MANUEL LIBRE

Ce manuel est publié sous licence libre « CC by SA ».
Le texte intégral est disponible à l'adresse :
http:/creativecommons.org/licenses/by-sa/2.0/fr/legalcode

ENSEIGNEMENT SPÉCIFIQUE

MATHS T^erm S

STATISTIQUES PROBABILITÉS • ALGÈBRE ANALYSE • GÉOMÉTRIE

Delphine ARNAUD
Lycée Dominique Savio, Douala

Bruno CASAVECCHIA
Lycée Dominique Savio, Douala

Jérémy COUTEAU
Lycée Jean Perrin, Rezé

Éric FANDOHAN
Lycée Jean-Baptiste de La Salle, Lyon

Pascale FRADELIZI
Lycée Grandmont, Tours

Loïc GROBOL
Lycée en Forêt, Montargis

Béatrice NADIN
Lycée Camille Claudel, Blois

Mathieu PRADEL
Lycée Léon Blum, Créteil

Delphine TURBOULT
Lycée Alain, Le Vésinet

Frédéric WEYERMANN
Lycée Léon Blum, Créteil

Environnement numérique et
relectures réalisés par l'association Sésamath

MAGNARD

SOMMAIRE

STATISTIQUES ET PROBABILITÉS

PICTOGRAMMES ET INDICATIONS

19	Exercice corrigé en fin de manuel
INFO	Exercice avec l'ordinateur
CALC	Exercice avec la calculatrice
ALGO	Exercice d'algorithmique
ROC	Restitution organisée des connaissances

TRAVAILLER UN CHAPITRE

Manuel et **manuel numérique**, deux outils complémentaires

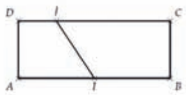
1 VÉRIFIER SES PRÉREQUIS

1. Réalisez le test de début de chapitre.

Auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

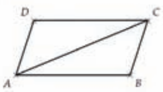
1 Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB = 4$ et $AD = 1,5$. Soit I le milieu de $[AB]$ et J le point tel que $4\overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{DC}$.



Calculer les produits scalaires suivants :

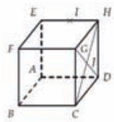
1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{JI}$
3) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{JI}$
4) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{JI}$

2 Soit $ABCD$ un parallélogramme tel que $AB = 4$, $AD = 2$ et $AC = 5$.



1) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.
2) a) En déduire aussi que la mesure de l'angle $\widehat{BAD}$, au dixième de degré près.
b) En remarquant que $BD^2 = \overrightarrow{BD}^2$, en déduire que $BD = \sqrt{15}$.

3 On considère un cube $ABCDEFGH$ de côté 1. Soient I le milieu de $[EH]$ et J le centre de la face $CDHG$.



1) Donner les coordonnées du point G dans le repère :
a) $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$
b) $(C\,;\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CG})$
c) $(H\,;\overrightarrow{HE}, \overrightarrow{HD}, \overrightarrow{HG})$
d) $(F\,;\overrightarrow{FB}, \overrightarrow{FG}, \overrightarrow{FE})$
2) Même question avec le point B.
3) Même question avec le point J.

Voir solutions p. 151

2. Vérifiez vos réponses en fin de manuel.

Chapitre G3

Produit scalaire dans l'espace et applications

Auto-évaluation

1 1) 16 2) 4 3) -2.25 4) $-1,75$

2 1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2\right) = \frac{1}{2}(5^2 - 4^2 - 2^2) = \frac{5}{2}$

2 APPRENDRE UNE LEÇON

1. Apprenez les définitions et les propriétés.

2. Refaites les exercices corrigés des méthodes du cours.

Renvoi

MÉTHODE 6 Utiliser les théorèmes de comparaison et des gendarmes ► Ex. 62 p. 33

Pour calculer une limite de suite, on peut essayer de trouver une inégalité (respectivement un encadrement) sur le terme général de la suite et appliquer le théorème de comparaison (respectivement des gendarmes).

Exercice d'application Déterminer :

1) $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 - (-1)^n$
2) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sin(n^2)}{n}$

Correction

1) On a $(-1)^n \leqslant 1$ donc $-(-1)^n \geqslant -1$ puis $n^2 - (-1)^n \geqslant n^2 - 1$.
De plus, $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 - 1 = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 - (-1)^n = +\infty$ par le théorème de comparaison.

2) On encadre le sinus : $-1 \leqslant \sin(n^2) \leqslant 1$ puis on en déduit que $-\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{\sin(n^2)}{n} \leqslant \dfrac{1}{n}$.
De plus, $\lim\limits_{n \to +\infty} -\dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sin(n^2)}{n} = 0$ par le théorème des gendarmes.

3. Faites l'exercice d'entraînement lié à la méthode.

62 ► MÉTHODE 6 p. 23

Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\cos(n)}{n^2}$
2) $\lim\limits_{n \to +\infty} n^3 + 3\sin(n)$

4. Vérifiez vos réponses en fin de manuel

62 1) Par encadrements successifs, on a
$-\dfrac{1}{n^2} \leqslant \dfrac{\cos(n)}{n^2} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.
De plus $\lim\limits_{n \to +\infty} -\dfrac{1}{n^2} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$ donc
$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\cos(n)}{n^2} = 0$ par le théorème des gendarmes.

3 S'ENTRAÎNER POUR LE BAC

1. Repérez les éléments importants de la consigne, comme les verbes d'action à l'infinitif.

2. Vérifiez votre compréhension du vocabulaire.
→ utilisez le lexique à la fin du manuel ou sur le manuel numérique.

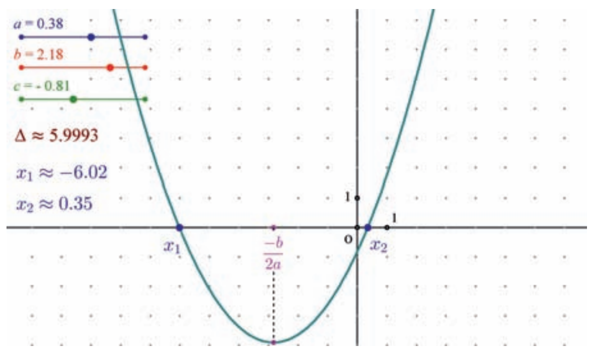
3. Réalisez un schéma si nécessaire ou utilisez un tableur, une calculatrice, un logiciel de géométrie dynamique…

53 Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x + e^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = e^x - e^{-x}.$$

1) a) Étudier la parité de f.
b) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
c) Déterminer les variations de f.
2) Reprendre la question 1 avec la fonction g.
3) Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer $(f(a))^2 - (g(a))^2$.
4) Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Exprimer $f(a)g(b) + g(a)f(b)$ en fonction de $g(a+b)$.

4. Réalisez les parcours pédagogiques personnalisés (J3P) pour vous entraîner et éventuellement approfondir les notions étudiées.



4 PRÉPARER LE BAC

1. Faites les exercices d'activités mentales.
Sans difficultés calculatoires, ils permettent de vérifier que les raisonnements sont compris.

2. Vérifiez vos réponses en fin de manuel.

3. Réalisez le QCM de fin de chapitre.

4. Vérifiez vos réponses en fin de manuel.

5. Consultez les compléments proposés dans le manuel numérique.

QCM d'auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

Pour chaque question, plusieurs réponses sont proposées. Déterminer celles qui sont correctes.

106 On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 0,5u_n + 0,5 \end{cases}$.
La propriété « $u_n \geqslant 0,75$ » est :
a) initialisée pour $n = 1$ b) héréditaire pour $n \geqslant 1$ c) vraie pour tout $n \geqslant 1$

107 La propriété « $2^n \geqslant n + 3$ » est :
a) initialisée pour $n = 0$ b) héréditaire pour $n \geqslant 0$ c) vraie pour tout $n \geqslant 3$

108 La suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = 3v_n + 1 \end{cases}$ est :
a) décroissante b) minorée c) géométrique

109 La suite (w_n) de terme général $w_n = \dfrac{8n+5}{2n+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est :
a) minorée par 0 b) minorée par 2,5 c) majorée 4 d) bornée

110 Si une suite est décroissante et minorée par 4, alors elle est :
a) majorée b) minorée par 5 c) minorée par 3

111 Soit une suite (u_n) qui converge vers 2.
Pour le(s)quel(s) des intervalles suivants, peut-on affirmer qu'il existe un rang à partir duquel tous les termes lui appartiennent ?
a) $[0\,;+\infty[$ b) $]-\infty\,;2]$ c) $]-1\,;1[$ d) $]1{,}999\,99\,;2{,}000\,01[$

112 Soit une suite (v_n) qui diverge vers $-\infty$.
Pour le(s)quel(s) des intervalles suivants, peut-on affirmer qu'il existe un rang à partir duquel tous les termes lui appartiennent ?
a) $[0\,;+\infty[$ b) $]-\infty\,;2]$ c) $]-1\,;1[$ d) $]1{,}999\,99\,;2{,}000\,01[$

MÉTHODES DE L'ANNÉE

Analyse

Géométrie

Statistiques et probabilités

Récurrence et suites

Connaissances nécessaires à ce chapitre

- Calculer les termes d'une suite
- Connaître les propriétés des suites arithmétiques et des suites géométriques
- Étudier le sens de variation d'une suite
- Calculer une somme de termes d'une suite arithmétique ou géométrique

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

Auto-évaluation

1 Soit la suite numérique (u_n) définie par récurrence par $u_0 = 2$ et $u_n = 2u_{n-1} + 3$ pour tout $n \geqslant 1$.

1) Calculer u_1, u_2 et u_3.

2) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2 Soit la suite numérique (v_n) définie par récurrence par $v_0 = 3$ et $v_{n+1} = v_n + 3n + 4$ pour tout $n \geqslant 0$.

1) Calculer v_1, v_2 et v_3.

2) Exprimer v_n en fonction de v_{n-1} pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3 Donner le terme général de :

1) la suite arithmétique (x_n) de premier terme $x_0 = 4$ et de raison -2 ;

2) la suite géométrique (y_n) de premier terme $y_1 = 2$ et de raison $\frac{1}{3}$.

4 (u_n) et (v_n) sont deux suites arithmétiques.

1) a) Que vaut u_{96} sachant que $u_0 = 3$ et que la raison de (u_n) est $\frac{1}{4}$?

b) À partir de quel rang a-t-on $u_n > 100$?

2) a) Quelle est la raison de la suite (v_n) sachant que $v_3 = 6$ et $v_8 = -5$?

b) En déduire v_{1000}.

