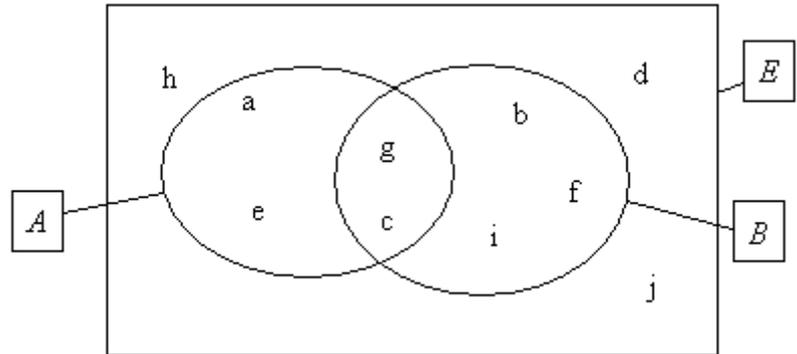


## Série 1 : Exercices sur le dénombrement

### Dénombrement des parties d'un ensemble fini

#### Exercice 1 :

On considère le diagramme ci-contre :



1. Énumérer les éléments de chacun des ensembles suivants et préciser leurs cardinaux respectifs :

- |                           |                          |                           |               |                          |
|---------------------------|--------------------------|---------------------------|---------------|--------------------------|
| a) E                      | b) A                     | c) B                      | d) $A \cap B$ | e) $A \cup B$            |
| f) $\bar{A}$              | g) $\bar{B}$             | h) $A - B$                | i) $B - A$    | j) $\overline{A \cup B}$ |
| k) $\bar{A} \cap \bar{B}$ | l) $\overline{A \cap B}$ | m) $\bar{A} \cup \bar{B}$ |               |                          |

2. Rappeler les formules donnant :

- |                            |                           |                         |
|----------------------------|---------------------------|-------------------------|
| a) $\text{Card}(A \cup B)$ | b) $\text{Card}(\bar{A})$ | c) $\text{Card}(A - B)$ |
|----------------------------|---------------------------|-------------------------|

#### Exercice 2 :

On désigne par E l'ensemble des nombres entiers naturels plus petits que 16 ; par I l'ensemble des nombres impairs de E ; par P l'ensemble des nombres pairs de E et par  $M_3$  l'ensemble des nombres multiples de 3 de E.

Représenter les quatre ensembles dans un même diagramme et y faire figurer tous les éléments de E.

#### Exercice 3 :

Dans une classe de 42 élèves, chaque élève pratiquent un ou deux sports collectifs :

- le volleyball
- le basket-ball
- les deux sports

Sachant que 27 élèves pratiquent le Volleyball et que 18 élèves pratiquent les 2 sports, combien d'élèves pratiquent le basket-ball ?

### Exercice 4 :

Les 50 élèves d'une classe de 1<sup>ère</sup> disposent de deux options culturelles, la musique et la peinture.

27 élèves pratiquent la musique ; 29 élèves pratiquent la peinture et 5 élèves ne pratiquent aucun des deux activités.

Chercher le nombre d'élèves qui pratiquent uniquement la musique, ceux qui pratiquent uniquement la peinture et ceux qui pratiquent les deux activités.

### Exercice 5 :

Dans une classe de première sont étudiées les langues vivantes suivantes : Anglais, Allemand et Espagnol. Chaque élève étudie au moins une langue.

5 élèves étudient les trois langues, 7 l'anglais et l'allemand, 8 l'anglais et l'espagnol, 9 l'allemand et l'espagnol. Enfin, 20 élèves étudient seulement l'anglais, 15 l'allemand et 18 l'espagnol.

1. Quel est l'effectif de cette classe ?
2. Représenter cette classe par un diagramme.

## Dénombrement d'Arrangements et de Permutations

### Exercice 1 :

Une permutation d'un ensemble fini  $E$  est une façon d'ordonner les éléments de  $E$ .

1. Donner deux permutations de chacun des ensembles suivants :

a)  $\{a, b\}$                       b)  $\{1, 2, 3\}$                       c)  $\{a, e, i, o, u\}$

2. Combien y-a-t-il de permutations d'un ensemble à :

a) 2 éléments ?                      b) 3 éléments ?                      c) 4 éléments ?                      d) 5 éléments ?                      e) 6 éléments ?

