Série 2 : Exercices sur le logarithme népérien

Problème 1 :

Soit la fonction f définie par $f(x)=\ln(\frac{1}{x+3})$.

1. Trouver le domaine de définition D_f de f et calculer ses limites aux bornes de D_f.
2. Calculer f'(x) et dresser le tableau de variations de f.
3. Écrire l'équation de la tangente (T) au point A d'abscisse -2 à la courbe représentative (C) de f.
4. Donner les coordonnées du point d'intersection B de (C) avec l'axe y'Oy.

   Tracer la courbe (C) et la droite (T) dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité : 1cm).

   On donne ln 3 ≈ 1,1. (On admettra que $\lim_{x \to +\infty} \frac{ln(x)}{x}=0$ *).*

5. Calculer la dérivée de la fonction F définie par $F(x)=(x+3)\ln(x+3)$.

   Calculer l'aire S du domaine limité par la courbe (C), l'axe x'Ox et les droites d'équations x=-2 et x=0.

   On hachurera ce domaine sur le graphique précédent.

6. Soit la fonction g définie par $g(x)=|\ln(x+3)|$.

   Exprimer g en fonction de f. Discuter suivant les valeurs de x.

   À partir de la courbe (C), construire la courbe représentative (C') de g sur le graphique précédent.

Problème 2 :

On considère la fonction f définie par $f(x)=\ln(x^2-4)$.

ln désigne la fonction logarithme népérien. On note (C) la courbe représentative de f dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unité 1cm.

1. Donner l'ensemble de définition D_f de f.

   Montrer que f est paire ; en déduire l'axe de symétrie de (C).

   Déterminer les limites de f aux bornes de D_f.

   Étudier les variations de f.

2. Déterminer les point A et A ', intersections de (C) avec l'axe (x'Ox). On note A la point d'abscisse positive.

   Donner l'équation de la tangente (T) à (C) en A.

3. Étudier les branches infinies de (C), on admet que $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x}=0$.

   Tracer la courbe (C) et la droite (T).

4. Soit g la fonction définie par $g(x)=(x+a)\ln(x+a)$ où a est un réel et (x+a) > 0. Calculer g'(x).

   En déduire une primitive de la fonction f sur] 2, +∞ [.

   Calculer, en cm², l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe x'Ox et les droites d'équations respectives x = 3 et x = 6.

5. Soit h la fonction définie par $h(x)=|\ln(x^2-4)|$.

   Exprimer h(x) en fonction de f(x).

   Discuter suivant les valeurs de x.

   A partir de la courbe (C), construire sur le graphique précédent la courbe représentative (Γ) de h.

Problème 3 :

Soit la fonction définie par $f(x)=(\ln x)^2-\ln(x)$ On appellera (C) la courbe représentative de f dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ avec $\|\vec{i}\|=2\text{cm}$ et $\|\vec{j}\|=4\text{ cm}$.

1. Donner l'ensemble de définition D_f de f.

   Déterminer les limites de f aux bornes de D_f. On remarquera que $(\ln x)^2-\ln(x)=\ln(x)(\ln x-1)$.

2. Étudier les variations de f. $(\ln x)^2-\ln(x)=\ln(x)(\ln x-1)$

3. Déterminer les points A et B, intersections de (C) avec l'axe des abscisses (on prend $x_A < x_B$).

   Écrire les équations de tangentes à (C) aux points A et B (on note T et T ' ces tangentes).

   Quelles sont les coordonnées du point d'inflexion I de (C) ? Donner la pente de la tangente à (C) en I.

4. Étudier les branches infinies de (C). On donne $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$.

5. Tracer les droites T et T', et la courbe (C) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

6. Soit g la fonction définie par $g(x)=x[(\ln x)^2-3\ln x+3]$ pour x > 0.

   Calculer g'(x). En déduire une primitive de f.

   Calculer l'aire de l'ensemble des points M(x ; y) tels que 1 ≤ x ≤ e et f(x) ≤ y ≤ 0.

   On donne e ≈ 2,72 et $\sqrt{e}\approx 1{,}65$.

Problème 4 :

On considère la fonction numérique f de la variable réelle définie par $f(x)=\ln(1-x)+\ln(1+x)$.

ln désigne le logarithme népérien. On note (C) la courbe représentative de f dans un plan P rapporté à un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$ avec $\|\vec{i}\|=5\text{cm}$ et $\|\vec{j}\|=10\text{cm}$.

1. Quel est l'ensemble de définition D_f de f ?

   Déterminer les limites de f aux bornes de D.

