CC BY SA

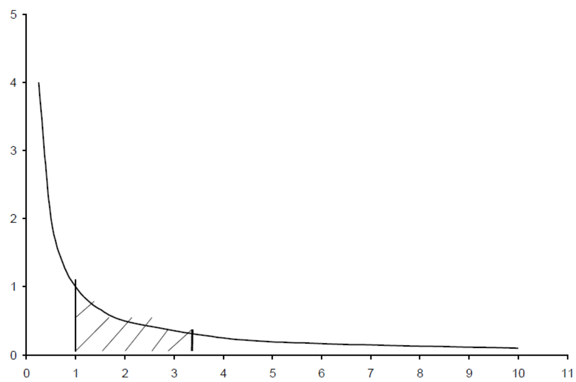
Séquence 4 : Fonction logarithme népérien

1. Définition

La fonction $x \to \frac{1}{x}$ est définie et continue sur $I =]0 ;+\infty[$. Elle admet donc sur I des primitives. Il en existe une et une seule qui s'annule en x=1.

La fonction **logarithme népérien**, notée ln (ou log) est la primitive de la fonction $x \to \frac{1}{x}$, définie sur $]0 ;+\infty[$ et qui s'annule en 1.

Interprétation géométrique



Le réel ln(x) est l'aire algébrique du domaine plan situé entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de $x \to \frac{1}{x}$ et les droites verticales d'abscisses 1 et x.

2. Conséquences de la définition

- L'ensemble de définition de x ⟼ ln x est $]0 ;+\infty[$;
- La fonction est dérivable sur $]0 ;+\infty[$ et $\ln'(x) = \frac{1}{x}$;
- ln(1)= 0

3. Sens de variation

Pour tout x > 0, on a $\frac{1}{x} > 0$ et donc ln'(x) > 0. Par conséquent, la fonction x ⟼ ln x est strictement croissante sur $]0 ;+\infty[$.

Conséquences :

Pour tous réels a > 0 et b > 0 :

- a = b si et seulement si ln(a) = ln(b) ;
- a > b si et seulement si ln(a)> ln(b) ;
- a > 1 si et seulement si ln(a) > 0 ;
- 0 < a < 1 si et seulement si ln(a) < 0.

4. Propriétés de la fonction ln

Considérons les fonctions f et g définies sur $]0;+\infty[$ par f(x) = ln(ax) et g(x) = ln(a) + ln(x).

On a respectivement $f'(x)=a\times\frac{1}{ax}=\frac{1}{x}$ et $g'(x)=\frac{1}{x}$.

Alors f'(x) =g'(x) donc f et g diffèrent d'une constante i.e. f(x) = g(x)+ k pour tout x.

En particulier f(1) = g(1) + k, or f(1) = g(1) = 0 donc k = 0.

Conclusion : pour tout a > 0 et x > 0 ln(ax) = ln(a) + ln(x).

Pour tous réels a > 0 et b > 0 ; ln(a.b) = ln(a) + ln(b)

Remarque : pour tous réels a et b, ln |a.b| = ln |a| + ln |b|

Pour tous réels a > 0 et b > 0, $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$

En particulier : $\ln\left(\frac{1}{b}\right)=-\ln(b)$

Pour tous réels a > 0, b > 0 et c > 0, ln(a.b.c) = ln(a) + ln(b) + ln(c)

Ce théorème reste vrai pour le produit d'un nombre fini de réels.

Pour tout réel a et pour tout entier n, ln a^n = n ln(a)

Pour tout réel a >0, $\ln(\sqrt{a})=\frac{1}{2}\ln(a)$

5. Étude de la fonction ln

La fonction ln est définie pour tout x >0.

Limites :

Démontrons que la fonction ln admet pour limite +∞ en +∞.

Nous avons à montrer que pour les grandes valeurs de x, les réels ln x dépassent tout réel M fixe, aussi grand soit-il.

Soit M un réel. Cherchons si, pour tout réel x assez grand, on a ln(x) > M.

On a, pour tout entier n et pour tout x > 0, x > 2^n implique ln(x) > ln(2^n) i.e. ln(x) > n ln(2).

Pour avoir ln(x) > M, il suffit donc d'avoir n ln(2) > M. i.e. $n > \frac{M}{\ln(2)}$.

