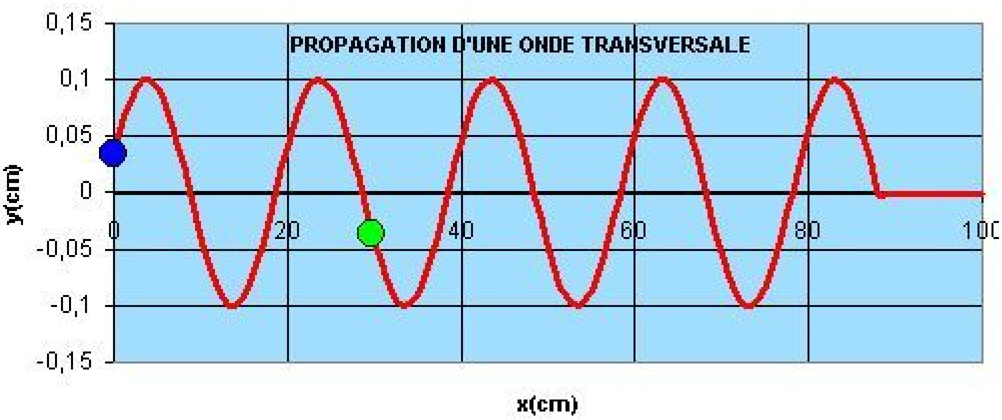
PROPAGATION D'UN MOUVEMENT VIBRATOIRE SINUSOÏDAL (ASPECT MATHÉMATIQUE)

1. POSITION DU PROBLÈME:

L'extrémité O (point bleu) d'une corde horizontale de longueur infinie est soumise à un mouvement vertical sinusoïdal entretenu de période T et d'amplitude a.

Une onde d'aspect sinusoïdal se propage à la célérité c le long de la corde.

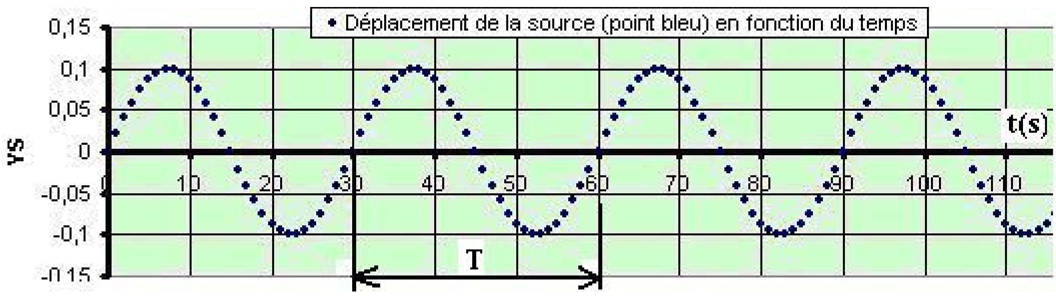


Le point O est pris comme origine des espaces, et le signal se propage le long de la corde **sans amortissement** vers la droite dans le sens des x>0.

Avec ces conventions recherchons l'équation générale y(x, t) dépendante du temps de tout point d'abscisse x de la corde

(Sur les documents d'illustration qui suivent, on a choisi: T=30s et a=0.1m, c=1cm/s)

2. ÉQUATION DU MOUVEMENT DE LA SOURCE:



L'équation générale dépendante du temps du mouvement du point O peut s'écrire :

$$y_0 = a.\sin\left(2\pi\frac{t}{T}+\Phi\right) = a.\sin(\omega t + \Phi)$$

ω.est**pulsation**du mouvement sinusoïdal.

Le terme entre parenthèse s'appelle la **phase** et le terme «ϕ» la **phase à l'origine ; c**ette dernière dépend des conditions initiales.

