Fonctions numériques réelles : généralités

1. Définitions :

On appelle fonction numérique réelle toute application f d'une partie D de R dans R. L'ensemble D est appelé ensemble de définition de f. D est donc l'ensemble des réels x tels que f(x) existe.

Exemples : Soient P et Q deux polynômes

- Si $f(x) = P(x); \quad D = IR$
- Si $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}; \quad D = \{x \in R / Q(x) \neq 0\}$
- Si $f(x) = \sqrt{\dfrac{P(x)}{Q(x)}}; \quad D = \left\{x \in R / \dfrac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \ \ et \ \ Q(x) \neq 0\right\}$
- Si $f(x) = \dfrac{\sqrt{P(x)}}{\sqrt{Q(x)}}; \quad D = \{x \in R / P(x) \geq 0 \ , \ Q(x) > 0\}$
- Si $f(x) = \sqrt{P(x)} + \sqrt{Q(x)}; \quad D = \{x \in R / P(x) \geq 0 \ et \ Q(x) \geq 0\}$
-

2. Opérations sur les fonctions

Soient f et g deux fonctions. On définit les fonctions $f + g \ ; \ f \cdot g \ ; \ \dfrac{f}{g} \ ; et \ \ fog$ par :

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- $\dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$
- $fog(x) = f[g(x)]$

3. Courbe représentative d'une fonction

L'ensemble des points M (x ; y) du plan rapporté à un repère $(O; i \ , j)$, tels que $x \in D_f$ et y = f(x) est appelé courbe représentative de f.

On le note en général $(C_f) \ ou \ (C)$. Ainsi

$$C_f = \{M(x; y) / x \in D_f \ \ et \ \ y = f(x) \ \} = \{M\,(x, f(x) / x \in D_f\}$$

Exemple : Soit $f(x) = x - \sqrt{x}$ et (C) la courbe représentative de f.

$$D_f = \{x \in IR / x > 0\} = [\,0 \ ; +\infty\,[$$

Considérons les points **M_1(0 ; 0), M_2(1 ; 2), M_3(-1 ; 0)**

- $f(1) = 0$ donc $M_1 \in (C)$
- $f(1) \neq 2$ donc $M_2 \notin (C)$
- $-1 \notin D_f$ donc $M_3 \notin (C)$

La relation y= f (x) est appelée équation de la courbe (C) dans le repère $(O; i, j)$.

4. Parité

Une fonction f est paire si quel que soit $x \in D_f$, on a $-x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$

La courbe représentative de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

f est dite impaire si quel que soit $x \in D_f$, $-x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$

La courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine O du repère

5. Symétrie :

Soient M(x ; y), M' (x' ; y') deux points du plan. M et M' sont symétriques par rapport à la droite d'équation $x = a$ si et seulement si $y = y'$ et $x + x' = 2a$, donc si $y = y'$ et $x' = 2a - x$

La courbe représentative (C_f) d'une fonction f est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = a$ si et seulement si quel que soit $M(x; y) \in (C_f)$, son symétrique $M'(2a - x; y)$ appartient aussi à (C_f)

Comme $M \in (C_f)$, on a $y = f(x)$, donc $y = f(2a - x)$ pour tout $x \in D_f$

Ainsi : (C_f) est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = a$ si et seulement si quel que soit $x \in D_f$, $f(2a - x) = f(x)$

En remplaçant x par x+a, l'égalité s'écrit $f(a - x) = f(a + x)$

Cas particulier :

Si $a = 0$, on a $f(-x) = f(x)$, donc la fonction paire et (ζ) est symétrique, par rapport à l'axe des ordonnées (droite d'équation x=0)

Considérons deux points M(x ; y), M' (x' ; y') et un point S(a ;b)

M et M' sont symétriques par rapport à S (a , b) si et seulement si . $\overrightarrow{MS} = \overrightarrow{SM}$'

M et M' sont donc symétriques par rapport à S(a,b) à si et seulement si $\begin{pmatrix} a-x \\ b-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'-a \\ y'-b \end{pmatrix}$

Donc si et seulement si $\begin{cases} \boldsymbol{a-x=x'-a} \\ \boldsymbol{b-y=y'=b} \end{cases}$, ou $\begin{cases} \boldsymbol{x'=2a-x} \\ \boldsymbol{y'=2b-y} \end{cases}$

La courbe représentative d'une fonction f est donc symétrique par rapport à S(a,b) si quel que soit M(x,y) de cette courbe, son symétrique M'(x' ;y') appartient aussi à la courbe.