(On note  $n!$  (factorielle  $n$ ) le nombre de permutations d'un ensemble à  $n$  éléments)

### Exercice 2 :

1. De combien de façons différentes peut-on ranger cinq boules de couleurs différentes dans cinq cases alignées de telle sorte que chaque case ne contienne qu'une seule boule ?
2. Combien de sigles de cinq lettres différents peut-on former avec les lettres du mot « MATHS » ?
3. Combien y-a-t-il d'ordre d'arrivées possibles lors d'une course d'endurance à huit concurrents, si on suppose qu'il n'y a pas d'ex-æquo ?
4. De combien de façons différentes peut-on numéroter de 1 à 9 les neuf chaînes télévisées accessibles à Antananarivo ?

### Exercice 3 :

Un arrangement 3 à 3 des éléments d'un ensemble fini  $E$  est une façon d'ordonner 3 éléments distincts de  $E$ .

1. On pose  $E = \{a, b, c, d, e\}$ .
  - a) Donner trois arrangements 2 à 2 des éléments de  $E$ .
  - b) Donner trois arrangements 3 à 3 des éléments de  $E$ .
  - c) Donner trois arrangements 4 à 4 des éléments de  $E$ .
  - d) Donner trois arrangements 5 à 5 des éléments de  $E$ . Que remarque-t-on ?
  
2.
  - a) Combien y a-t-il d'arrangements 2 à 2 dans un ensemble à 3 éléments ?
  - b) Combien y a-t-il d'arrangements 2 à 2 dans un ensemble à 4 éléments ?
  - c) Combien y a-t-il d'arrangements 3 à 3 dans un ensemble à 4 éléments ?
  - d) Combien y a-t-il d'arrangements 4 à 4 dans un ensemble à 9 éléments ?
  - e) Combien y a-t-il d'arrangements  $p$  à  $p$  dans un ensemble à  $n$  éléments ?

### Exercice 4 :

1. On dispose de huit boules de couleurs différentes.

De combien de façons différentes peut-on remplir cinq cases alignées avec des boules ? Chaque case ne peut contenir qu'une seule boule.

2. Combien de mots de 5 lettres distincts peut-on former avec les lettres du mot « COMBIEN » ?
3. Combien y-a-t-il de résultats possibles au quinté, lors d'une course de chevaux à dix participants, si on suppose qu'il n'y a pas d'ex-æquo ?
4. De combien de façons différentes peut-on choisir un président, un vice-président, un secrétaire et un trésorier dans une classe de 40 élèves ?

### Exercice 5 :

Une combinaison 3 à 3 des éléments d'un ensemble fini  $E$  est une façon de grouper trois éléments distincts de  $E$ .

1. On considère l'ensemble  $E = \{a, b, c, d\}$ .
  - a) Énumérer tous les arrangements 3 à 3 des éléments de  $E$ . Combien y en a-t-il ?
  - b) Énumérer toutes les combinaisons 3 à 3 des éléments de  $E$ . Combien y en a-t-il ?
  
2. Soit la combinaison  $(a, c, d)$ 
  - a) Combien d'arrangements 3 à 3 peut-on former avec cette unique combinaison ?
  - b) Quelle relation lie le nombre d'arrangements 3 à 3 et le nombre de combinaisons 3 à 3 des éléments de  $E$  ?

3. Soit E un ensemble fini à n éléments, et soit  $p < n$ .
- Combien d'arrangements p à p peut-on former avec une seule combinaison p à p des éléments de E ?
  - Quelle relation lie le nombre  $A_n^p$  et le nombre  $C_p^n$ , nombres de combinaisons p à p des éléments de E ?
  - Montrer que  $C_p^n = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ .

### Exercice 6 :

- On dispose de huit boules identiques.

De combien de façons différentes peut-t-on remplir cinq cases alignées avec des boules ? Chaque case ne peut contenir qu'une seule boule.

- De combien de façons différentes peut-on choisir quatre représentants de la classe dans une classe de 40 élèves ?
- Combien de mains de treize cartes peut-on avoir dans un jeu de 32 cartes ?

### Exercice 7 :

A l'arrivée d'une course de chevaux, le quinté gagnant dans l'ordre est le 2 ; 7 ; 5 ; 9 ; 3.

