Correction exercice mécanique série C (avec rappel de l'énoncé)

Dans ce problème $|\vec{g}|$ =10m.s^{-2}. Tous les calculs seront effectués à 10^{-2} prés.

Un solide (S) de masse m=50g , de dimension négligeable, peut glisser sur une piste ABCD située dans un plan vertical :

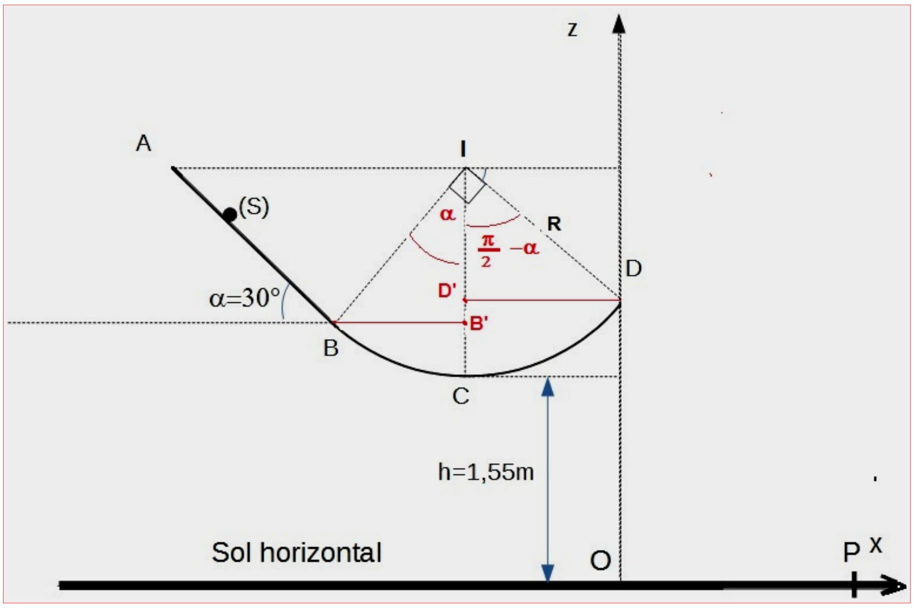
-AB est la ligne de plus grande pente d'un plan incliné d'un angle α =30° par rapport à l'horizontale ; AB=1,6m.

-BCD est le quart d'un cercle de centre I et de rayon $R \simeq 0{,}9\,m$; C est situé sur la verticale passant par I

1. On néglige les frottements.(S) part du point A sans vitesse.

a)Calculer sa vitesse en B, en C et en D.

Complétons le schéma de l'énoncé afin d'évaluer les hauteurs des différents points:



<u>**Sans frottements, l'énergie mécanique Em du système (objet,Terre) se conserve**</u>.

Au point A, toute l'énergie est potentielle (absence de vitesse), ainsi :

Em=Ec(A)+Ep(A) =0+m.g.h$_A$=m.g.(h+CI)=m.g.(h+R)=50.10^{-3}.10.(1,55+0,9)=**1,225J**.

Cette énergie est constante au cours du mouvement.

Évaluons l'énergie potentielle au point B:

Ep(B)=m.g.(h+CB')=m.g.[h+(R-Rcos30°)]=50.10^{-3}.[1,55+0,9(1-0,866)]=**0,835J**.

Energie cinétique au point B:

Comme Ec(B)=Em - Ep(B);

Ec(B)= 1,225-0,835=0,39J et ainsi: $v_B=\sqrt{\left(\frac{2.Ec(B)}{m}\right)}=\sqrt{\left(\frac{2.0{,}39}{0{,}05}\right)}=3{,}95\,ms^{-1}$.

Énergie potentielle au point C:

Ep(C)=m.g.h=50.10^{-3}.10.1,55=**0,775J**.

Énergie cinétique au point C :

Ec(C)=1,225-0,775=**0,45J** et ainsi : $v_C=\sqrt{(\frac{2.Ec(C)}{m})}=\sqrt{(\frac{2.0,45}{0,05})}=4,24\,ms^{-1}$.

Énergie potentielle au point D :

Ep(D)=mg[h+D'C]=mg[h + R-R.cos60°]=m.g.[h+R(1-0,5)] = 50.10-3.10.[1,55+0,9.0,5]=**1J**.

Energie cinétique en D :

Ec(D)=1,225-1,00=0,225J et ainsi : $v_D=\sqrt{(\frac{2.Ec(D)}{m})}=\sqrt{(\frac{2.0,225}{0,05})}=3,00\,ms^{-1}$.

b)Calculer l'intensité de la force $\vec{N}$ exercée par la piste sur (S) en C et D.