Donc si $M \in (\zeta_f)$ alors $M' \in (\zeta_f)$

C'est-à-dire si $\begin{cases} y = f(x) \\ x \in D_f \end{cases}$ alors $\begin{cases} y' = f(x') \\ x' \in D_f \end{cases}$

Or $y' = 2b - y \;\; et \;\; x' = 2a - x$

$y' = f(x') \Leftrightarrow 2b - y = f(2a - x)$

Comme y = f(x), on a,

(ζ_f) est symétrique par rapport à S(a,b), si et seulement si quel que soit $x \in D_f$, $(2a-x) \in D_f$ et $f(2a-x) + f(x) = 2b$

En remplacent x par a+x, cette égalité s'écrit : $\boldsymbol{f(a-x) + f(a+x) = 2b}$

Si a = b = 0, $S \equiv 0$, on a une fonction impaire.

6. Périodicité

Une fonction f est dite périodique s'il existe un réel p tel que quel que soit $x \in D_f$, $(x+p) \in D_f$ et $f(x+p) = f(x)$. Le plus petit réel p strictement positif vérifiant cette propriété est appelé la période de la fonction f.

On a, quel que soit $k \in \mathbb{Z}$, $f(x+kp) = f(x)$

Si on a une courbe représentative de f dans un intervalle de longueur p toute la courbe est obtenue par translation de vecteur . $k.p.\vec{i}$

7. Variation d'une fonction :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, on appelle taux de variation de f entre x et x' de I, le réel $\tau_{xx'} = \dfrac{f(x) - f(x')}{x - x'}$

On dit que f est **croissante** (respectivement strictement croissante) sur I si quels que soient x et x' de I tels que $x < x'$, *on a* $f(x) \leq f(x')$ (respectivement $f(x) < f(x')$)

f est croissante sur I, si et seulement si quels que soient x et x' de I

$\tau_{xx'} \geq 0$ $(\textit{strictement croissante si } \tau_{xx'} > 0)$

f est dite décroissante sur I (respectivement strictement décroissante sur I) si et seulement quels que soient x et x' de I tels que $x < x'$ *on a* $f(x) \geq f(x')$ (respectivement $f(x) > f(x')$

f est décroissante si et seulement si quels que soient x et x' de I

$\tau_{xx'} \leq 0$ (strictement décroissante si $\tau_{xx'} < 0$)

f est dite monotone sur I si elle est soit décroissante sur I, soit croissante sur I.

Etudier les variations d'une fonction f, c'est subdiviser son domaine de définition, lorsque c'est possible, en un nombre fini d'intervalles sur chacun desquels f est monotone.

8. Extremum local (ou relatif) :

Soit f une fonction définie sur I et $x_0 \in I$. On dit que :

- f admet un minimum local en x_0 s'il existe un intervalle ouvert J contenu dans I et contenant x_0 tel que quel que soit $x \in J$, $f(x) \geq f(x_0)$
- f admet un maximum local en x_0 s'il existe un intervalle ouvert J contenu dans I et contenant x_0 tel que quel que soit $x \in J$, $f(x) \geq f(x_0)$

9. Changement de repère

On rappelle que l'équation d'une courbe (C) est la relation que vérifient les coordonnées des points de (C).

Soit (C) la courbe représentative d'une fonction f. $y = f(x)$ est donc l'équation de (C) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

Si M(x ;y) un point de (C), alors $y = f(x)$. Soient $\Omega(x_0;y_0)$, $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ (où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs non colinéaires) et soit $(X;Y)$ les coordonnées du point M dans le repère $(\Omega,\vec{u},\vec{v})$. Nous avons :

$$\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$$
$$\vec{v} = c\vec{i} + d\vec{j}$$
$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$$
$$\overrightarrow{\Omega M} = X\vec{i} + Y\vec{j}$$
$$\overrightarrow{O\Omega} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}$$
$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M} \quad (\textit{relation de Chasles})$$

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$$
$$x\vec{i} + y\vec{j} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + X\vec{u} + Y\vec{v}$$
$$x\vec{i} + y\vec{j} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + X(a\vec{i} + b\vec{j}) + Y(c\vec{i} + d\vec{j})$$
$$x\vec{i} + y\vec{j} = (x_0 + Xa + Yc)\vec{i} + (y_0 + Xb + Yd)\vec{j}$$

d'où $\begin{cases} x = x_0 + aX + cY \\ y = y_0 + bX + dY \end{cases}$ (formule de changement de repère)

Dans le cas où $\vec{u} = \vec{i}$ ou $\vec{v} = \vec{j}$ (c'est-à-dire a = 1, b = 0, c = 0, d = 1) les formules s'écrivent

$\begin{cases} x = x_0 + X \\ y = y_0 + Y \end{cases}$: On a seulement un changement d'origine ou translation d'axes.

Pour avoir l'équation de (C) dans le repère $(\Omega,\vec{u},\vec{v})$ on porte les expressions X et Y dans l'équation $y = f(x)$

Soit $Y = F(X)$ l'équation de (C) dans le repère $(\Omega,\vec{u},\vec{v})$

- Si F est paire l'axe des Y est un axe de symétrie et
- Si F est impaire, Ω est un centre de symétrie