5 Dans chacun des cas suivants, dire si la suite (u_n) est géométrique.

1) $u_n = 3 + 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

2) $u_n = 5 \times 4^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

3) $u_n = 3^{n-2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

4) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 7u_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

6 Calculer les sommes suivantes :

1) $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 149 + 150$

2) $1 + 3 + 9 + 27 + \cdots + 3^{10}$

3) $\sum\limits_{k=0}^{n} 5^k$

4) $\sum\limits_{k=0}^{n} (7k + 2)$

7 Étudier le sens de variation de la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

1) $u_n = 5 - 4^n$

2) $u_n = 5n^2 + 4$

3) $u_{n+1} = u_n + n + 1$ et $u_0 = 1$

4) $u_n = 3 \times 2^{n+1}$

5) $u_n = (-1)^n \times n$

8 Écrire u_{n+1} et u_{n-1} en fonction de n pour la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

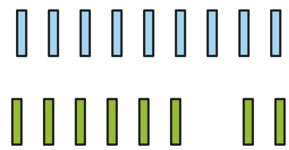
1) $u_n = 5n - 3$ **2)** $u_n = \dfrac{1 - 3^n}{n + 1}$ **3)** $u_n = 9^{n+3}$

Voir solutions p. 419

Activités d'approche

DÉBAT 1 Dominos, quand l'un tombe...

Catalina et Farid ont chacun disposé des dominos en rangée, respectivement en bleu et en vert, comme ci-contre (en vue de côté). Les deux affirment « si je fais tomber le premier domino, tous les autres tomberont ».
Discuter cette affirmation dans chacun des cas.



ACTIVITÉ 2 Dépassera, dépassera pas ?

INFO CALC

Hugo et Léa aiment bien se défier sur des petits jeux : Hugo demande à Léa de choisir un nombre entre 1 000 et 2 000 et Léa choisit le nombre 1 200. Hugo lui dit :

- Tu prends sa moitié puis tu lui ajoutes 5 160.
- Tu reprends la moitié du résultat obtenu puis tu ajoutes de nouveau 5 160.
- Tu peux continuer ainsi autant de fois que tu veux, je suis sûr que tu ne dépasseras jamais 11 000 !

Léa commence ses calculs. Après quelques étapes, elle dit : « C'est étrange. Quand je vois les premiers nombres que j'obtiens, j'imagine que je vais dépasser 11 000. Je ne te crois pas ! ».

1) a) À l'aide d'un tableur ou de la calculatrice, déterminer les premiers nombres obtenus par Léa après quelques étapes.

b) Que peut-on penser de l'affirmation d'Hugo ?

c) Le tableur permet-il d'affirmer qu'elle est toujours vraie, quel que soit le nombre d'étapes que fera Léa ?

On modélise la situation à l'aide de la suite (u_n) donnant le nombre obtenu après n étapes, de sorte que $u_0 = 1\,200$.

2) a) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

b) Pour justifier correctement l'affirmation d'Hugo, il faut procéder de « proche en proche » : on dit que l'on fait un **raisonnement par récurrence**.

i) Traduire l'affirmation de Hugo par une relation sur u_n.

ii) L'affirmation d'Hugo est-elle vraie pour $n = 0$? On dit que la propriété est **initialisée**.

iii) Soit n un entier naturel. Supposons que $u_n \leqslant 11\,000$.
Montrer qu'alors le terme suivant u_{n+1} est lui aussi inférieur à 11 000.
On vient de montrer que la propriété est **héréditaire**, c'est-à-dire que si elle est vraie à un rang alors elle est également vraie au rang suivant (elle se transmet au rang suivant).

iv) Sans calcul, justifier que $u_1 \leqslant 11\,000$ puis $u_2 \leqslant 11\,000$ puis $u_3 \leqslant 11\,000$, etc.

> Le **principe de récurrence** permet d'affirmer que si une propriété est initialisée et héréditaire alors cette propriété est vraie pour tout n à partir du rang de l'initialisation.
> Comme c'est le cas ici (à partir de $n = 0$), on peut affirmer que :
>
> $$u_n \leqslant 11\,000 \textbf{ pour tout } \mathbf{n} \geqslant \mathbf{0}.$$

3) La propriété reste-t-elle vraie si Léa choisit 1 600 comme valeur de départ ?

4) Supposons qu'on ne tienne plus compte des contraintes du premier nombre et qu'on choisisse 15 000 comme nombre de départ. La propriété reste-t-elle vraie dans ce cas ?

ACTIVITÉ 3 Vers l'infini...

INFO ALGO

On considère les suites (x_n), (y_n) et (z_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $x_n = n^2$, $y_n = \dfrac{4n+3}{2n+1}$ et $z_n = (-3)^n$.

1) a) Tabuler ces trois suites à l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice :

	A	B	C	D
1	n	Xn	Yn	Zn
2	0	0	3	1

b) Comment semblent se comporter ces suites lorsque n tend vers $+\infty$?

2) On considère les trois algorithmes ci-dessous.

Programme 1

```
Liste des variables utilisées
n : entier naturel
A, x : réels
Entrées
Saisir A
Affecter à n la valeur 0
Affecter à x la valeur 0
Traitement
Tant que x⩽A faire
    Affecter à n la valeur n + 1
    Affecter à x la valeur n^2
Fin tant que
Sortie
Afficher n
```

Programme 2

```
Liste des variables utilisées
n : entier naturel
A, y : réels
Entrées
Saisir A
Affecter à n la valeur 0
Affecter à y la valeur 3
Traitement
Tant que y⩽A faire
    Affecter à n la valeur n + 1
    Affecter à y la valeur (4n+3)/(2n+1)
Fin tant que
Sortie
Afficher n
```

Programme 3

```
Liste des variables utilisées
n : entier naturel
A, z : réels
Entrées
Saisir A
Affecter à n la valeur 0
Affecter à z la valeur 1
Traitement
Tant que z⩽A faire
    Affecter à n la valeur n + 1
    Affecter à z la valeur (−3)^n
Fin tant que
Sortie
Afficher n
```

a) Pour $A = 10$, dire pour chacun des programmes s'il s'arrête ou non.
Si oui, donner son affichage à l'aide de la question **1a**, si non, justifier qu'il ne s'arrête pas.

b) Même question pour $A = 10\,000$.

3) Laquelle des définitions ci-dessous est correcte ?

> On dit qu'une suite (u_n) a pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ lorsque, quel que soit le réel A, on a $u_n > A$ à partir d'un certain rang.

> On dit qu'une suite (u_n) a pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ lorsque, quel que soit le réel A, on a $u_n > A$ pour un certain rang.

« quel que soit le réel A » doit se comprendre « quel que soit A, aussi grand que l'on veut ».

4) En s'inspirant de la question précédente, proposer une définition de $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

ACTIVITÉ 4 Convergence vers 2

INFO

1) Tabuler la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2 + \dfrac{1}{n+1}$ avec le tableur.

2) a) Donner un rang à partir duquel il semble que l'écart entre le nombre réel 2 et les termes de la suite soit strictement inférieur à 0,01.

b) Même question avec 0,000 01.

3) a) Soit $r > 0$. Montrer que $u_n \in]2-r\,;\,2+r[$ pour tout entier n supérieur à $\dfrac{1}{r} - 1$.

b) Que vient-on de montrer ?

ACTIVITÉ 5 Une suite qui n'a vraiment aucune limite

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Représenter graphiquement les 10 premiers termes de cette suite dans un repère.

2) Quelle conjecture peut-on faire sur la limite éventuelle de cette suite ?

3) Nous allons montrer que (u_n) ne diverge pas vers $+\infty$, ne diverge pas vers $-\infty$ et ne converge vers aucun réel.

a) Trouver un nombre A tel que $u_n \leqslant A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Que vient-on de montrer ?

b) Montrer de même que (u_n) ne diverge pas vers $-\infty$.

c) Dans cette question, on va montrer que (u_n) ne converge vers aucun réel $\ell \leqslant 0$.
Soit donc ℓ un réel tel que $\ell \leqslant 0$.

i) Placer ℓ sur l'axe des ordonnées et y matérialiser l'intervalle $I = \left]-\infty\,;\,\dfrac{1}{2}\right[$ (en rouge).

ii) Justifier que l'on ne peut pas trouver un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont dans I.

On vient de montrer que (u_n) ne converge vers aucun réel négatif.

d) Soit ℓ' un réel tel que $\ell' > 0$.

i) Placer ℓ' sur l'axe des ordonnées et y matérialiser l'intervalle $I' = \left]-\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$ (en bleu).

ii) Justifier que l'on ne peut pas trouver un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont dans I'.

iii) Que peut-on en déduire en terme de limite de (u_n) ?

4) Conclure.

DÉBAT 6 En pleine indétermination

Soit (u_n) et (v_n) deux suites.

Dire lesquelles de ces propositions sont fausses. Donner un contre-exemple pour chacune de celles-ci.

- **Proposition 1 :** Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = +\infty$.
- **Proposition 2 :** Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n = 0$.
- **Proposition 3 :** Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$.
- **Proposition 4 :** Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = -1$.

Voir exercice 61 page 32 pour la (ou les) démonstration(s) de la (ou des) proposition(s) vraie(s).

ACTIVITÉ 7 Gendarmes et comparaison

Partie A : Théorème des gendarmes

On considère la suite (a_n) définie pour tout $n \geqslant 1$ par $a_n = 1 + \dfrac{\sin(n)}{n^2}$ dont on souhaite déterminer la limite.

1) Peut-on déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$ à l'aide des théorèmes d'opérations et des suites de référence ?

2) Montrer que $1 - \dfrac{1}{n^2} \leqslant a_n \leqslant 1 + \dfrac{1}{n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3) **Vers un théorème**

a) Dans un repère, placer un réel ℓ sur l'axe (Oy) et tracer la droite d'équation $y = \ell$.

b) Représenter graphiquement deux suites (u_n) et (w_n) qui convergent vers ℓ et telles que que $u_n \leqslant w_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) Représenter graphiquement une suite (v_n) telle que $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d) Que peut-on penser de la limite éventuelle de la suite (v_n) ?

4) En admettant la propriété observée à la question **3d**, déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$.

Partie B : Théorème de comparaison

On considère la suite (b_n) définie pour tout $n \geqslant 1$ par $b_n = n + \dfrac{\sin(n)}{n^2}$.

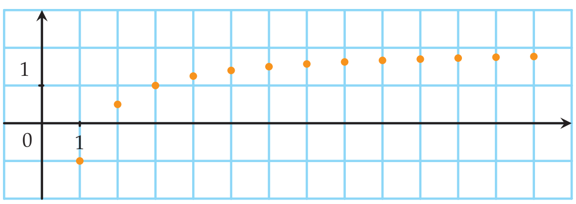
1) Justifier que $b_n \geqslant n - \dfrac{1}{n^2}$ pour tout $n \geqslant 1$.

2) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} n - \dfrac{1}{n^2}$. Que peut-on alors penser de $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n$?