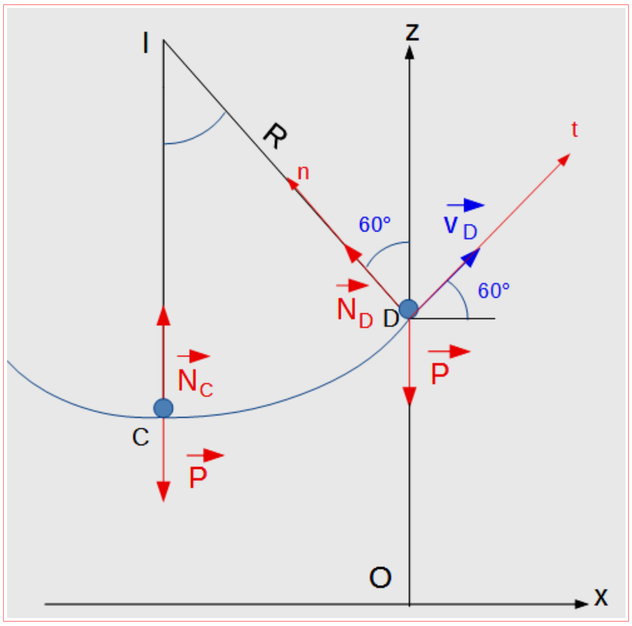
On a représenté ci-dessous les forces sollicitant le solide (S) en C et D.

(En l'absence de frottements, la réaction est normale à la trajectoire.)

En C, la somme des forces appliquées est dirigée selon la normale en C, l'accélération en ce point est donc également normale.

Écrivons la projection du P.F.D sur la normale :

$$-mg+N_c=m.a_n=m.\frac{v_C^2}{R}$$,soit : $$N_c=m(\frac{v_c^2}{R}+g)=0,05.(\frac{4,24^2}{0,9}+10)=1,50N$$



En D, la projection du P.F.D sur la normale s'écrit:

$$N_D-m.g.\cos 60°=m.\frac{v_D^2}{R}$$ soit : $$N_D=m.(\frac{v_D^2}{R}+g.\cos 60°)=0,05.(\frac{3^2}{0,9}+10.\frac{1}{2})=0,75N$$

c)Donner les caractéristiques du vecteur vitesse $\vec{V}_D$ de (S) au point D.

Direction : tangente à la trajectoire inclinée de 60° par rapport à l'horisontale.

Sens : vers la droite.

Intensité: $3{,}00 m{,}s^{-1}$.

2.On néglige la résistance de l'air. A partir du point D, (S) tombe dans le vide avec la vitesse $\vec{V}_D$ précédente. Le point C est situé à la hauteur h=1,55m du sol horizontal.

a)Donner l'équation cartésienne de la trajectoire du mouvement de (S) à partir du point D, dans le repère (O,x,z).

Le mouvement de (S) est étudié par rapport au référentiel terrestre galiléen . La seule force appliquée dans le vide sur le système est le poids $\vec{P}$. Ce dernier communique au centre d'inertie G du système, une accélération : $\vec{a}_G=\frac{\vec{P}}{m}=\frac{m.\vec{g}}{m}=\vec{g}$ qui est donc une constante.

Les composantes des vecteurs accélération, vitesse et position dans le repère Ozx sont :

(Vitesse et position sont obtenues par intégration par rapport au temps avec prise en compte des conditions initiales du mouvement pour le calcul des constantes d'intégration)

$\vec{a}_G(t)$	$\vec{V}(t)$(primitive de $\vec{a}$)	$\overrightarrow{OG}(t)$(primitive de $\vec{V}$)
$\ddot{x}=0$	$\dot{x}=v_x=V_D.\cos 60°=\frac{V_D}{2}=3/2=1{,}5 m.s^{-1}$	x(t)=1,5t +0 (car x=0 à t=0) (1)
$\ddot{z}=-g$	$\dot{z}=v_z=-g.t+V_D.\sin 60°=-10t+3.\frac{\sqrt{3}}{2}$ = -10.t+2,60	$z(t)=-10.\frac{t^2}{2}+2{,}6.t+2{,}05$ (car z=2,05m à t=0) (2)

Pour établir l'équation de la trajectoire, il suffit d'éliminer t entre x(t) et z(t).

de l'équation (1) on tire t=x/1,5 que l'on remplace dans (2) qui devient:

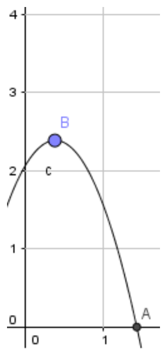
$z(x)=-2{,}22x^2+1{,}73x+2{,}05$ (parabole de concavité orientée vers le bas)

b) Jusqu'à quelle hauteur H au-dessus du sol horizontal monte le solide (S) :

Recherchons d'abord l'abscisse x du maximum de la courbe puis z_{max} :

$$\frac{\mathbf{dz}}{\mathbf{dx}}=0\Rightarrow-2{,}22.2\,\mathbf{x}+1{,}73=0\Rightarrow\mathbf{x}=0{,}39\,\mathbf{m}\Rightarrow\mathbf{z_{max}}=\mathbf{H}=-2{,}22.0{,}39^2+1{,}730{,}39+2{,}05=2{,}39\,\mathbf{m}$$

c) Calculer la distance OP où P est le point d'impact de (S) sur le sol.



