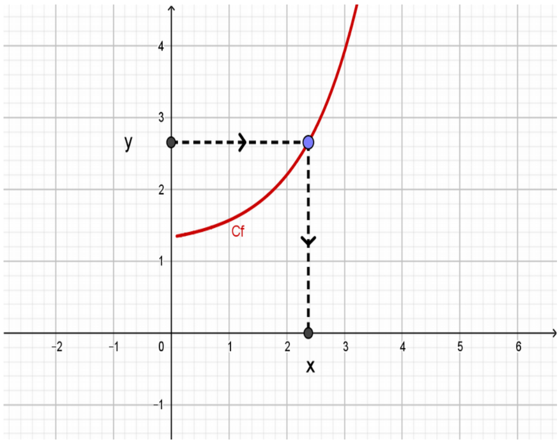
La courbe représentative de f est souvent notée C_f ou (C).

On a donc $M(x,y) \in C_f$ si et seulement si $x \in D$ et y = f(x).

Si C_f est la courbe de f, on dit que C_f a pour équation y = f(x)

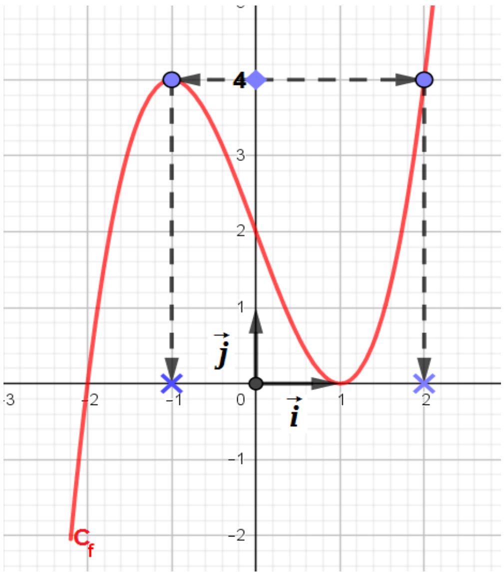


Détermination de l'image de x



Détermination d'un antécédent de y

Exemple :



f(-1) = 4, et f(2) = 4. Donc 4 est l'image de -1 et aussi de 2, donc -1 et 2 sont les antécédents de 4.

2.2 Résolution graphique d'une équation et d'une inéquation

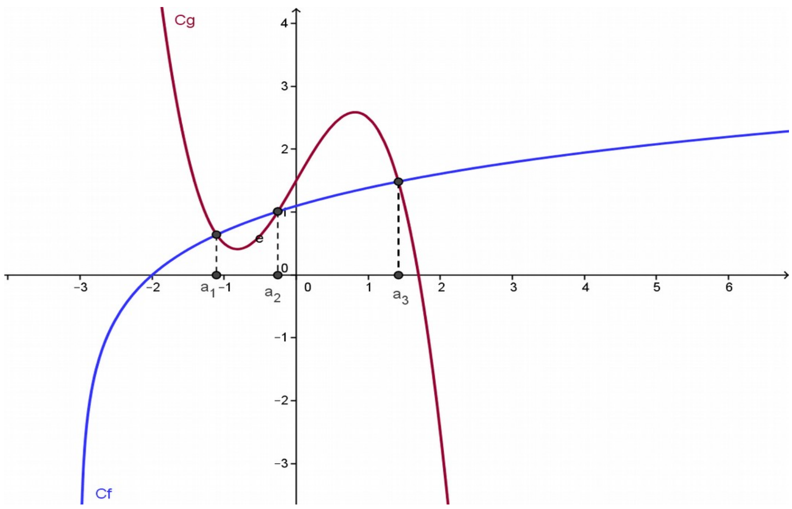
(C_f) est la courbe représentative d'une fonction f et et (C_g) celle d'une fonction g dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$

Les points d'intersection de ces deux courbes sont les points appartenant à la fois à (C_f) et à (C_g), donc ce sont les points M(x , y) qui vérifient $x \in D_f \cap D_g$ et y = f(x) = g(x).

Ainsi, les abscisses des points d'intersection des deux courbes (C_f) et (C_g) sont solutions de l'équation f(x) = g(x).

Si f(x) < g(x) sur un intervalle I inclus dans $D_f \cap D_g$, alors la courbe de f est en-dessous de celle de g sur I.