3) Expliquer la différence avec la méthode de la partie **A** .

DÉBAT 8 À la suite de quoi ?

Dans un exercice sur les suites, Tom est pris d'un doute et demande à sa professeure :
« Madame, si une suite est strictement croissante alors elle tend vers $+\infty$? ».
Sa professeure représente au tableau une suite de la manière suivante :



Tom lui demande : « Quelle est l'expression de cette suite ? ».
La professeure lui répond : « $u_n = 2 - \dfrac{3}{n}$ pour $n \geqslant 1$ ».

1) Justifier que la suite donnée par la professeure est un contre-exemple de l'affirmation de Tom.

2) Parmi les quatre affirmations ci-dessous, une seule est vraie. Laquelle ?
Pour éliminer les trois autres, on donnera un contre-exemple.

- A : « Si une suite est majorée alors elle converge » ;
- B : « Si une suite est croissante et non majorée alors elle tend vers $+\infty$ » ;
- C : « Si une suite tend vers $+\infty$ alors elle est croissante » ;
- D : « Si une suite n'est pas majorée alors elle tend vers $+\infty$ ».

Dans tout ce chapitre, les suites considérées sont des suites numériques réelles.

1. Démontrer par récurrence

MÉTHODE 1 Démontrer par récurrence une propriété

► Ex. 16 p. 26

La **démonstration par récurrence** est un type de démonstration utilisé pour démontrer qu'une propriété est vraie pour des entiers positifs à partir d'un rang donné n_0.
Pour démontrer par récurrence qu'une propriété est vraie pour tout entier positif $n \geqslant n_0$, on procède par étapes :

- On énonce la propriété à démontrer.
- **Initialisation** : on vérifie que la propriété est vraie pour $n = n_0$.
- **Hérédité** : on vérifie que si l'on suppose que la propriété est vraie à un rang $n \geqslant n_0$ (c'est ce que l'on appelle l'**hypothèse de récurrence**) alors la propriété est vraie au rang $n+1$ (le rang suivant n).
- Conclusion : la propriété est vraie pour $n = n_0$ et elle est héréditaire ; donc par récurrence elle est vraie pour tout $n \geqslant n_0$.

Exercice d'application

Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 4$ et $v_{n+1} = 2v_n - 7$ pour tout entier naturel n.
Démontrer par récurrence que $v_n = 7 - 3 \times 2^n$ pour tout $n \geqslant 0$.

Correction On veut montrer que $v_n = 7 - 3 \times 2^n$ pour tout $n \geqslant 0$.

- On considère la propriété : « $v_n = 7 - 3 \times 2^n$ ».
- Initialisation : Pour $n = 0$, on a $v_0 = 4$ et $7 - 3 \times 2^0 = 4$.
  On a donc bien $v_0 = 7 - 3 \times 2^0$: la propriété est vraie pour $n = 0$.
- Hérédité : On va montrer que si la propriété est vraie à un certain rang $n \geqslant 0$ alors elle est vraie au rang $n+1$.
  Supposons donc que $v_n = 7 - 3 \times 2^n$ (on suppose la propriété vraie pour n : c'est l'hypothèse de récurrence), on a alors :
  $$\begin{aligned} 2v_n &= 2\left(7 - 3 \times 2^n\right) \text{ (par l'hypothèse de récurrence)} \\ 2v_n - 7 &= 2\left(7 - 3 \times 2^n\right) - 7 \\ 2v_n - 7 &= 14 - 3 \times 2^{n+1} - 7 \\ v_{n+1} &= 7 - 3 \times 2^{n+1}. \end{aligned}$$
  On a donc bien $v_{n+1} = 7 - 3 \times 2^{n+1}$, c'est-à-dire que la propriété est vraie au rang $n+1$.
- Conclusion : La propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire ; donc par récurrence elle est vraie pour tout $n \geqslant 0$ c'est-à-dire que $v_n = 7 - 3 \times 2^n$ pour tout $n \geqslant 0$.

Remarques :

- Attention à bien repérer la valeur du rang de l'initialisation n_0.
- Dans l'hérédité, on aurait aussi pu dire que $v_{n+1} = 2v_n - 7 = 2\left(7 - 3 \times 2^n\right) - 7$ $= 7 - 3 \times 2^{n+1}$.
- Il faut bien s'assurer que la propriété est initialisée **et** héréditaire : une propriété fausse peut être initialisée mais pas héréditaire ou héréditaire mais pas initialisée (voir exercices 4 et 5 page 25).

Rappel : Dire qu'une propriété est vraie au rang $n+1$, c'est vérifier qu'elle est vraie quand on remplace n par $n+1$ (dans la pratique, quand on traite l'hérédité, on écrit toujours la propriété au rang $n+1$ au brouillon pour savoir « où l'on va »).

Exemples

- Soit la propriété au rang n : « $u_n \geqslant 3$ ». La propriété au rang $n+1$ est « $u_{n+1} \geqslant 3$ ».
- Soit la propriété au rang n : « $u_n \leqslant n^2$ ». La propriété au rang $n+1$ est « $u_{n+1} \leqslant (n+1)^2$ ».
- Soit la propriété au rang n : « $u_{n+1} \geqslant 2u_n$ ». La propriété au rang $n+1$ est « $u_{n+2} \geqslant 2u_{n+1}$ ».
- Soit la propriété au rang n : « $4^n - 1$ est un multiple de 3 ». La propriété au rang $n+1$ est « $4^{n+1} - 1$ est un multiple de 3 ».

MÉTHODE 2 Étudier le sens de variation d'une suite par récurrence

► Ex. 27 p. 27

- On peut montrer qu'une suite est croissante en montrant par récurrence que $u_{n+1} \geqslant u_n$ pour tout n.
- On peut montrer qu'une suite est décroissante en montrant par récurrence que $u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout n.

Toutes les méthodes vues en Première ne permettaient pas de prouver le sens de variation de certaines suites. Cette méthode vient donc en complément de celles-ci.

Exercice d'application

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3$ pour tout entier naturel n.
Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

Correction On veut montrer que $u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout $n \geqslant 0$.

- On considère la propriété : « $u_{n+1} \leqslant u_n$ ».
- Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 5$ et $u_1 = \frac{1}{5}u_0 + 3 = 4$.
  On a donc bien $u_1 \leqslant u_0$: la propriété est vraie pour $n = 0$.
- Hérédité : On va montrer que si la propriété est vraie à un certain rang $n \geqslant 0$ alors elle est vraie au rang $n+1$.
  Supposons que $u_{n+1} \leqslant u_n$ (hypothèse de récurrence), on a alors :
  $$\begin{aligned} \frac{1}{5}u_{n+1} &\leqslant \frac{1}{5}u_n \\ \frac{1}{5}u_{n+1} + 3 &\leqslant \frac{1}{5}u_n + 3 \\ u_{n+2} &\leqslant u_{n+1}. \end{aligned}$$
  On a donc bien $u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$ c'est-à-dire que la propriété est vraie au rang $n+1$.
- Conclusion : La propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire ; donc par récurrence elle est vraie pour tout $n \geqslant 0$ c'est-à-dire que $u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On vient de montrer que la suite (u_n) est décroissante.

Remarque : Dans cet exemple avec une suite définie par récurrence, les méthodes de Première S ne permettaient pas de justifier les variations. Il faut donc connaître toutes ces méthodes pour choisir judicieusement celle qui correspond le mieux à chaque situation (pour retravailler les autres méthodes, voir le chapitre A6 du manuel de Première S).

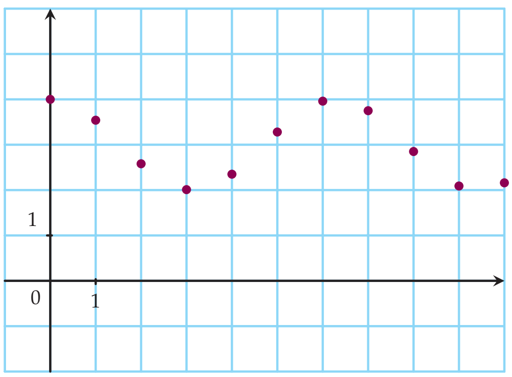
2. Suites minorées, majorées, bornées

DÉFINITIONS

- On dit qu'une suite (u_n) est **majorée** par un nombre réel M si $u_n \leqslant M$ pour tout n.
  M est alors un **majorant** de la suite (u_n).
- On dit qu'une suite (u_n) est **minorée** par un nombre réel m si $m \leqslant u_n$ pour tout n.
  m est alors un **minorant** de la suite (u_n).
- Si une suite (u_n) est à la fois majorée et minorée, on dit que (u_n) est **bornée**.

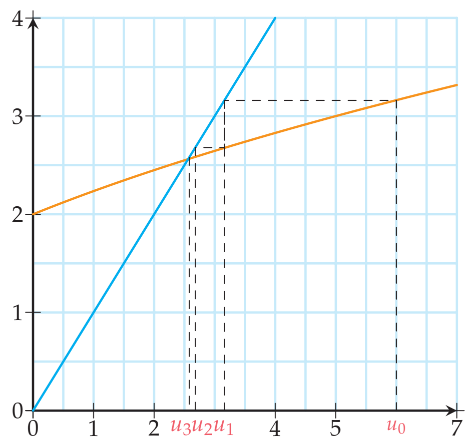
Exemples

- On considère la suite (w_n) définie pour tout entier $n \geqslant 0$ par $w_n = 3 + \cos(n)$ dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.



Cette suite semble bornée par 2 et 4. Pour le justifier, on utilise un encadrement du cosinus : pour tout entier naturel n, on a $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$ donc $2 \leqslant 3 + \cos(n) \leqslant 4$ c'est-à-dire que pour tout entier naturel n, on a $2 \leqslant w_n \leqslant 4$. La suite (w_n) est bien bornée car elle est minorée par 2 et majorée par 4.

- On considère (r_n) la suite définie par $r_0 = 6$ et $r_{n+1} = \sqrt{r_n + 4}$ pour tout entier naturel n dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.



On peut observer graphiquement (sur l'axe des abscisses) que cette suite semble bornée par 2 et 6.
C'est en effet le cas : une démonstration est proposée dans la question 4 de la méthode 3.

Remarques :

- Quand une suite numérique réelle est majorée, il n'y a pas qu'un seul majorant.
  Par exemple, si une suite est majorée par 4 alors elle est aussi majorée par 5.
- Un majorant ou un minorant est un nombre fixé qui ne dépend pas de la variable n.

PROPRIÉTÉ

- Une suite (u_n) croissante est minorée par son premier terme.
  En effet $u_0 \leqslant u_1 \leqslant u_2 \leqslant \cdots \leqslant u_n \leqslant \cdots$.
- Une suite (u_n) décroissante est majorée par son premier terme.
  En effet $u_0 \geqslant u_1 \geqslant u_2 \geqslant \cdots \geqslant u_n \geqslant \cdots$.

