Séquence 2: Calcul dans IR

1. Intervalles de IR

1.1 Comparaison de deux nombres réels

Nous savons comparer deux nombres réels de différentes manières : partie entière et partie décimale ; mais la méthode la plus pratique est la suivante :

Pour comparer deux nombres réels, on étudie le signe de leur différence.

Soient a et b deux nombres réels, alors :

a < *b* si et seulement si *a* - *b* < 0 ou encore *a* > *b* si et seulement si *a* - *b* > 0.

On dit que $a \leqslant b$ (au sens large) si et seulement si [*a* < *b* ou *a* = *b*].

De même, on dit que $a \geqslant b$ si et seulement si [*a* > *b* ou *a* = *b*].

Exemple :

En utilisant géogebra, calculer $\sqrt{2}$ et $\dfrac{941664}{665857}$ à 10^{-12} près (12 chiffres après la virgule).

$\sqrt{2} = 1{,}41421356237\ldots$ et $\dfrac{941664}{665857} = 1{,}4142135623\ldots$. Que se passe-t-il ?

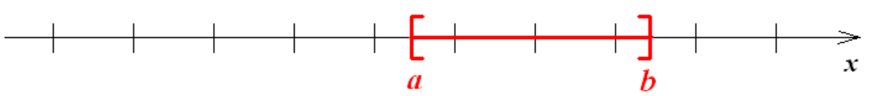
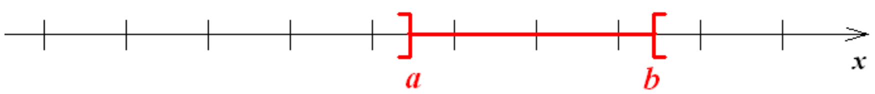
Si on calcule la différence, $\sqrt{2} - \dfrac{941664}{665857} = 1{,}6.10^{-12}$ donc : $\sqrt{2} > \dfrac{941664}{665857}$.

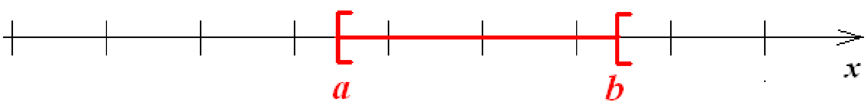
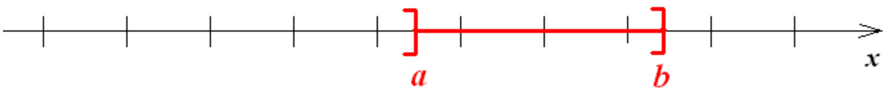
- Pour tout réel x, $x \leq x$.
- Pour tous réels x, y et z, si $x \leq y$ et $y \leq z$, alors $x \leq z$.
- Pour tous réels x et y, si $x \leq y$ et $y \leq x$, alors $y = x$.
- Pour tous réels x et y, on a $x \leq y$ ou $y \leq x$.

1.2 Types d'intervalles

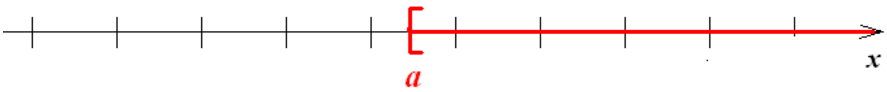
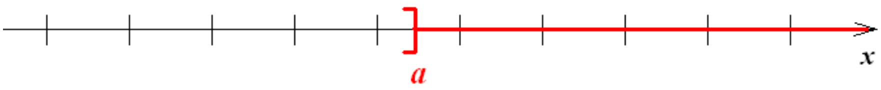
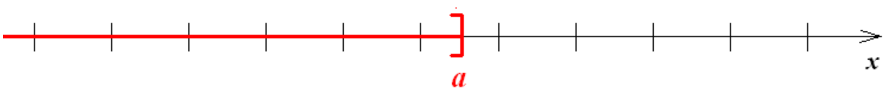
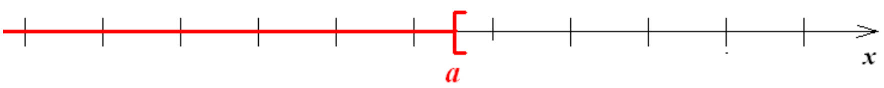
Soient a et b deux nombres réels tels que a ≤ b. Il existe huit types d'intervalles.

1.2.1 Intervalles bornés

[a ; b]	$a \leq x \leq b$	
] a ; b [	$a < x < b$	

[a ; b [	$a \leq x < b$	
] a; b]	$a < x \leq b$	

1.2.2 Intervalles non bornés

$[a;+\infty[$	$x \geq a$	
$]a;+\infty[$	$x > a$	
$]-\infty;a]$	$x \leq a$	
$]-\infty;a[$	$x < a$	

$\mathbb{R}$ est un intervalle non borné ouvert :

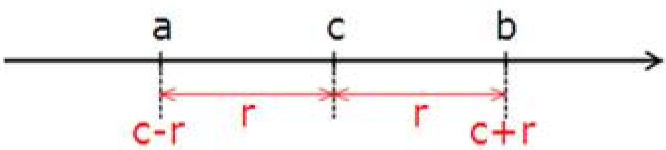
$\mathbb{R}=]-\infty;+\infty[$;

$\mathbb{R}_+=[0;+\infty[$;

$\mathbb{R}_-=]-\infty;0]$

1.2.3 Centre , rayon, amplitude d'un intervalle

Soient a et b deux nombres réels tels que a < b.



