Séquence 2 : Plan d'étude d'une fonction

Soit f une fonction et C sa courbe représentative dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. Pour étudier f, on adopte généralement le plan suivant :

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f

- Une fonction polynôme est définie sur IR.
- Une fonction rationnelle (quotient de deux polynômes) est définie pour tout réel x qui n'annule pas le dénominateur.

2. Déterminer l'ensemble d'étude E_f, en étudiant les symétries éventuelles de C

- La fonction f est **paire** si pour tout $x \in D_f$, $-x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$.

La courbe C d'une fonction paire admet l'axe Oy comme axe de symétrie.

- La fonction f est **impaire** si pour tout $x \in D_f$, $-x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$.

La courbe C d'une fonction impaire admet l'origine O comme centre de symétrie.

- **Axe de symétrie :** la courbe C est symétrique par rapport à la droite d'équation x=a, si et seulement si, pour tout $x \in D_f$, $(2a-x) \in D_f$ et $f(2a-x)=f(x)$.
- **Centre de symétrie :** la courbe C admet S(a ; b) comme centre de symétrie, si et seulement si, pour tout $x \in D_f$, $(2a-x) \in D_f$ et $f(2a-x) = 2b-f(x)$.

3. Chercher les limites de f aux bornes du domaine d'étude

Rappelons les théorèmes suivants :

- Si $\lim f=L$, alors $\lim |f|=|L|$.
- Soient f et g telles que $\lim f=L$ et $\lim g=L'$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$, alors
  - $\lim (f+g)=L+L'$
  - $\lim (\lambda f)=\lambda L$
  - $\lim (f g)=L L'$
  - $\lim \frac{f}{g}=\frac{L}{L'}$

Remarque : Les formes indéterminées sont $+\infty-\infty$, $0\times\infty$, $\frac{\infty}{\infty}$ et $\frac{0}{0}$.

- La limite d'une fonction polynôme lorsque *x tend vers l'infini* est celle du terme de plus haut degré en x.
- La limite d'une fonction rationnelle lorsque *x tend vers l'infini* est celle du rapport des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

4. Étudier les branches infinies.

- On dit que la courbe C a une **branche infinie** si l'une quelconque des coordonnées d'un point M de la courbe C peut devenir arbitrairement grande en valeur absolue.
- **Asymptote verticale :** La droite d'équation $x=x_0$ est asymptote à la courbe C si et seulement si $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$.
- **Asymptote horizontale :** La droite d'équation $y=y_0$ est asymptote à la courbe C si et seulement si $\lim_{x \to \infty} f(x) = y_0$.
- **Asymptote oblique :** La droite d'équation y = ax + b est asymptote à la courbe C si et seulement si $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ et $\lim_{x \to \infty} [f(x) - (ax - b)] = 0$

Remarques :

Supposons que $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

- Lorsque $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, on dit que C admet une *branche infinie parallèle à Ox.*
- Lorsque $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$, on dit que C admet une *branche infinie parallèle à Oy.*
- Lorsqu'il existe un réel a tel que $\lim_{x \to \infty} [f(x) - ax] = \infty$, on dit que la courbe C admet *une branche infinie parallèle à la droite d'équation y = ax.*

5. Calculer la dérivée f'(x) et étudier son signe

Pour calculer la dérivée, on utilise les formules des tableaux des dérivées.

Lorsque c'est possible, on utilise une expression factorisée de f'(x) pour l'étude de son signe.

6. Faire le tableau de variation

On rassemble tous les résultats précédents dans le tableau de variation (D_f, limites, valeurs annulant f', signe de f', sens de variation de f).

x	Domaine de définition, valeurs particulières
f'(x)	Signe de f'(x)
f	Limites et sens de variations de f

Attention : ne pas confondre sens de variation et tableau de variation.

7. Étudier les points particuliers

- Intersections avec les axes de coordonnées :

  $C \cap Ox$: points d'ordonnée nulle i.e. $y=0$

  $C \cap Oy$: points d'abscisse nulle i.e. $x=0$

- Points où f'(x) s'annule i.e. points où la tangente est horizontale.
- Extrema.
- Points d'inflexion : Supposons que f(x) existe en x_0. Si f'' s'annule en x_0 en changeant de signe, alors le point M_0 (x_0 ; y_0) est un point d'inflexion. La courbe C traverse sa tangente en M_0.

8. Tracer la courbe représentative

- Tracer les axes de coordonnées et indiquer les vecteurs unitaires (respecter les indications du problème, en particulier les unités).
- Représenter, dans l'ordre, les asymptotes, les extrema donnés par le tableau de variation et les tangentes (dans le cas où l'on demanderait une équation pour une valeur donnée).
- Faire une table de valeurs pour compléter l'étude.
- Tracer à main levée la courbe de f en prenant soin de respecter le tableau de variation (position des asymptotes par rapport à la courbe, sens de variation…).

On ne trace la courbe représentative que si elle est demandée.