MÉTHODE 3 Montrer qu'une suite est minorée, majorée, bornée

► Ex. 34 p. 28

Pour déterminer ou justifier l'existence de minorants ou de majorants d'une suite, plusieurs méthodes peuvent être utilisées parmi lesquelles :

- l'utilisation de majorations, de minorations ou d'encadrements évidents ;
- l'utilisation des variations de f dans le cas $u_n = f(n)$;
- l'étude du signe de la différence entre les termes de la suite et le majorant ou le minorant éventuel ;
- l'utilisation d'une démonstration par récurrence.

Exercice d'application

1) Donner un minorant de la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant 0$ par $u_n = 5 + 2n\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

2) Donner un majorant de la suite (s_n) définie pour tout entier $n \geqslant 0$ par $s_n = -2n^2 + 8n + 3$.

3) Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{6n+2}{2n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est majorée par 3.

4) Soit (r_n) la suite définie par $r_0 = 6$ et $r_{n+1} = \sqrt{r_n + 4}$ pour tout entier naturel n.
Montrer par récurrence que $2 \leqslant r_n \leqslant 6$ pour tout entier $n \geqslant 0$. Que peut-on en déduire ?

Correction

1) Comme $n \geqslant 0$ on en déduit que, pour tout entier naturel n, on a $2n\left(\frac{1}{3}\right)^n \geqslant 0$ puis que $5 + 2n\left(\frac{1}{3}\right)^n \geqslant 5$ c'est-à-dire que $u_n \geqslant 5$ pour tout entier naturel n : la suite (u_n) est donc bien minorée par 5.

2) On a $s_n = f(n)$ avec f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 8x + 3$.
Comme $-2 < 0$, f atteint son maximum en $-\dfrac{8}{2 \times (-2)} = 2$, qui est alors $f(2) = 11$.
On en déduit que la suite (s_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $s_n = f(n)$ est majorée par 11.

3) Pour $n \geqslant 0$, on calcule la différence entre v_n et 3 :

$$v_n - 3 = \frac{6n+2}{2n+1} - 3 = \frac{6n+2}{2n+1} - \frac{3(2n+1)}{2n+1} = \frac{6n+2-6n-3}{2n+1} = \frac{-1}{2n+1}.$$

Or comme $n \geqslant 0$, on en déduit que $2n+1 > 0$ et donc que $\dfrac{-1}{2n+1} < 0$.
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n - 3 < 0$, c'est-à-dire $v_n < 3$: la suite (v_n) est majorée par 3.

4) On veut montrer que $2 \leqslant r_n \leqslant 6$ pour tout $n \geqslant 0$.

- On considère la propriété : « $2 \leqslant r_n \leqslant 6$ ».
- Initialisation : Pour $n = 0$, on a $r_0 = 6$ donc $2 \leqslant r_0 \leqslant 6$: la propriété est vraie pour $n = 0$.
- Hérédité : On va montrer que si la propriété est vraie à un certain rang $n \geqslant 0$ alors elle est vraie au rang $n+1$.
  Supposons donc que $2 \leqslant r_n \leqslant 6$ (hypothèse de récurrence), on a alors :

$$\begin{array}{ccccccl} 6 & \leqslant & r_n + 4 & \leqslant & 10 & & \\ \sqrt{6} & \leqslant & \sqrt{r_n+4} & \leqslant & \sqrt{10} & & \text{car la fonction racine carrée est croissante sur } [0\,;\,+\infty[\\ 2 & \leqslant & \sqrt{r_n+4} & \leqslant & 6 & & \text{car } 2 \leqslant \sqrt{6} \text{ et } \sqrt{10} \leqslant 6 \\ 2 & \leqslant & r_{n+1} & \leqslant & 6. & & \end{array}$$

  On a donc bien $2 \leqslant r_{n+1} \leqslant 6$ c'est-à-dire que la propriété est vraie au rang $n+1$.
- Conclusion : La propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire ; donc par récurrence elle est vraie pour tout $n \geqslant 0$ c'est-à-dire $2 \leqslant r_n \leqslant 6$ pour tout $n \geqslant 0$.

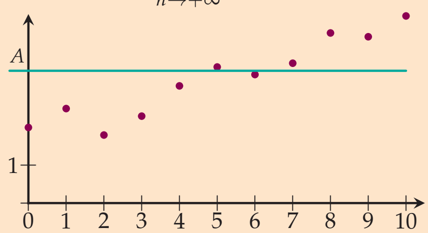
On vient de montrer que la suite (r_n) est bornée par 2 et 6.

3. Limites de suites

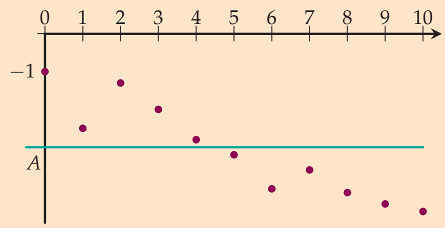
A. Définitions et limites usuelles

DÉFINITIONS

- On dit qu'une suite (u_n) a pour **limite** $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ lorsque, quel que soit le réel A, on a $u_n > A$ à partir d'un certain rang.
  On note alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.



- On dit qu'une suite (u_n) a pour **limite** $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ lorsque, quel que soit le réel A, on a $u_n < A$ à partir d'un certain rang.
  On note alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.



Remarques :

- Concrètement, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ veut dire que l'on peut rendre u_n aussi grand que l'on veut en prenant n suffisamment grand.
- L'expression « à partir d'un certain rang » peut se traduire par « pour tout $n \geqslant n_0$ » où n_0 est un entier fixé.
- Dans les démonstrations, on utilisera parfois la **troncature à l'unité d'un nombre positif** x notée $E(x)$ et appelée **partie entière** de x. Par exemple : $E(7{,}362) = 7$, $E(\pi) = 3$, etc. Notons que pour $x \geqslant 0$, $E(x) + 1$ est le plus petit entier strictement supérieur à x.

Exemple

Montrer que la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \sqrt{n}$ a pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

Correction Soit A un réel.

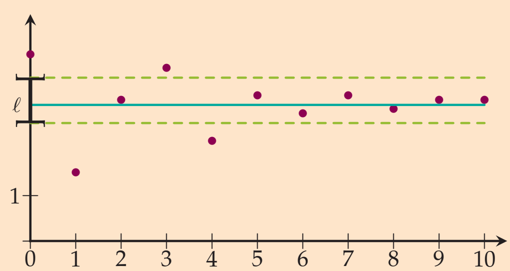
- Si $A < 0$ alors $u_n = \sqrt{n} > A$ quel que soit le rang $n \in \mathbb{N}$.
- Si $A \geqslant 0$ alors $u_n = \sqrt{n} > A$ pour tout $n > A^2$ donc à partir du rang $E\left(A^2\right) + 1$.

Ainsi, quel que soit le réel A, on a $u_n > A$ à partir d'un certain rang : on vient de montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$.

Remarque : Sans perte de généralité, on peut uniquement considérer le cas où $A \geqslant 0$ pour justifier que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ (et $A \leqslant 0$ dans le cas où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$).

DÉFINITION

Soit ℓ un réel.
On dit qu'une suite (u_n) a pour **limite** ℓ quand n tend vers $+\infty$ lorsque, quel que soit l'intervalle ouvert I contenant ℓ, I contient toutes les valeurs de (u_n) à partir d'un certain rang.
On note alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ et la suite (u_n) est dite **convergente** (vers ℓ).



REMARQUES :

- Une suite convergente n'admet qu'**une seule limite** (voir exercice **102** page 42).
- Une suite non convergente est **divergente** : elle peut soit diverger vers $+\infty$, soit diverger vers $-\infty$, soit ne pas avoir de limite, comme la suite de terme général $(-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (voir activité 5 page 12).

Exemple

Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1$.

Correction

Soit I un intervalle ouvert contenant 1 : un tel intervalle est de la forme $]1-r, 1+r'[$ avec $r > 0$ et $r' > 0$.

Il s'agit donc de montrer que l'on a $1 - r < \dfrac{n+1}{n} < 1 + r'$, c'est-à-dire $1 - r - \dfrac{n+1}{n} < 0$ **et** $1 + r' - \dfrac{n+1}{n} > 0$, à partir d'un certain rang.

- $1 - r - \dfrac{n+1}{n} = \dfrac{n - nr - n - 1}{n} = \dfrac{-nr-1}{n} < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ car $r > 0$ et $n > 0$.
- $1 + r' - \dfrac{n+1}{n} = \dfrac{n + nr' - n - 1}{n} = \dfrac{nr'-1}{n}$ est du signe de $nr' - 1$ car $n > 0$.

  Résolvons donc $nr' - 1 > 0 \Leftrightarrow nr' > 1 \Leftrightarrow n > \dfrac{1}{r'}$ car $r' > 0$: on vient de montrer que $1 + r' - \dfrac{n+1}{n} > 0$ pour tout $n > \dfrac{1}{r'}$ donc à partir du rang $E\left(\dfrac{1}{r'}\right) + 1$.

On vient de montrer que, quel que soit l'intervalle ouvert I contenant 1, on a $\dfrac{n+1}{n} \in I$ à partir d'un certain rang : autrement dit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1$.

REMARQUE : Nous verrons dans les parties suivantes des méthodes plus simples pour justifier une limite.

PROPRIÉTÉS

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$, $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$, $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$, $\lim\limits_{n \to +\infty} n^3 = +\infty$ et, plus généralement, $\lim\limits_{n \to +\infty} n^k = +\infty$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^3} = 0$ et, plus généralement, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.
- La suite de terme général q^n converge vers 0 si $-1 < q < 1$, diverge vers $+\infty$ si $q > 1$, n'a pas de limite si $q \leqslant -1$.

PREUVE

- Soit $A \in \mathbb{R}$.

  On a montré dans un exemple précédent que $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ donc que $\sqrt{n} > A$ à partir d'un certain rang.

  Comme, par ailleurs, on a $n^k \geqslant \sqrt{n}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on déduit que $n^k > A$ à partir d'un certain rang quel que soit A : on vient de montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} n^k = +\infty$.
- Les limites de $\dfrac{1}{\sqrt{n}}, \dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n^2}$, etc. se déduiront des propriétés données à la partie suivante.
- Voir le théorème de comparaison à la partie **C** pour le cas $q > 1$, l'activité 5 page 12 pour le cas $q = -1$ et l'exercice **91** page 40 pour les cas $-1 < q < 1$ et $q < -1$.

B. Opérations sur les limites

PROPRIÉTÉS

Soit ℓ et ℓ' deux nombres réels, $\pm\infty$ veut dire $+\infty$ ou $-\infty$.