2. Calculer f(-x). En déduire que la courbe (C) de f possède un axe de symétrie dont on donnera une équation.

3. Calculer f' et étudier les variations de f.

   Calculer f(1/2) et f(4/5) et donner une équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 1/2.

4. Construire la courbe (C). On fera figurer les points d'abscisses 1/2 et 4/5 et la tangente au point d'abscisse 1/2.

5. Soient les fonctions g et h définies par $g(x)=(1+x)\ln(1+x)-(1+x)$ et $h(x)=(1-x)\ln(1-x)-(1-x)$

   Calculer g' et h' et en déduire une primitive de f.

   En déduire le nombre qui mesure en cm² l'aire de la partie du plan limitée par le courbe (C), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation x = 1/2.

   On donne ln(2) = 0,7 ; ln(3)= 1,1 et ln(5) = 1,6.

Problème 5 :

Soit la fonction numérique f définie par f définie par $f(x)=x-2+\dfrac{\ln(x+2)}{\ln(x-2)}$.

ln désigne le logarithme népérien. Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unité 1cm.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation (on donnera les valeurs exactes et approchées à 10^{-1} près des extréma).
3. Préciser les asymptotes ; en particulier, montrer que la droite d'équation y = x - 2 est asymptote.
4. Montrer que la courbe (C) est symétrique par rapport au point I(0 ; -2).
5. Construire (C).
6. Calculer la dérivée de la fonction F définie par $F(x)=(x+2)\ln(x+2)-(x-2)\ln(x-2)$.

   Calculer en cm² l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'asymptote oblique et les droites d'équations x = 4 et x = 6 (on donnera la valeur exacte et la valeur approchée à 10^{-1} près).

   On donne $\ln(\sqrt{2}+1)\approx 0{,}9$; $\ln(\sqrt{2}-1)\approx -0{,}9$; $\ln(2)\approx 0{,}7$; $\ln(3)\approx 1{,}1$ *et* $\sqrt{2}\approx 1{,}4$.

Exercice 6 :

Soit la fonction numérique de la variable réelle x définie par $f(x)=\dfrac{1}{x(1-\ln x)}$.

ln désigne le logarithme népérien.

1. Résoudre dans IR l'équation $1-\ln x=0$.

   En déduire le domaine de définition de f.

2. Calculer les limites de f aux bornes de ce domaine.

3. Calculer la dérivée de $u : x \rightarrow x(1-\ln x)$.

   En déduire f'(x).

4. Étudier les variations de f.

   Calculer f(1/2), f(1) et $f(\sqrt{e})$.

5. Soit (C) la courbe représentative de f. Montrer que la tangente (T) à la courbe (C) en son point d'abscisse $x_0=\sqrt{e}$ passe par l'origine O.

6. Construire la tangente (T) et la courbe (C) dans un plan muni d'un repère orthonormé d'unité 2 cm.

7. Soit la fonction G de IR vers IR définie par $G(x)=\ln|1-\ln(x)|$.

   Calculer la dérivée G' de G. En déduire une primitive F de f sur] 0 ; e [.

   Calculer, en cm², l'aire de la surface limité par la courbe (C), l'axe x'Ox et les droites d'équations respectives x = 1 et $x=\sqrt{e}$

   On rappelle que $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0^-$ *et on donne* $\ln(2) \approx 0{,}7$ *et* $\frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0{,}61$.

Exercice 7 :

Soit f la fonction numérique de la variable x définie par $f(x)=1+\frac{1}{x}+\ln(x)$.

On note (C) sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1cm.

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f.

2. Calculer les limites de f aux bornes de D_f. (On admet que $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0^-$).

3. Calculer f'(x) et dresser le tableau de variations de f.

4. Montrer que (C) admet un point d'inflexion I dont on précisera les coordonnées.

5. Tracer (C) (on admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et on prend ln 2 ≈ 0,7).

6. On définit la suite numérique (u_n) par $u_n = f(e^n) - (n+1)$ pour tout entier n ∈ IN.

   Exprimer un en fonction de n.

   En déduire que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

   Calculer, en fonction de n, la somme $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

7. Soit $g(x)=x\ln x - x$ pour tout x > 0.

   Calculer g'(x) ; en déduire une primitive de f.

   Calculer, en cm², l'aire A du domaine plan limité par (C), l'axe (x'Ox) et les droites d'équations respectives x = 1 et x = 2.

Exercice 8 :

Soit f la fonction numérique de variable réelle définie par $f(x)=\frac{2\ln x+1}{2x}$.

ln désigne le logarithme népérien. On appelle (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unité 2cm.

1. Quel est l'ensemble de définition D_f de la fonction f ?

   Déterminer les limites de f aux bornes de D_f (on admet que $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$).