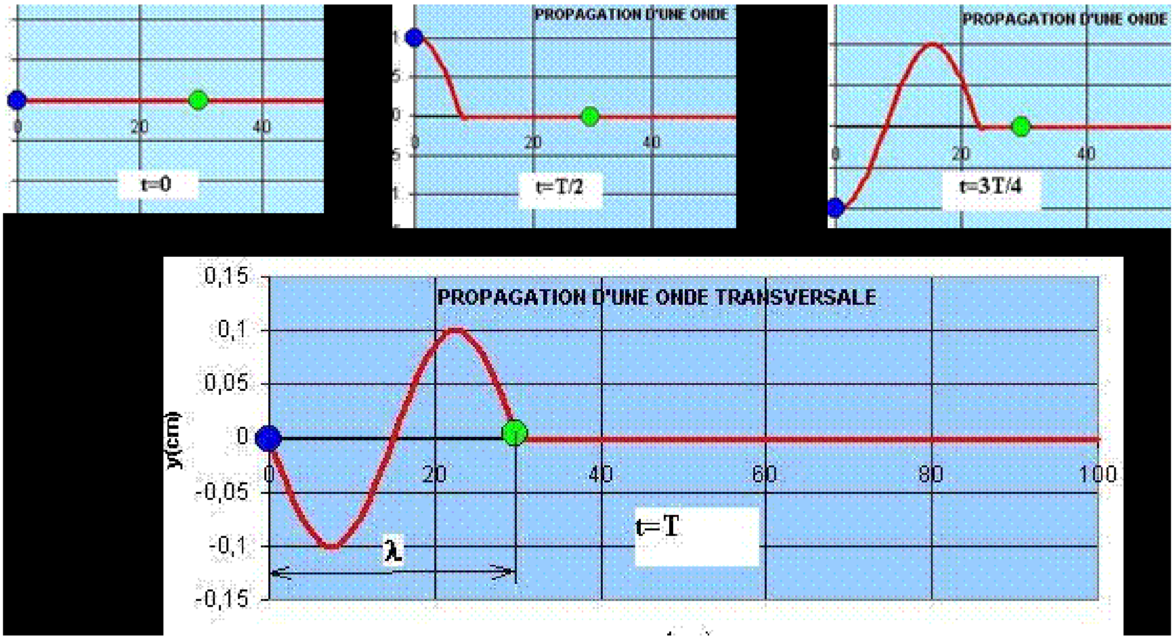
Or sur la courbe ci-dessus : à t=0 y0=0 et donc ϕ=0ou π;

Mais à t=0, le point O se déplace vers le haut et donc : v0=(Δy/Δt)o=a*2π/T.cosΦ0

Et donc seule la solution Φ=0 convient. Nous retirons ce symbole de la formule.

3. DÉFINITION DE LA LONGUEUR D'ONDE:

Décomposons le mouvement de la source depuis l'instant initial t=0, jusque t=T…..Le temps que le point O retrouve sa position qu'il avait à la date t=0,il s'est écoulé une période T et pendant ce temps l'onde s'est propagée d'une longueur d'onde(voir figure ci-dessous).



La longueur d'onde **_est la distance parcourue par l'onde pendant une période T._**

Sachant que l'onde se propage à la célérité c=, on a donc la relation suivante entre λ et T :

$$c = \frac{x}{t} = \frac{\lambda}{T} \quad \text{soit } \lambda = cT$$

Sur la figure ci-dessus c=1cm/s et donc λ =1cm/s*30s=30cm

4. RETARD DE LA VIBRATION EN M (POINT VERT)PAR RAPPORT À CELLE EN O (POINT BLEU):

Tous les points du milieu vibrent avec la même période T mais avec un retard proportionnel à leur distance à la source.

$$\theta = \frac{xM}{c}$$

Ce retard est égal à la durée de propagation de l'onde se propageant de O en M.

L'équation du mouvement de M distant de xM est donc :

$y(t,x_M) = y_0(t-\theta) = a.\sin[\ 2\pi\frac{t}{T}(t-\frac{xM}{c})\ ]$

On pose souvent :

k = $2\frac{\pi}{\lambda}$ pulsation spatiale on peut montrer également que k = $\frac{\omega}{c}$