Le **centre** de l'intervalle fermé [a ; b] ou de l'intervalle ouvert]a ; b[est le réel $c=\frac{a+b}{2}$.

Le **rayon** de l'intervalle fermé [a ; b] ou de l'intervalle ouvert]a ; b[est le réel positif $r=\frac{b-a}{2}$.

L'**amplitude** de l'intervalle fermé [a ; b] ou de l'intervalle ouvert]a ; b[est le réel $b-a$.

Exemple :

Pour l'intervalle J = [-1 ; 2], le centre est le réel $c=\frac{1}{2}$, le rayon est $r=\frac{3}{2}$ et l'amplitude est 3.

2. Majorant, minorant, maximum, minimum d'un sous-ensemble de IR

2.1 Majorant - minorant

Soit A un sous-ensemble non vide de IR.

On dit qu'un réel M est un **majorant** de A si M est supérieur ou égal à tous les éléments de A.

Pour tout réel x de A, $M\geq x$.

Un ensemble qui admet un majorant est dit **majoré**.

On dit qu'un réel m est un **minorant** de A si m est inférieur ou égal à tous les éléments de A.

Pour tout réel x de A, $m\leq x$.

Un ensemble qui admet un minorant est dit **minoré**.

Exemples :

- A = { -4 ; -3 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 }

  9, 10 et 11 sont des majorants de A.

  -6, -5 et -4 sont des minorants de A.

- L'ensemble IN n'est pas majoré, mais 0, -3, -2 et -1 sont des minorants de IN.
- Les ensembles $\mathbb{Z}$, ID, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ ne sont ni majorés ni minorés.

2.2 Maximum - minimum

Soit A un sous-ensemble non vide de IR.

Le plus grand élément de A, s'il existe, est appelé **maximum** de A.

Le plus petit élément de A, s'il existe, est appelé **minimum** de A.

Exemples :

- A = { -4 ; -3 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 }

9 est le maximum de A tandis que -4 en est le minimum.

- 0 est le minimum de IN. Il n'admet pas de maximum.
- 1 est le minimum de l'intervalle [1 ; 2[, il n'admet pas de maximum. Par contre, 2 est un majorant de [1 ; 2[.

2.3 Remarque

Le minimum ou le maximum d'un ensemble, s'il existe, appartient à cet ensemble.

3. Distance et valeur absolue

3.1 Distance

La **distance** entre deux nombres réels x et y est la différence entre le plus grand nombre et le petit nombre. Cette distance est notée |x - y| et se lit « valeur absolue de x - y ». On la note aussi d(x ; y).

3.2 Valeur absolue

3.2.1 Définition

La **valeur absolue** de x est la distance entre x et 0.

Si x est plus grand que 0, $d(x\,;0)=x-0=x$ et si x est plus petit que 0, $d(x\,;0)=0-x=-x$.

$$|x|=\begin{cases} x & \text{si } x>0 \\ -x & \text{si } x\leqslant 0 \end{cases}$$

3.2.2 Propriétés

- Pour tout réel x, |x| = 0 si et seulement si x = 0
- Pour tout réel x, |-x| = |x|
- Pour tous réels x et y, |x y| = |x| |y|
- Pour tous réels x et y, $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$
- Pour tout réel x, $\sqrt{x^2}=|x|$
- Pour tout réel x et a>0, |x| = a si et seulement si x = - a ou x = a
- Pour tout réel x et a>0, $|x|\leq a$ si et seulement si $-a\leq x\leq a$

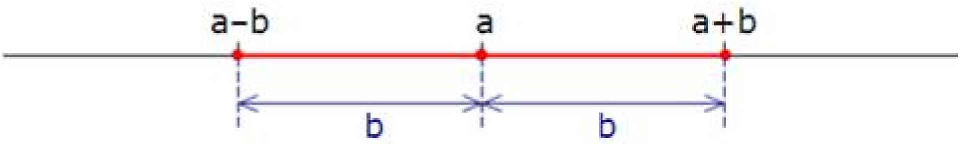
3.3 Résolution de l'inéquation |x-a| ≤ b dans IR

3.3.1 Résolution graphique

Soient a et b deux nombres réels donnés, b > 0 et x un réel quelconque.

$|x-a|\leq b$ signifie que : $d(x\,;a)\leq b$.

Les solutions sont donc les nombres situés à une distance inférieure à b du réel a.



3.3.2 Résolution algébrique

Soient a et b deux nombres réels donnés, b>0 et x un réel quelconque.

On sait que $|x-a|\leq b$ si et seulement si $-b\leq x-a\leq b$ donc : $a-b\leq x\leq a+b$.

L'ensemble des solutions est : S = [a-b ; a+b].

Exemple :

Résolvons dans IR l'inéquation $|x-3|\leq 2$.

L'inéquation est équivalente à $-2\leq x-3\leq 2$ c'est-à-dire $-2+3\leq x\leq 2+3$ donc : S = [1 ; 5].