Somme de limites :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	$-\infty$

Produit de limites :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n$	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$\pm\infty$	F.I.

Quotient de limites :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0^+ ou 0^-	0^+ ou 0^-	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$\pm\infty$	F.I.	$\pm\infty$	$\pm\infty$	F.I.

REMARQUES :

- Quelques démonstrations de ces propriétés sont présentées à l'exercice **61** page 32.
- Ces règles doivent se comprendre autant que s'apprendre : quand on ajoute une grande quantité à une autre grande quantité, on obtient une grande quantité. Intuitivement, cela explique que si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = +\infty$.
- Le « F.I. » présent dans ces tableaux veut dire **Forme Indéterminée** et signifie que l'on ne peut pas conclure.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0^+$ (respectivement 0^-) signifie que (v_n) converge vers 0 et que $v_n > 0$ (respectivement $v_n < 0$) à partir d'un certain rang.
- Dans les cas où le résultat est $\pm\infty$, on conclut en utilisant la règle des signes.
  Par exemple, si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n = -\infty$ car, à partir d'un certain rang, $u_n > 0$ et $v_n < 0$ donc $u_n \times v_n < 0$.
- En remarquant que $u_n - v_n = u_n + (-v_n)$, on peut déduire les propriétés sur les différences de limites.
- En pratique, ce sont ces propriétés que l'on utilisera (plutôt que la définition) pour calculer des limites.

Exemple Montrer la propriété du cours $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ en utilisant les propriétés d'opérations sur les limites.
En prérequis, on considérera connue la propriété $\lim\limits_{n\to+\infty} n^k = +\infty$.

Correction

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^k = +\infty$ donc, par quotient de limites (3e colonne), $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$.

MÉTHODE 4 Utiliser les propriétés d'opérations sur les limites

▶ Ex. 47 p. 30

Pour calculer une limite de suite, on peut décomposer le terme général de cette suite en somme(s), différence(s), produit(s) ou quotient(s) de termes de limite connue.

Exercice d'application Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} 4n^2 - \dfrac{1}{n} + 3^n$.

Correction

- $\lim\limits_{n\to+\infty} 4 = 4$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 4n^2 = +\infty$ par produit de limites
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$ car $3 > 1$

Par somme et différence de limites, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} 4n^2 - \dfrac{1}{n} + 3^n = +\infty$.

Remarque : On peut aussi présenter les calculs comme suit :

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} 4 = 4\\ \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty\end{array}\right\} \lim\limits_{n\to+\infty} 4n^2 = +\infty\\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0\\ \lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty\end{array}\right\} \lim\limits_{n\to+\infty} 4n^2 - \dfrac{1}{n} + 3^n = +\infty.$$

MÉTHODE 5 Lever une indétermination

▶ Ex. 49 p. 30

Quand le terme général d'une suite est sous forme polynomiale ou rationnelle, on peut lever une éventuelle indétermination en factorisant par le terme n^k ayant le degré le plus élevé (pour le numérateur et pour le dénominateur dans le cas d'une forme rationnelle).

Exercice d'application Calculer :

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} -2n^2 + n$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n^3+3}{5n^4+8n^2-n}$

Correction

1) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} -2n^2 = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, on est en présence d'une forme indéterminée.

Pour lever cette indétermination, on factorise par n^2 : $-2n^2 + n = n^2\left(-2+\dfrac{1}{n}\right)$ puis

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty\\ \lim\limits_{n\to+\infty} -2+\dfrac{1}{n} = -2\end{array}\right\} \lim\limits_{n\to+\infty} n^2\left(-2+\dfrac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} -2n^2+n = -\infty.$$

2) C'est une forme indéterminée donc on factorise le numérateur par n^3 et le dénominateur par n^4 : $\dfrac{2n^3+3}{5n^4+8n^2-n} = \dfrac{n^3\left(2+\dfrac{3}{n^3}\right)}{n^4\left(5+\dfrac{8}{n^2}-\dfrac{1}{n^3}\right)} = \dfrac{1}{n}\,\dfrac{2+\dfrac{3}{n^3}}{5+\dfrac{8}{n^2}-\dfrac{1}{n^3}}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0\\ \lim\limits_{n\to+\infty} 2+\dfrac{3}{n^3} = 2\\ \lim\limits_{n\to+\infty} 5+\dfrac{8}{n^2}-\dfrac{1}{n^3} = 5\end{array}\right\} \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\,\dfrac{2+\dfrac{3}{n^3}}{5+\dfrac{8}{n^2}-\dfrac{1}{n^3}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n^3+3}{5n^4+8n^2-n} = 0.$$

Remarque : On peut aussi utiliser la règle « du plus haut degré » (voir 52 et 53 page 31).

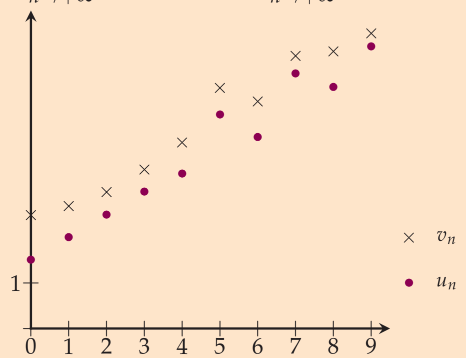
C. Théorèmes de comparaison et des gendarmes

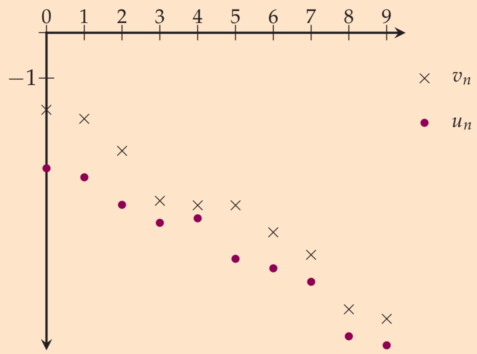
THÉORÈME : De comparaison

ROC

Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang.

- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.
- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.



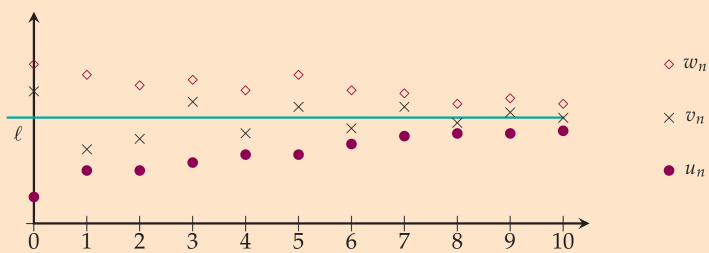


PREUVE

- Soit A un réel, comme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, on sait que $u_n > A$ à partir d'un certain rang. D'autre part, on sait que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang donc $v_n \geqslant u_n > A$ à partir d'un certain rang quel que soit A : on vient de montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.
- Le deuxième point peut se démontrer de façon analogue.

THÉORÈME : Des gendarmes

Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ à partir d'un certain rang.
Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell$.



Bien qu'un peu technique, proposons une démonstration de ce théorème.

PREUVE Soit $I =]a\,;\,b[$ un intervalle ouvert contenant ℓ.

- Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$, tous les termes de (u_n) sont dans I à partir d'un certain rang n_1.
- Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \ell$, tous les termes de (w_n) sont dans I à partir d'un certain rang n_2.
- Par énoncé, il existe un rang n_3 à partir duquel $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.

Posons $n_4 = \max(n_1; n_2; n_3)$ le plus grand des trois nombres n_1, n_2 et n_3.

Pour tout $n \geqslant n_4$, on a $\begin{cases} u_n \in I \\ w_n \in I \\ u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \end{cases}$ donc $a < u_n \leqslant v_n \leqslant w_n < b$ d'où $v_n \in I$.

On vient de montrer que, quel que soit l'intervalle ouvert I contenant ℓ, il existe un rang à partir duquel tous les termes de (v_n) sont dans I, c'est-à-dire que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell$.

MÉTHODE 6 Utiliser les théorèmes de comparaison et des gendarmes

► Ex. 62 p. 33

Pour calculer une limite de suite, on peut essayer de trouver une inégalité (respectivement un encadrement) sur le terme général de la suite et appliquer le théorème de comparaison (respectivement des gendarmes).

Exercice d'application Déterminer :

1) $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 - (-1)^n$

2) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sin\left(n^2\right)}{n}$

Correction

1) On a $(-1)^n \leqslant 1$ donc $-(-1)^n \geqslant -1$ puis $n^2 - (-1)^n \geqslant n^2 - 1$.
De plus, $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 - 1 = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 - (-1)^n = +\infty$ par le théorème de comparaison.

2) On encadre le sinus : $-1 \leqslant \sin\left(n^2\right) \leqslant 1$ puis on en déduit que $-\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{\sin\left(n^2\right)}{n} \leqslant \dfrac{1}{n}$.
De plus, $\lim\limits_{n \to +\infty} -\dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sin\left(n^2\right)}{n} = 0$ par le théorème des gendarmes.

Remarques :

- Dans le premier point de la méthode, on peut d'abord encadrer $n^2 - (-1)^n$ au brouillon en utilisant $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$ puis ne garder que l'inégalité utile pour utiliser le théorème de comparaison.
- D'une manière générale, quand le terme général d'une suite fait apparaître un cosinus, un sinus ou $(-1)^n$, on commence par les encadrer par -1 et 1 (on ne conservera éventuellement qu'un membre de l'encadrement si on applique le théorème de comparaison).

PROPRIÉTÉ : Inégalité de Bernoulli et limite de q^n

ROC

Soit $a > 0$. L'inégalité $(1+a)^n \geqslant 1 + na$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Il en résulte que $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$ pour $q > 1$.

PREUVE Commençons par montrer par récurrence que, pour $a > 0$, on a $(1+a)^n \geqslant 1 + na$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- On considère la propriété : « $(1+a)^n \geqslant 1 + na$ ».
- Initialisation : Pour $n = 0$, on a $(1+a)^0 = 1$ et $1 + 0 \times a = 1$ donc $(1+a)^0 \geqslant 1 + 0 \times a$: la propriété est vraie pour $n = 0$.
- Hérédité : On va montrer que si la propriété est vraie à un certain rang $n \geqslant 0$ alors elle est vraie au rang $n+1$. Supposons donc que $(1+a)^n \geqslant 1 + na$.
  En multipliant les deux membres de l'inégalité par le réel $1 + a > 0$, on obtient :
  $(1+a)^{n+1} = (1+a)^n \times (1+a) \geqslant (1+na)(1+a)$.
  De plus, $(1+na)(1+a) = 1 + a + na + na^2 = 1 + (n+1)a + na^2 \geqslant 1 + (n+1)a$ puisque $na^2 \geqslant 0$.
  On a donc bien $(1+a)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)a$: la propriété est vraie au rang $n+1$.
- La propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire donc par récurrence elle est vraie pour tout $n \geqslant 0$ c'est-à-dire que $(1+a)^n \geqslant 1 + na$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour $q > 1$, en posant $q - 1 = a > 0$, on obtient $q = 1 + a$ avec $a > 0$ donc on peut appliquer la propriété démontrée juste avant : $q^n = (1+a)^n \geqslant 1 + na$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
De plus, $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + an = +\infty$ puisque $a > 0$: on déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$ par comparaison.