Pour tout point d'abscisse x, l'équation devient :

$$y(t,x) = a.\sin(\omega t - kx)$$

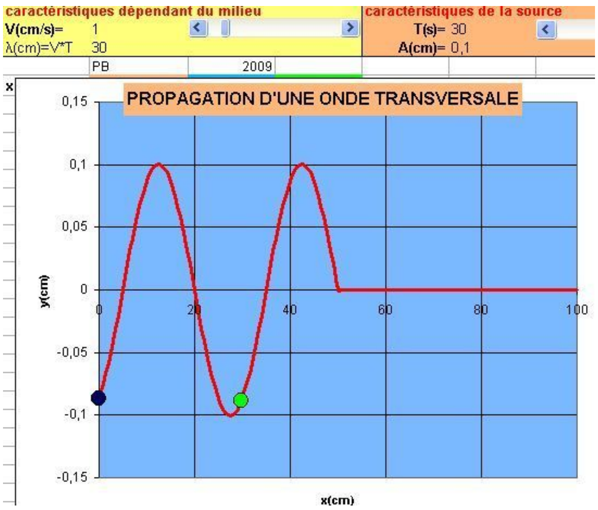
5. DOUBLE PÉRIODICITÉ DE L'ONDE SINUSOÏDALE:

5.1 «sinusoïde des espaces»:

Réalisons une photographie de l'onde à la date t1=50s.
L'onde s'est alors propagée de c.t1= 50.1=50cm.
L'équation de la courbe donnant l'aspect de la corde à cette date s'écrit:

$$y(50,x) = a.\sin(\ 2\frac{\pi}{30}50-2\frac{\pi}{\lambda}x\ )$$

C'est une sinusoïde de **période spatiale λ** ou « sinusoïde des espaces »



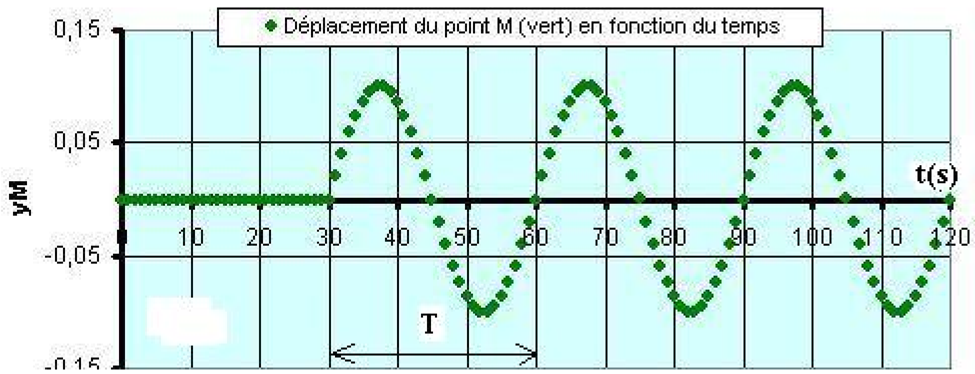
Remarque : cette sinusoïde n'est définie que si x <ct1=50cm; au-delà de cette valeur, y=0 car les points de la corde ne sont pas encore atteint par l'onde.

5.2 «sinusoïdes des temps»:

Fixons la variable x, soit x=xM=30cm, l'équation devient :

$$y(t,x_M) = a.\sin(\ 2\frac{\pi}{T}t-2\frac{\pi}{\lambda}xM\ ) = a.\sin(\ 2\frac{\pi}{T}t-2\frac{\pi}{30}.30\ ) = a.\sin(\ 2\frac{\pi}{T}t\ )$$

Courbe périodique dépendante du temps **de période T.**
A chaque point de la corde est associé une telle sinusoïde



Remarque : cette sinusoïde commence à la date t = $\frac{xM}{c} = \frac{30}{1}$ =30s lorsque l'onde atteint le point M.

L'équation de l'onde écrite plus haut traduit bien mathématiquement la double périodicité de l'onde.

5.3 Remarques pédagogiques:

Une animation est proposée pour une meilleure compréhension du phénomène, pour y accéder, cliquer sur le lien suivant :

2-onde sinusoïdale (animation excel)

Pour éviter les confusions entre les deux types de description (spatiale et temporelle), il est recommandé de ne pas prendre de mouvement vibratoire sinusoïdal (au moins lors d'une première étude).
Prendre par un exemple un signal triangulaire dissymétrique. Les courbes spatiales et temporelles ont alors des aspects différents ce qui évite de les confondre (voir exercice proposé dans la médiathèque).

Ondes:description spatiale et temporelle:exercice