$z(x)=-2,22x^2+1,73x+2,05=0$ la racine est $OP=x_{max}=1,43m$

Le tracé de la courbe ci-dessous a été réalisé par le logiciel Geogebra: (P est remplacé par A sur le tracé ; B est le point d'altitude maxi).

Point
- A = (1.43, 0)
- B = (0.38, 2.39)

3. Dans cette question, la piste exerce une force de frottements $\vec{f}$, parallèle et de sens contraire à sa vitesse à chaque instant , et d'intensité constante le long de ABCD. Partant de A sans vitesse, (S) s'arrête au point D.

a) Établir en fonction de m,g,R et α, l'expression algébrique du travail $W_{\vec{f}}$ de la force de frottements entre les points A et D. Calculer $W_{\vec{f}}$.

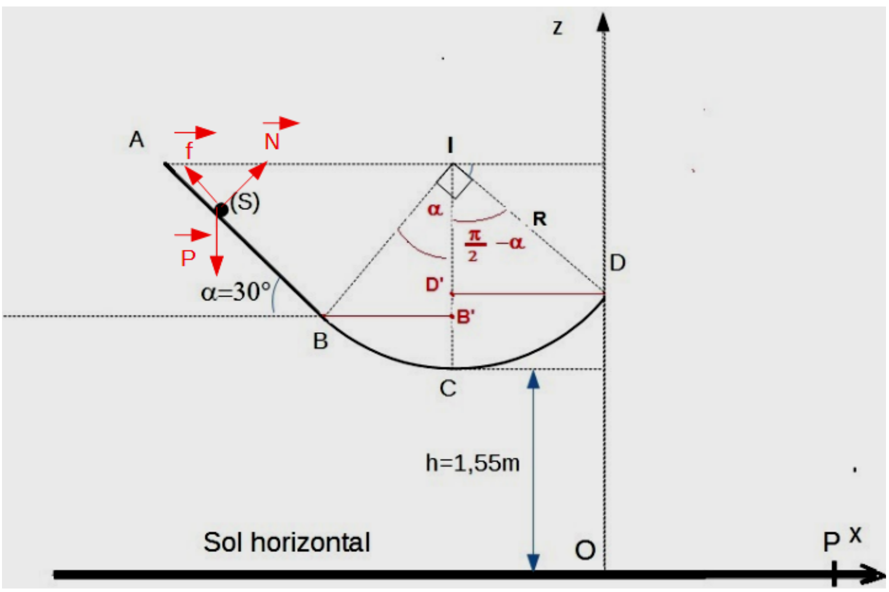
b) En déduire l'intensité de la force $\vec{f}$.

a) Travail de la force de frottement :

$$W_{\vec{f}}(A\rightarrow D)=-f.AB-f.R.\alpha-f.R.\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-f\left(AB+R.\frac{\pi}{2}\right)(1)$$

Compte tenu des hypothèses de l'énoncé , il est possible de l'évaluer par l'intermédiaire du travail du poids. $W_{\vec{P}}=mg(z_A-z_D)$

Le travail du poids de A en D ne dépend pas du chemin suivi, il ne dépend que des hauteurs initiales et finales et le travail du poids est positif (travail moteur) car $z_A>z_D$



z_D=1,55+D'C=1,55+0,5=2,05m et z_A=1,55+R=1,55+0,9=2,45m

$$\mathbf{W}_{\vec{P}} = 0{,}05.10.(2{,}45-2{,}05) = 0{,}20\ \mathbf{J}$$

-Le travail de la réaction normale est nul entre A et D.

-Le travail de la force de frottement est négatif (travail résistant).

-La vitesse initiale en A étant nulle ainsi que celle en D ,la variation d'énergie cinétique entre ces 2 points est nulle comme la somme des travaux des forces(poids +force de frottement) .

$$\mathbf{W}_{\vec{P}}(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{D}) + \mathbf{W}_{\vec{f}}(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{D}) = 0$$

Soit ,numériquement: $\mathbf{W}_{\mathbf{f}} = -\mathbf{W}_{\mathbf{P}} = -0{,}2\,\mathbf{J}$

b) utilisons l'expression (1) pour calculer f:

$$W_{\vec{f}}(A \rightarrow D) = -f\left(AB + R.\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = -0{,}2\ J$$

$$f = \frac{0{,}2}{AB + R.\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{0{,}2}{1{,}6 + 0{,}9.\frac{\pi}{2}} = 0{,}066\,N$$