D. Convergence des suites majorées croissantes et minorées décroissantes

THÉORÈME : De convergence des suites monotones

ROC

- Une suite croissante et majorée converge.
- Une suite décroissante et minorée converge.
- Une suite croissante (respectivement décroissante) non majorée (respectivement non minorée) diverge vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$).

PREUVE

- Les deux premiers points sont admis.
- Soit (u_n) une suite croissante non majorée et A un réel.
  Comme (u_n) est non majoré, il existe un rang n_0 tel que $u_{n_0} > A$.
  D'autre part, (u_n) est croissante donc $u_n \geqslant u_{n_0} > A$ pour $n \geqslant n_0$: on vient de montrer que, quel que soit A, il existe un rang à partir duquel $u_n > A$ autrement dit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Remarque : Ce théorème donne une condition suffisante pour qu'une suite converge mais ne donne pas la limite de cette suite.

MÉTHODE 7 Utiliser le théorème de convergence

► Ex. 71 p. 34

Exercice d'application Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire que (u_n) est convergente.

Correction On veut montrer que $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Considérons la propriété : « $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ ».
- Initialisation :
  Pour $n = 0$, on a $u_0 = 4$ et $u_1 = 2$ donc $1 \leqslant u_1 \leqslant u_0$: la propriété est vraie au rang 0.
- Hérédité : On va montrer que si la propriété est vraie à un certain rang $n \geqslant 0$ alors elle est vraie au rang $n+1$. Supposons donc que $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
  Comme la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$, on en déduit :
  $\sqrt{1} \leqslant \sqrt{u_{n+1}} \leqslant \sqrt{u_n}$ c'est-à-dire $1 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$: la propriété est vraie au rang $n+1$.
- La propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire donc $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

De $u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on déduit que (u_n) est décroissante et de $1 \leqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on déduit que (u_n) est minorée : (u_n) est décroissante et minorée, elle est convergente.

PROPRIÉTÉ :

ROC

Si une suite (u_n) est croissante et converge vers un réel ℓ alors elle est majorée par ℓ.

PREUVE Raisonnons par l'absurde : supposons que la suite ne soit pas majorée par ℓ c'est-à-dire qu'il existe un rang n_0 tel que $u_{n_0} > \ell$.
On considère alors l'intervalle $I =]-\infty\,; u_{n_0}[$.
Comme (u_n) est croissante, $u_n \geqslant u_{n_0}$ à partir du rang n_0 donc aucun terme de rang supérieur ou égal à n_0 n'appartient à l'intervalle ouvert I contenant ℓ : c'est une contradiction avec le fait que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.
Par l'absurde, la suite (u_n) est donc majorée par ℓ.

Remarque : De même, si une suite (u_n) est décroissante et converge vers un réel ℓ alors elle est minorée par ℓ.

Activités mentales

1 Soit la propriété au rang n : « $u_n = 8^{n+1} + 3$ »
Quelle est la propriété au rang $n+1$?

2 Soit la propriété au rang n : « $u_n = 2$ »
Quelle est la propriété au rang $n+1$?

3 On considère l'algorithme ci-dessous :

```
Liste des variables utilisées
   a,n : entiers
Traitement
   Demander n
   Donner à a la valeur -11+2n
   Tant que (a>0) faire
      Donner à a la valeur a+2
   Fin Tant que
Sortie
   Afficher a
```

1) Que renvoie l'algorithme si l'utilisateur saisit $n = 2$?
2) Que se passe t-il si l'utilisateur saisit $n = 8$?
3) Pour quelles valeurs de n cet algorithme ne fournit-il pas de résultat ?

4 On considère la propriété : « $u_n \geqslant 0$ » où (u_n) est la suite définie par $u_0 = -3$ et $u_{n+1} = 2u_n$ pour tout $n \geqslant 0$.
1) Cette propriété est-elle initialisée au rang $n = 0$?
2) Cette propriété est-elle héréditaire ?
3) Cette propriété est-elle vraie pour tout entier naturel $n \geqslant 0$?

5 On considère la propriété « $5^n - 2$ » est un multiple de 3.
1) Cette propriété est-elle initialisée au rang $n = 1$?
2) Cette propriété est-elle vraie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$?
3) Cette propriété est-elle héréditaire ?

6 Déterminer un encadrement de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel strictement positif n par $u_n = 5 + 3(-1)^n$.

7 On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{4n+5}{n+2} = 4 - \dfrac{3}{n+2}$.
1) Donner une minoration « évidente » de (u_n).
2) Montrer que la suite (u_n) est majorée par 4.

8 Trouver l'expression d'une suite majorée par 5.

9 Déterminer à partir de quel rang tous les termes de la suite (u_n) sont strictement plus grands que A avec :
1) $u_n = n^2$ et $A = 10\,000$
2) $u_n = 3n + 5$ et $A = 538$
3) $u_n = 2\sqrt{n}$ et $A = 20$
4) $u_n = n^2 + 10n - 1$ et $A = 23$

10 Donner la limite de la suite géométrique de premier terme $u_0 = -12$ et de raison $q = 0{,}8$.

11 Pour lesquelles de ces expressions la limite quand n tend vers $+\infty$ est-elle une forme indéterminée ?
1) $n^3 - n$ 2) $n \times 0{,}1^n$ 3) $\dfrac{n}{0{,}1^n}$ 4) $\dfrac{2}{\sqrt{\dfrac{1}{n}}}$ 5) $\dfrac{n^2}{n}$

12 Sans justification, dire dans les différents cas suivants si la suite (u_n) est convergente ou divergente et préciser éventuellement sa limite.
1) $u_n = 4(-5)^n$
2) $u_n = 3 - \dfrac{2}{\sqrt{n}} + \dfrac{6}{n} - \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$
3) $u_n = -(2n+5)^2$
4) $u_n = (n+1)(\sqrt{n}+2)$
5) $u_n = -\dfrac{4}{\pi^n \times n^5}$
6) $u_n = 7n^2 - n + 2$
7) $u_n = \dfrac{n}{n+1}$

13 Dans les différents cas suivants, donner une inégalité ou un encadrement de la suite (u_n) permettant de déterminer sa limite par les théorèmes de comparaison ou des gendarmes.
1) $u_n = 7\sqrt{n} + (-1)^n$
2) $u_n = \dfrac{\cos(n) + \sin(n^2) + 3(-1)^n}{n}$
3) $u_n = -n + \sin(n)$
4) $u_n = \sqrt{(n+2)^2 + 2}$

14 Dans chacune des configurations suivantes dire si la suite (u_n) est convergente, divergente ou si l'on ne peut pas conclure.
1) (u_n) est croissante et $u_n \geqslant 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$;
2) (u_n) est décroissante et bornée par -3 et 12 ;
3) (u_n) est décroissante et n'admet pas de minorant ;
4) (u_n) est croissante et $u_n \leqslant 1\,024$ pour tout entier $n \geqslant 236$;
5) $u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$;
6) $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Démontrer par récurrence

15 On considère la propriété « $3^n \geqslant 1 + 2n$ » dont on souhaite démontrer qu'elle est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.

1) Montrer que la propriété est initialisée.
2) Dans cette question, on décompose le travail à faire au brouillon pour justifier l'hérédité.
   a) Écrire l'hypothèse de récurrence.
   b) Écrire la propriété au rang $n+1$ (on simplifiera le membre de droite de l'inégalité).
   c) Multiplier les deux membres de l'inégalité de la question 2a par 3 puis les simplifier.
   d) Justifier que $3 + 6n \geqslant 3 + 2n$ pour tout $n \geqslant 0$.
3) Rédiger intégralement le raisonnement par récurrence permettant de justifier la propriété souhaitée.

> À la question 2c, plutôt que de multiplier par 3, on aurait pu ajouter 2 aux deux membres de l'inégalité pour « passer » de $1 + 2n$ à $3 + 2n$ mais il aurait été plus difficile de conclure ensuite.

16 ► MÉTHODE 1 p. 14

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrer par récurrence que $2 \leqslant u_n \leqslant 5$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

17 On considère la suite (w_n) définie par $w_0 = 0$ et $w_n = -\frac{1}{3}w_{n-1} + 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer par récurrence que $1 \leqslant w_n \leqslant 4$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

18 Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on définit $n!$ qui se lit « n factorielle » ou « factorielle n » par :

$1! = 1$; $2! = 1 \times 2 = 2$; $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$; etc.

1) Calculer 6!.
2) Montrer par récurrence que $3^n \leqslant n!$ pour tout $n \geqslant 7$.
3) Montrer que $n! \leqslant n^n$ pour tout $n \geqslant 1$.

19 Montrer par récurrence que $4^n - 1$ est un multiple de 3 pour tout $n \geqslant 0$.

20 On considère la propriété « $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ » dont on souhaite démontrer qu'elle est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

1) Recopier et compléter :
$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + \dots$$
2) Démontrer la propriété souhaitée par récurrence.

21 Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$ on a
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

22 **Somme des impairs** INFO

On a créé une feuille de tableur comme ci-dessous :

	A	B	C
1	1	1	
2	3	4	
3	5	9	
4	7	16	
5	9	25	
6	11	36	

Dans la colonne A, on a écrit les premiers nombres impairs. En B1, on a écrit 1. Dans la cellule B2 est écrite la formule « =B1+A2 » qu'on a recopiée vers le bas.

1) Conjecturer une formule pour la somme des premiers nombres impairs : $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)$ pour $n \geqslant 1$.
2) Démontrer cette égalité par récurrence.

23 On considère la suite arithmétique (u_n) de premier terme u_0 et de raison r.

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{(n+1)(2u_0 + nr)}{2}.$$
2) En déduire la somme des 101 premiers termes de la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 8$ et de raison 50.

24 On reprend la notation $n!$ qui a été introduite à l'exercice 18.

1) Calculer 4! puis $1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3!$.
2) Calculer 5! puis $1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + 4 \times 4!$.
3) Conjecturer une expression de $\sum_{k=1}^{n-1} k.k!$ en fonction de $n!$ pour $n \geqslant 2$.
4) Démontrer cette égalité.