2. Calculer f' et dresser le tableau de variation de f.

   Calculer avec trois décimales f(1/2), f(1), f(e), f(2), $f(\sqrt{e})$ et f(4).

   On donne ln(2) ≈ 0,693 ; e ≈ 2,718 et $\frac{1}{\sqrt{e}}\approx 0{,}607$.

3. Soit A le point d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses.

   Donner l'équation de la tangente (T) à (C) au point A.

   Montrer que (C) admet un point d'inflexion I dont on précisera les coordonnées.

   Écrire l'équation de la tangente (T') à (C) au point I.

4. Tracer les tangentes (T), (T') et la courbe (C).

5. Soit h la fonction définie de] 0 ; + ∞ [dans IR* par $h(x)=(\ln x)^2$.

   Calculer la fonction dérivée de h.

   En déduire une expression des fonctions primitives de f sur D_f.

   Calculer l'aire, en cm², du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$ et x = e.

Exercice 9 :

Soit la fonction numérique réelle g définie par $g(x)=x^2+2-2\ln(x)$.

1. Étudier les variations de g.

   Montrer que g admet un minimum dont on déterminera la valeur.

   En déduire le signe de g(x) sur son domaine de définition.

2. Soit la fonction numérique réelle f définie par $f(x)=x+2\frac{\ln(x)}{x}$

   Quel est l'ensemble de définition D_f de f ?

   Calculer les limites de f aux bornes de D_f.

3. Déterminer f'(x).

   Vérifier que $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$

   Étudier les variations de f (on utilisera les résultats de question 1).

4. Montrer que la droite (D) d'équation y = x est une asymptote de la courbe (C) de la fonction f.

   Étudier la position relative de (C) par rapport à son asymptote oblique (D).

   Préciser les coordonnées du point I, intersection de (C) et de (D).

   Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point I.

   Déterminer, par ses coordonnées, le point J de la courbe (C) où la tangente (T') à (C) est parallèle à la droite (D).

5. Tracer, dans un plan rapporté à un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, les tangentes (T), (T') et la courbe (C).

6. Soit la fonction $h : x \rightarrow (\ln x)^2$

   Calculer h'(x).

   En déduire une primitive de f.

   Calculer l'aire du domaine-plan limité par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations x = 1 et x = 2.

   On donne $\lim_{x\rightarrow+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$

Exercice 10 :

On considère la fonction f définie par $f(x)=\frac{1}{\ln(x)}-\frac{1}{(\ln x)^2}$.

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Quel est le domaine de définition D_f de f?
2. Calculer les limites de f aux bornes de D_f.

   On remarque que $\frac{1}{\ln(x)}-\frac{1}{(\ln x)^2}=\frac{\ln(x)-1}{(\ln x)^2}$

3. Étudier les variations de f.
4. Calculer les coordonnées du point A, intersection de (C) avec l'axe (x'Ox).
   Écrire l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point A.
5. Tracer (T) et (C) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.
   On admet que (C) présente une tangente verticale en O.
6. Montrer qu'on peut choisir les constantes a et b de façon que $\frac{ax+b}{\ln(x)}$ soit une primitive de la fonction f sur] 1 ; +∞ [.

   En déduire l'aire de l'ensemble des points M(x ; y) tels que e ≤ x ≤ e² et 0 ≤ y ≤ f(x).
   On donne e = 2,72 et e² = 7,39.

Exercice 11 :

Soit la fonction f définie sur] 0 ; +∞ [par $f(x)=(2-\ln(x))(\ln x)^2$ où ln désigne le logarithme népérien.

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal d'unité 2 cm.

1. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2. Prouver que, pour x réel strictement positif, $f'(x)=\dfrac{(4-\ln(x))\ln(x)}{x}$, où f' désigne la dérivée de la fonction f.

   Étudier le signe de f'(x) sur] 0 ; +∞ [et dresser le tableau de variation de f.

   Montrer que $f(e^{4/3}) = 32/27$.

3. Déterminer les coordonnées des points communs à la courbe (C) de la fonction f et à l'axe des abscisses, puis tracer la courbe (C).

   On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{ln(x)}{x}=0$.

4. Soit la fonction F définie sur] 0 ; +∞ [par $F(x)=x[-(\ln x)^3+5(\ln x)^2-10\ln(x)+10]$

   Calculer F'(x). En déduire une primitive de f.

5. Calculer l'aire, en cm², de l'ensemble des points M (x ; y) du plan tels que 1 < x < e et 0 < y < f(x).

   On donne e ≈ 2,71 ; e² ≈ 7,40 et $e^{4/3}$ *≈ 3,79.*