Exemple :



Si x $x \in [a_1 ; a_2[\cup]a_3 ; +\infty[$, C_f est au-dessus de C_g, donc $f(x) \geqslant g(x)$ sur cet ensemble

Si $x \in]-\infty ; a_1[\cup]a_2 ; a_3[$, C_f est en-dessous de C_g, donc $f(x) \leqslant g(x)$ sur cet ensemble

$f(a_1) = g(a_1)$, $f(a_2) = g(a_2)$, et $f(a_3) = g(a_3)$

On a trois points d'intersection : les points a_1, a_2 et a_3

3. Sens de variation d'une fonction

3.1 Définitions

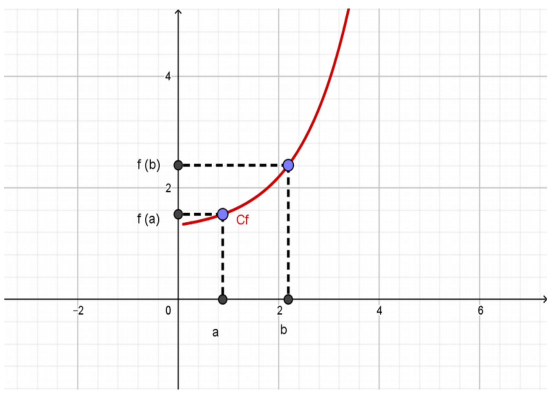
f est une fonction définie sur D et I une partie de D.

f est dite **croissante** sur I signifie que pour tous nombres u et v de I, si u < v, alors f(u) ≤ f(v).

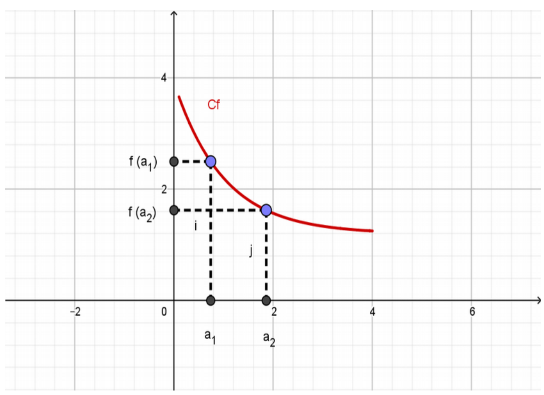
f est dite **décroissante** sur I signifie que pour tous nombres u et v de I, si u < v, alors f(u) ≤ f(v).

f est **constante** sur I, si pour tous nombres u et v de I, f(u) = f(v).

f est dite **monotone** sur I si elle est soit croissante sur I soit décroissante sur I.



f est croissante



f est décroissante

3.2 Taux de variation

f est une fonction définie sur un ensemble I, et x_1 et x_2 deux éléments de I

Le réel $\tau = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ est appelé **taux de variation** ou **taux d'accroissement** de f entre x_1 et x_2.

3.3 Étude des variation d’une fonction

Étudier les variations d'une fonction f, c'est partager son domaine de définition en sous-intervalles sur chacun desquels f est monotone.

Pour étudier les variation de f sur I, on étudie le signe de $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ pour tous x_1 et x_2 de I.

Le résultat peut être donné sous forme d'un tableau du type :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
signe de T		+		−		+	
f	0	↗	10	↘	-5	↗	8

Ceci signifie que f est croissante sur] - ∞ ; 1 [, décroissante sur] 1 ; 2[puis de nouveau croissante sur] 2 ; + ∞ [.

4. Maximum et minimum

f étant une fonction définie sur un intervalle I.

f(a) est le **maximum** de f sur I signifie que pour tout nombre x de I, f(x) ≤ f(a).

De même, f(a) est le **minimum** de f sur I signifie que pour tout nombre x de I, f(x) ≥ f(a).

Dans l’exemple du tableau de variation précédent, f admet un minimum en 1 et un maximum en 2.

5. Ensemble image - Image réciproque

I et J sont des parties de l'ensemble $\mathbb{R}$.

L'**ensemble image** de I par une fonction f, notée en général f(I), est l'ensemble des images des éléments de I : f(I) = { f(x) / x $\in$ I }.

L'**image réciproque** de J, notée f^{-1}(J), est l'ensemble des nombres réels x dont l'image appartient à J : f^{-1} (J) = { x / f(x) $\in$ J}.

Exemple :

f est la fonction définie par f(x) = x^2.

I = {-2 ; -1 ; 0 ; 1} et J = {4 ; 9}

x	-2	-1	0	1
f(x)	4	1	0	1

Donc f(I) = {0, 1, 4}.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = x^2$	9	4	1	0	1	4	9

$(-3)^2 = 3^2 = 9$ et $(-2)^2 = 2^2 = 4$ donc $f^{-1}(J) = \{-3, -2, 2, 3\}$.

6. Composition de deux fonctions

Soient f et g deux fonctions telles que $f(D_f) \subset D_g$.

La **composée** de f et g, (ou f suivie de g), notée g o f, est la fonction définie par $g \circ f(x) = g[f(x)]$.

En d'autres termes, l'image de x par g o f est égale à l'image de f(x) par g.

Exemple : Soient f et g les fonctions définies respectivement par $f(x) = 2x - 1$ et $g(x) = x^2$.

Déterminer $g \circ f(x)$.

$g \circ f(x) = g[f(x)]$

$= g(2x-1)$

$= (2x-1)^2$

$g \circ f(x) = 4x^2 - 4x + 1$

Propriétés :

- $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ mais en général, $g \circ f \neq f \circ g$
- Sens de variation **:**
  - Si f et g ont le même sens de variation, alors g o f est croissante ;
  - Si f et g ont des sens de variation opposés, alors g o f est décroissante.