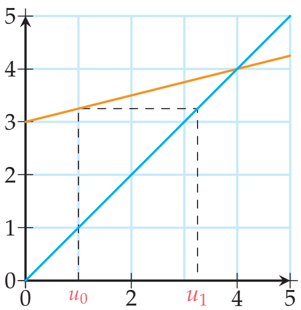
25 On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = 1$ et $v_n = 3v_{n-1} - 2n + 6$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

1) Calculer v_1, v_2 et v_3.

2) La suite (v_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?

3) Montrer par récurrence que $v_n \geqslant n$ pour tout $n \geqslant 0$.

26 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3$ pour tout entier $n \geqslant 0$.
On a donc $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{4}x + 3$ dont la courbe représentative est donnée ci-dessous avec la droite d'équation $y = x$:



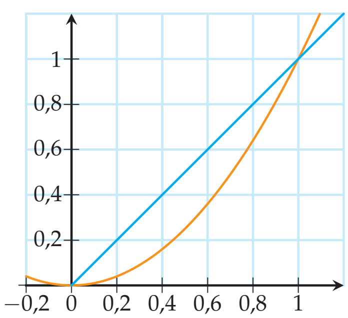
1) Reproduire la figure et y construire sans calcul les points d'abscisses u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses.

2) a) Entre quels entiers consécutifs peut-on conjecturer que tous les termes de la suite sont compris à partir du rang 1 ?

b) Démontrer cette conjecture.

27 ► MÉTHODE 2 p. 15

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0{,}8$ et $u_{n+1} = (u_n)^2$ pour tout entier $n \geqslant 0$.
On donne ci-dessous la courbe de la fonction carrée et la droite d'équation $y = x$:



1) À l'aide du graphique ci-dessus, conjecturer les variations de la suite (u_n).

2) Montrer par récurrence que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout $n \geqslant 0$.
Que peut-on en déduire sur les variations de (u_n) ?

28 On considère la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n - 1$ pour tout entier $n \geqslant 0$.
Montrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante.

29 On considère la suite (w_n) définie par $w_0 = 2$ et $w_n = \frac{1}{5}w_{n-1} + \frac{1}{2}$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

Montrer que $w_n = \frac{11}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{5}{8}$ pour tout $n \geqslant 0$.

30 **Avec un tableur** INFO

On considère la suite (w_n) définie par $w_0 = 4$ et par la relation de récurrence $w_n = 2w_{n-1} - 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On donne ci-dessous la feuille de tableur donnant les premiers termes de la suite (w_n).

	A	B	C
1	n	w(n)	
2	0	4	
3	1	5	
4	2	7	
5	3	11	
6	4	19	
7	5	35	

1) Quelle formule a été écrite en B3 et recopiée vers le bas pour obtenir ces résultats ?

2) On considère la suite (r_n) définie pour tout entier naturel n par $r_n = w_n - 3$.
Conjecturer une formule explicite pour (r_n) puis pour (w_n).

3) Démontrer cette conjecture.

31 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + 3n(n+1) + 1$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

1) À l'aide d'une calculatrice, conjecturer une expression explicite de u_n.

2) Démontrer cette égalité en utilisant une démonstration par récurrence.

3) Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = n^3$.

a) Montrer que $v_0 = u_0$.

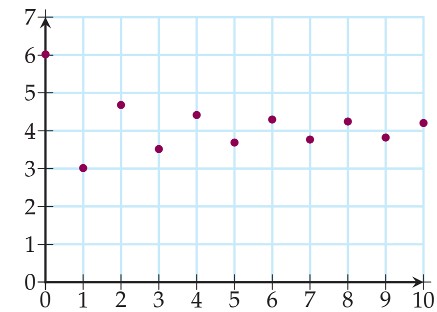
b) Montrer que la suite (v_n) satisfait la relation de récurrence de la suite (u_n).

Les suites (u_n) et (v_n) ont même premier terme et satisfont la même relation de récurrence, cela implique que (u_n) et (v_n) sont la même suite sans avoir à utiliser une démonstration par récurrence.

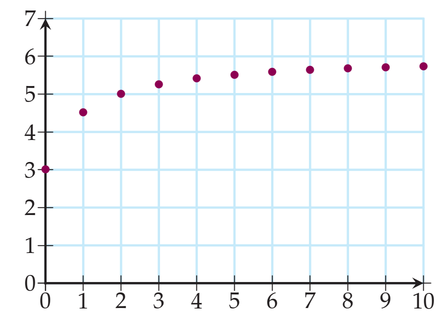
Majorants, minorants et variations

32 Pour chacune des suites représentées graphiquement ci-dessous, conjecturer un majorant, un minorant ou un encadrement.

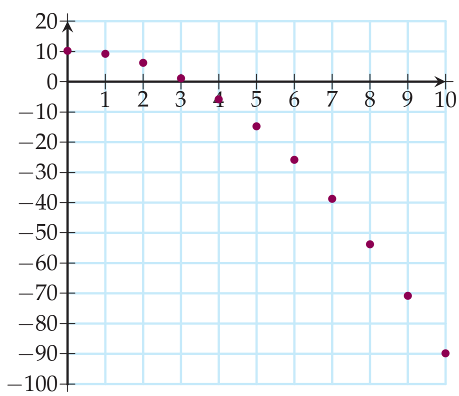
1)



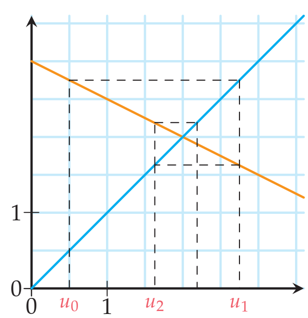
2)



3)



4)



33 Donner un minorant et/ou un majorant évident de la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

1) $u_n = 3 + 5n$

2) $u_n = 5 + \dfrac{1}{n+1}$

3) $u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n - 3$

4) $u_n = 4(-1)^n + \dfrac{1}{4}$

5) $u_n = 1 - \dfrac{2}{n+1}$

6) $u_n = \cos\left(n\dfrac{\pi}{2}\right) - 4$

7) $u_n = n + (-1)^n$

34 ► **MÉTHODE 3** p. 17

1) Montrer que la suite de terme général :

a) $n^2 - 4n + 6$ est minorée et en donner un minorant ;

b) $-3n^2 + 9n - 4$ est majorée et en donner un majorant ;

c) $\dfrac{n^2 + \cos(n)}{n+1}$ est minorée et en donner un minorant (indication : $n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$) ;

d) $\dfrac{8n+1}{n+5}$ est bornée par 0 et 8 ;

e) $\dfrac{-n^2 - 2n + 1}{n^2 + 3n + 2}$ est bornée par -1 et $\dfrac{1}{2}$;

2) Montrer que la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n - 1}$ est bornée par 2 et 5.

35 Montrer que les deux suites (u_n) et (v_n) définies ci-dessous sont à termes positifs.

1) $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \dfrac{5}{1 + u_n}$ pour tout $n \geqslant 0$;

2) $v_0 = 4$ et $v_{n+1} = 2v_n + 4$ pour tout $n \geqslant 0$.

36 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = -0{,}1u_n^2 + 4$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

1) En utilisant la calculatrice, donner des valeurs approchées de u_1, u_2, u_3 et u_4 à 10^{-2} près et conjecturer un encadrement de cette suite par deux entiers.

2) Démontrer cette conjecture.

37 En utilisant la méthode la plus adaptée, étudier les variations de la suite (u_n) dans chacun des cas ci-dessous et en déduire si u_0 est un majorant ou un minorant de (u_n) :

1) $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 3u_n - 4$ pour tout $n \geqslant 0$;

2) $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n - 5n^2 - 2$ pour tout $n \geqslant 0$;

3) $u_n = 2n^3 - 3n^2 - 120n + 3$ pour tout $n \geqslant 0$;

4) $u_n = \dfrac{5}{3^{n+1}}$ pour tout $n \geqslant 0$;

5) $u_0 = 6$ et $u_{n+1} = \sqrt{5u_n}$ pour tout $n \geqslant 0$.

38 On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{5x+1}{x+2}$.

1) Étudier les variations de la fonction f.

2) Soit (u_n) la suite définie par $u_n=\dfrac{5n+1}{n+2}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

a) Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

b) Montrer que la suite (u_n) est majorée par 5.

3) Soit (v_n) la suite définie par $v_0=100$ et $v_{n+1}=f(v_n)=\dfrac{5v_n+1}{v_n+2}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

a) Montrer que $0\leqslant v_{n+1}\leqslant v_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

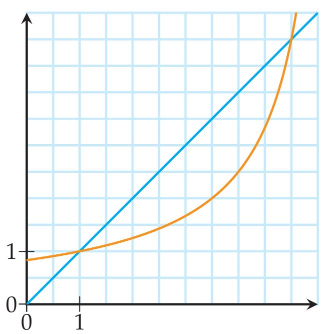
b) En déduire le sens de variation de la suite (v_n).

39 Samira et Jean-Louis doivent répondre à la question suivante :

> Soit (u_n) la suite définie par $u_0=0{,}5$ et $u_{n+1}=\dfrac{u_n+1}{u_n+2}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
> Montrer par récurrence que $0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Samira prétend qu'à l'étape de l'hérédité, il serait intéressant de connaître les variations de la fonction $x\mapsto\dfrac{x+1}{x+2}$ alors que Jean-Louis pense que c'est inutile. Départager les deux amis.

40 On considère la suite (u_n) définie par $u_0=4$ et $u_{n+1}=\dfrac{5}{6-u_n}$ pour tout entier $n\geqslant 0$.
On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction f définie sur $[0\,;\,5{,}5]$ par $f(x)=\dfrac{5}{6-x}$ et la droite d'équation $y=x$.



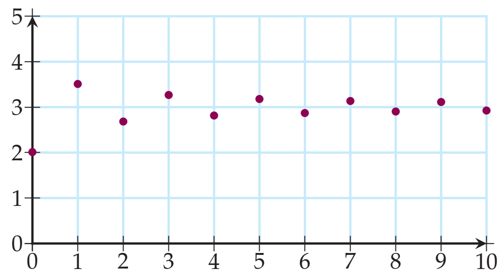
1) Reproduire la figure et construire les points d'abscisses u_0, u_1, u_2 sur l'axe des abscisses.

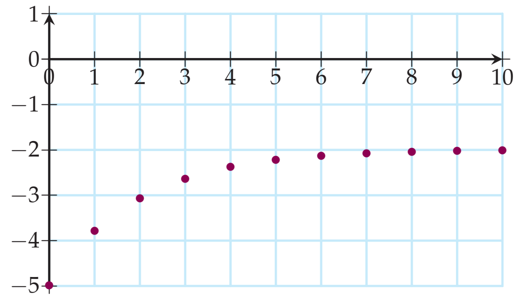
2) Montrer que cette suite est bornée par 1 et 4.

