Série 2 : Exercices sur les fonctions rationnelles

Exercice 1 :

Étudier les variations de la fonction f et tracer sa courbe représentative.

a) $f_1(x)=\frac{3x-1}{x+1}$ b) $f_2(x)=\frac{2x+1}{x-3}$

c) $f_3(x)=\frac{x}{x-2}$ d) $f_4(x)=\frac{4x-3}{2x}$

Exercice 2 :

1. Déterminer les réels b, c et d pour que la courbe représentative C de la fonction $f: x \to \frac{x+b}{cx+d}$ coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse -1, coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée -1 et passe par le point A(2 ; 3).
2. Construire C.
3. Déterminer les points d'intersection de C avec la droite D d'équation y = x.
4. Construire les tangentes à C en ces points.

Exercice 3 :

1. Déterminer les réels a, b, c et d pour que la courbe représentative C de la fonction $f: x \to \frac{ax+b}{cx+d}$ passe par les points A(1 ; 0); B(-1 ; -2) ; D(2 ; 4).
2. Construire C et les tangentes en A et D.
3. Déterminer les points d'intersection de C avec la droite D d'équation y = -x - 1.
4. Construire les tangentes à C en ces points.

Exercice 4 :

1. $f_1(x)=2x-1+\frac{2}{x-3}$ Vérifier que la droite d'équation $y=2x-1$ est asymptote oblique.
2. $f_2(x)=-x+2+\frac{1}{x}$ Vérifier que la droite d'équation $y=-x+2$ est asymptote oblique.
3. $f_3(x)=\frac{x^2+2x+2}{x+1}$ Vérifier que la droite d'équation $y=x+1$ est asymptote oblique.

Exercice 5 :

f est la fonction $f: x \rightarrow x+3-\frac{1}{x}$

1. Étudier f.
2. Déterminer les limites en +∞ et -∞ de la fonction g définie par $g(x)=f(x)-(x+3)$.

   Qu'en déduisez-vous ?
3. Déterminer les équations des tangentes à la courbe C représentant la fonction f aux points d'abscisses 1 et -1.
4. Tracer ces tangentes et C.

Exercice 6 :

a et b sont deux réels et f est la fonction $f: x \rightarrow ax+b+\frac{1}{3-x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Sachant que f(2) = 1 et f'(2) = 0, montrer que a = -1 et b = 2.
3. Démontrer que la droite d'équation y = -x+2 est asymptote à C, courbe représentative de f.
4. Étudier les variations de f.
5. Montrer que le point d'intersection des asymptotes de C est centre de symétrie de C.
6. Construire C dans un repère orthonormé.

Exercice 7 :

f est la fonction $f: x \rightarrow \frac{x^2-3x+6}{x-1}$

1. Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout réel x ≠ 1, on ait $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-1}$
2. Étudier f et vérifier que la dérivée s'annule pour x = -1 et x = 3.
3. Expliquer pourquoi la droite d'équation y = x - 2 est asymptote oblique à la courbe C représentant f.
4. Tracer C.
5. Montrer que C admet deux tangentes parallèles à la droite d'équation y = - 3x.
6. Calculer les coordonnées de chacun des points de contact et écrire l'équation de chacune de ces tangentes.

Exercice 8 :

f est la fonction $f : x \to x + \frac{1}{x-1}$.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Étudier les variations de f.
3. Vérifier que les droites d'équations x = 1 et y = x sont asymptotes à la courbe C représentant f.
4. Construire C dans un repère orthonormé (unité : 2 cm).
5. Soit O' le point d'intersection des asymptotes de C. Montrer que O' est centre de symétrie de C.
6. Déterminer l'équation de la droite D tangente à C au point d'abscisse -1.
7. Montrer que C admet une autre tangente D' parallèle à D.
8. Déterminer les coordonnées du point commun à D' et à C.

Exercice 9 :

Une entreprise fabrique un produit et les charges variables, notées C(q), dépendent de la quantité q d'articles fabriqués. Ces charges sont données en milliers de francs par $C(q) = q^2 - 20q + 400$.

1. Quelles sont les valeurs possibles pour q ?
   Calculer les charges pour la fabrication de 10 articles, de 20 articles.
2. Déterminer la quantité d'articles à fabriquer pour avoir des charges minimales. Représenter graphiquement la fonction C.
3. Les charges moyennes unitaires, notées $C_m(q)$, sont définies par $C_m(x) = \frac{C(x)}{q}$.
   Déterminer la quantité d'articles à fabriquer pour avoir des charges moyennes unitaires minimales.
4. Représenter graphiquement la fonction Cm.
5. Cette entreprise vend 10 000F chaque article fabriqué. Déterminer le bénéfice brut B(q) de cette entreprise en fonction de q.
6. Déterminer q pour que ce bénéfice soit maximal.
7. Représenter graphiquement la fonction B.

Exercice 10 :

Pour définir les longueurs moyennes de freinage d'une automobile sur une route ayant un bon revêtement, dans des conditions climatiques normales, on a adopté la formule $d = \frac{v^2}{290 - v}$ qui donne la distance de freinage en mètres en fonction de la vitesse en km/h.

1. Étudier les variation de la fonction f définie sur [40 ; 130] par f(v) = d.
2. Construire la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal convenablement choisi.
3. Déterminer graphiquement la vitesse à ne pas dépasser pour s'arrêter sur moins de 50 mètres. Vérifier par le calcul.