Soit l'entier n ($n > \frac{M}{\ln(2)}$). Du fait que ln est croissante, alors pour tout x > 2^n, ln(x) > ln(2^n) > M.

D'où $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$.

On démontre également que $\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$ (on posera $x = \frac{1}{X}$)

Nous admettrons les limites suivantes : $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$; $\lim_{x \to 0^+} x \ln(x) = 0^-$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

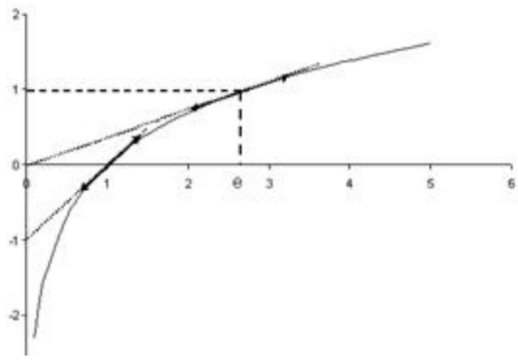
Dérivée :

D'après la définition de la fonction ln, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ pour x > 0.

Donc ln'(x) > 0, ce qui implique que la fonction ln est croissante sur $]0;+\infty[$.

Sens de variation :

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
ln'(x)	+
ln	$-\infty$ ↗ $+\infty$



La tangente au point d'abscisse 1 a pour équation y = x – 1.

La tangente au point d'abscisse e a pour équation $y = \frac{1}{e} x$.

6. Résolution de l'équation ln(x) = m (m réel donné)

La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$, c'est donc une bijection de $]0;+\infty[$ sur IR.

Pour tout réel m, l'équation ln(x) = m admet donc une solution unique dans l'intervalle $]0;+\infty[$.

Il existe donc un unique réel dont le logarithme népérien est 1. Ce réel est noté e. **ln(e) = 1**.

Le réel e est appelé **base des logarithmes népériens**. e ≈ 2,718…

Solution de l'équation ln x = m

Cette solution est unique et nous la noterons e^m. Donc, dire **ln(x) = m** revient à dire **x = e^m**.

Remarque sur la résolution d'une inéquation :

La fonction ln étant croissante pour tout x de $]0;+\infty[$, alors ln(x) > m pour tout x > e^m.

7. Fonctions x $\longmapsto$ ln (u(x)) où u est une fonction

Ensemble de définition

ln(u) est définie pour tout réel x tel que u(x) > 0.

Exemple :

Pour quelles valeurs de x, ln(x+2) est-elle définie ? Même question pour ln(x^2 - 1).

Dérivée de ln(u)

Rappelons que la dérivée d'une fonction composée (f o u)(x) = f[u(x)] est (f[u(x)])' = f'(u).u'(x).

En l'appliquant à la fonction x à ln [u(x)], nous avons :

$$(\ln[u(x)])'=(\ln u)'\times u'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$$

Ainsi, l'étude du signe de la dérivée (ln[u(x)])' revient à l'étude du signe de u'(x).

Exemple :

Dérivée de x $\longmapsto$ ln(x^2 + x + 1)

Résolution de l'équation ln(u(x)) = m

On commence par déterminer l'ensemble de définition de l'équation.

On utilise ensuite la relation du paragraphe 6 i.e. ln(u(x)) = m si et seulement si u(x) = e^m.

La ou les racines cherchées sont celles qui appartiennent à l'ensemble de définition.

Exemple :

Résolvez dans IR l'équation ln(2x + 3) = 1.

Dans le cas de la résolution d'une inéquation, on suit les mêmes étapes que précédemment.

Exemple :

Résolvez dans IR l'inéquation ln(x - 1) > 2.

Ensemble de définition : $D=\{x;\ x\in\mathbb{R}\ /\ x-1>0\}$ i.e. $D=]1;+\infty[$.

Comme la fonction ln est croissante, ln (x - 1) > 2 si et seulement si (x - 1) > e^2 i.e. x > e^2 – 1.

L'ensemble des solutions est $S=]e^2-1;+\infty[$.

8. Primitives

Par lecture inverse du tableau de la dérivée, on a :

Fonction $x \longmapsto f(x)$	Primitives $x \longmapsto F(x)$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)+k$
$\frac{1}{ax+b}$	$\frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert+k$
$\frac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert+k$