- Combien y-a-t-il de quintés gagnants ?
- Combien y-a-t-il de quintés gagnants dans le désordre ?

### Exercice 8 :

Calculer les valeurs suivantes :

- |                                        |                          |                                    |
|----------------------------------------|--------------------------|------------------------------------|
| a) $A_8^3$                             | b) $C_3^7$               | c) $2! \times 3!$                  |
| d) $6!$                                | e) $A_{13}^3$            | f) $C_{12}^{15}$                   |
| g) $C_8^{13}$                          | h) $\frac{A_{12}^3}{4!}$ | i) $\frac{4! \times A_{10}^4}{8!}$ |
| j) $\frac{5! \times 4!}{6! \times 3!}$ | k) $\frac{19!}{17!}$     | l) $\frac{(n+1)!}{n!}$             |
| m) $\frac{(n+2)!}{n!}$                 | n) $C_1^{10}$            | o) $C_0^{15}$                      |

### Exercice 9 :

On dispose de sept jetons de couleurs différentes.

1. Combien de groupes de trois couleurs différentes peut-on former avec ces jetons ?
2. De combien de façons différentes peut-on numéroter ces jetons de 1 à 7 ?
3. On suppose maintenant que les sept jetons sont déjà numérotées de 1 à 7 et on veut s'en servir pour former un nombre.

Combien de nombres de trois chiffres distincts peut-on former avec ces jetons ?

### Exercice 10 :

Au terme d'une réunion particulièrement animée, les huit membres d'un conseil d'administration se serrent la main.

Combien de poignées de mains seront ainsi échangées ?

### Exercice 11 :

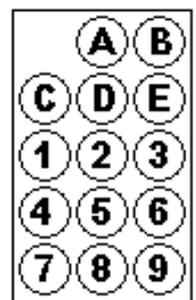
Un sac contient neuf boules rouges et sept boules vertes. On tire cinq boules.

1. Quel est le nombre de cas possibles ?
2. Déterminer le nombre de cas favorables à l'obtention de 5 boules de la même couleur.
3. Déterminer le nombre de cas favorables à l'obtention de 3 boules rouges et 2 boules vertes.
4. Déterminer le nombre de cas favorables à l'obtention de plus de boules vertes que de boules rouges.

### Exercice 12 :

La figure ci-contre représente un clavier de verrouillage pour un coffre.

1. Combien de codes de cinq caractères différents peuvent être utilisés par le propriétaire ?
2. Parmi ces codes, combien :
  - a) ne contiennent que des chiffres ?
  - b) ne contiennent que des lettres ?
  - c) commencent par deux lettres et ne contiennent que ces deux lettres ?
  - d) commencent par deux lettres ?
  - e) commencent par deux consonnes ?



### Exercice 13 :

Une urne contient quatre jetons blancs numérotés de 1 à 4 et six jetons noirs numérotés de 1 à 6. On tire simultanément 4 jetons de l'urne.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Déterminer le nombre de cas favorables à l'obtention de :
  - a) quatre jetons de la même couleur ;
  - b) autant de jetons blancs que de jetons noirs ;
  - c) plus de jetons blancs que de jetons noirs ;
  - d) plus de numéros pairs que de numéros impairs.

### Exercice 14 :

À l'oral d'un examen, un étudiant doit répondre à huit questions sur un total de dix.

1. Combien a-t-il de choix possibles de ces huit questions ?
2. Combien de choix a-t-il s'il doit répondre aux trois premières questions ?
3. Combien a-t-il de choix s'il doit répondre à au moins 4 des 5 premières questions ?

### Exercice 15 :

Les 25 marins d'un navire ont épuisé leurs vivres le soir du 13 février alors qu'ils étaient encore au beau milieu de l'océan. Ils décidèrent alors de choisir au hasard 7 marins pour être mangés afin d'assurer leurs survies pour la semaine du 14.

1. À combien de cas différents doivent ils s'attendre ?
2. Les sept malheureux ont été choisis, mais ils disputèrent encore de qui va être exécuté le lundi, le mardi,... De combien de façons différentes peuvent-ils s'organiser ?
3. Les sept jours se sont écoulés, et les 18 marins restants se sont encore égarés, puisque le seul qui savait lire la carte a déjà été exécuté. De combien de façons différentes peuvent-ils choisir les 7 prochains malheureux à exécuter successivement pendant les 7 prochains jours ?