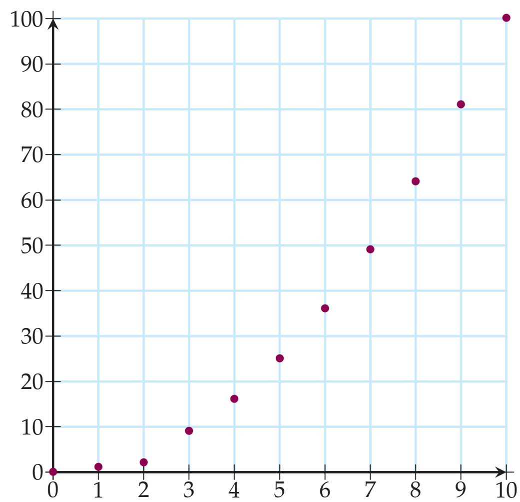
3) Conjecturer le sens de variation de (u_n) puis démontrer cette conjecture.

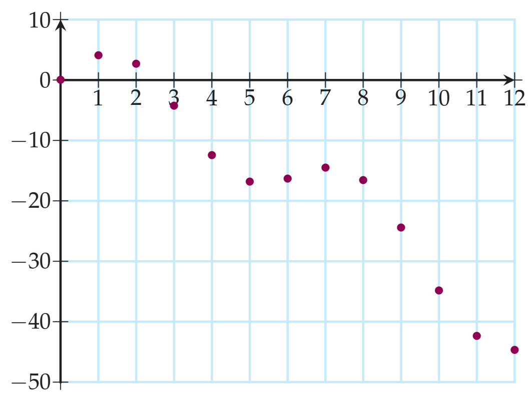
Définitions des limites

41 Pour chacune des suites représentées ci-dessous, dire quelle semble être sa limite quand n tend vers $+\infty$.

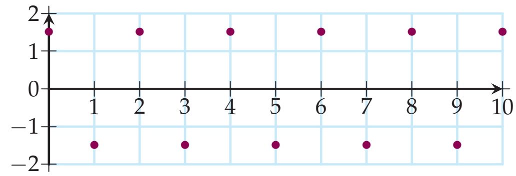
1)


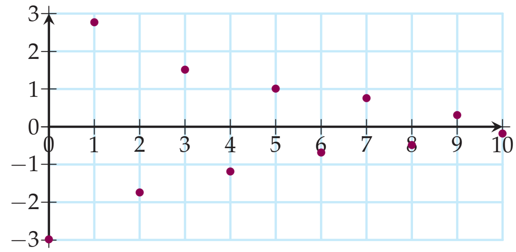
2)


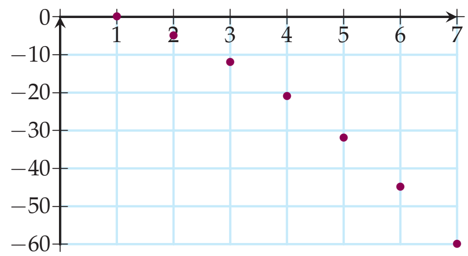
3)


4)


42 Pour chacune des suites représentées ci-dessous, dire si elle semble converger ou diverger.

1) 

2) 

3) 

43 Déterminer, s'il existe, le rang à partir duquel tous les termes de suite (u_n) appartiennent à I avec :

1) $u_n = 0{,}5^n$ et $I =]-0{,}001\ ;\ 0{,}001[$
2) $u_n = n^2$ et $I =]50\ ;\ +\infty[$
3) $u_n = n^3$ et $I =]1\,000\ ;\ 2\,000[$
4) $u_n = -6n + 12$ et $I =]-\infty\ ;\ -100[$
5) $u_n = \sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$ et $I =]0\ ;\ 2[$
6) $u_n = \dfrac{2}{\sqrt{n}}$ et $I =]1{,}9\ ;\ 2{,}1[$
7) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ et $I =]-0{,}01\ ;\ 0{,}01[$

44 **Limite d'une suite constante** ROC

Montrer qu'une suite constante converge.

45 Justifier les limites suivantes avec la définition :

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n + 3 = +\infty$
2) $\lim\limits_{n\to+\infty} -n + 6 = -\infty$
3) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$
4) $\lim\limits_{n\to+\infty} 6 - n^2 = -\infty$
5) $\lim\limits_{n\to+\infty} 5\sqrt{n} = +\infty$
6) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+3}{n+1} = +\infty$

46 Justifier les limites suivantes avec la définition :

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$
2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{6n+2}{2n+1} = 3$
3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{10n+5}{-5n+2} = -2$
4) $\lim\limits_{n\to+\infty} 6 + \dfrac{5}{\sqrt{n}} = 6$

Opérations sur les limites

47 ► MÉTHODE 4 p. 21

Déterminer les limites suivantes.

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} 11^n$
2) $\lim\limits_{n\to+\infty} -2(1{,}1)^n$
3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n + 8$
4) $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 \times 0{,}99^{n+1}$
5) $\lim\limits_{n\to+\infty} 6n^8 + 3n$
6) $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n^6 + 3n^4 - 5$
7) $\lim\limits_{n\to+\infty} (6n^8 + 3n)(2n^6 + 3n^4 - 5)$
8) $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^3\sqrt{n}$
9) $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n + 8$
10) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{0{,}5^n}{n}$
11) $\lim\limits_{n\to+\infty} -2^n - 5n^2$
12) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{5}^{2n-1}$
13) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{8 - \pi^n}{4 + \dfrac{3}{n}}$

48 Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} 5 + \dfrac{2}{n} - \dfrac{8}{n^2} + \dfrac{1}{n^3}$
2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{0{,}236^n + 5}{10 - \dfrac{5}{n^{12}}}$
3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^n}{0{,}5^n}$
4) $\lim\limits_{n\to+\infty} 5(-0{,}4)^n - 0{,}4 \times 5^n$
5) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5}{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}$
6) $\lim\limits_{n\to+\infty} 3\sqrt{n} + \dfrac{5}{\sqrt{n}} - 6$
7) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{-0{,}5^n}$

49 ► MÉTHODE 5 p. 21

Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 - 2n$
2) $\lim\limits_{n\to+\infty} -3n^3 + 5n^2 + 6n - 1$
3) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 - 3n^4 + 2n^2 - 5n + 2$
4) $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^2 - 7n + 2)(n^3 - 8n + 1)$
5) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{6n^2 + 3n + 5}{-2n^2 + 5n - 1}$
6) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{9n^7 - 5n^4 + n}{n^2 + 1}$
7) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{6n^2 + 4n - 2}{8n^3 + 7n^2 - 4n + 7}$

50 Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} (-3n^2 - 2n + 1)^2$
2) $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}2^{-n}$
3) $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^2 - 6n + 2)^3$
4) $\lim\limits_{n\to+\infty} 5 \times 10^{-n-1}$
5) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{2}^{-2n+1}}{n+1}$
6) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n n^2}{(-0{,}2)^n}$

51 Déterminer les limites suivantes (on cherchera à factoriser par « ce qui l'emporte ») :

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} n-\sqrt{n}$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} -2n^2+n\sqrt{n}$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n-2^n$

4) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^n-5^n}{3^n+2^n}$

5) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4^n-6^n}{4^n+6^n}$

6) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{0{,}5^n-0{,}2^n}{2^n+1}$

52 **Limite d'une expression polynomiale**

Partie A : Cas général

On considère une suite (u_n) dont le terme général est une expression polynomiale de degré k c'est-à-dire que $u_n=\sum\limits_{i=0}^{k} a_i n^i$ avec $a_i\in\mathbb{R}$ pour tout i et $a_k\neq 0$.

Par exemple, $2n^5+3n^4-5n^2+12$ est de degré 5.

1) Pour $k\neq 0$, (u_n) est de degré $k\geqslant 1$ donc de la forme :
   - $a_1 n+a_0$ avec $a_1\neq 0$ pour $k=1$;
   - $a_k n^k+a_{k-1}n^{k-1}+\ldots+a_0$ avec $a_k\neq 0$ pour $k\geqslant 2$.

   a) Factoriser $a_k n^k+\ldots+a_0$ par n^k puis simplifier l'expression obtenue.

   b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_k+\ldots+\dfrac{a_0}{n^k}$.

2) En déduire que (u_n) a la même limite que son terme de plus haut degré.

Partie B : Applications

En utilisant le résultat démontré à la partie précédente, calculer sans factoriser :

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} 5n^4+12n^3-3n^2+5n+15$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} -\pi n^8+10\,000\,000n^7$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n^6-5n^5+12n^4-7n^3+8n^2+5n+15}{-7}$

53 **Limite d'une expression rationnelle**

1) En s'inspirant de l'exercice précédent, montrer que la limite d'une suite dont le terme général est une expression rationnelle (quotient de polynômes) est la limite du quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

2) En déduire, sans factoriser :

   a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-8n^3+6n^2-3n+178}{2n^2+3n+6}$

   b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^{2015}}{n^{2016}+1}$

54 Soit (v_n) la suite géométrique de premier terme $v_1=3$ et de raison 0,5. On note $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} v_k$.

Quelle est la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$?

55 On considère deux suites (u_n) et (v_n) telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n+v_n=5$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n-v_n=1$.

Montrer que (u_n) et (v_n) sont convergentes et déterminer leur limite respective.

56 **Suites mêlées**

On considère les suites mêlées (u_n) et (v_n) définies par $u_0=-10$, $v_0=20$ et :

$$\begin{cases} u_{n+1}=0{,}7u_n+0{,}8v_n \\ v_{n+1}=0{,}8u_n+0{,}7v_n \end{cases} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}.$$

1) a) Calculer u_1, v_1, u_2 et v_2.

   b) Les suites (u_n) et (v_n) sont-elles arithmétiques ? géométriques ?

2) a) Montrer que la suite (a_n) définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $a_n=u_n+v_n$ est géométrique.

   b) En déduire le terme général de (a_n) puis $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

3) a) Montrer que la suite (b_n) définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $b_n=u_n-v_n$ est géométrique.

   b) En déduire le terme général de (b_n) puis $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

   c) Les suites (u_n) et (v_n) sont-elles convergentes ?

4) Déduire des questions précédentes les termes généraux de (u_n) et (v_n).

5) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

57 **D'après Bac (Polynésie - 2013)**

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=\dfrac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1}=\frac{3u_n}{1+2u_n}.$$

1) a) Calculer u_1 et u_2.

   b) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a $0<u_n$.

2) On admet que pour tout entier naturel n, $u_n<1$.
   Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

3) Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n=\dfrac{u_n}{1-u_n}$.

   a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 3.

   b) Exprimer pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.

   c) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a :
   $$u_n=\frac{3^n}{3^n+1}.$$

   d) Déterminer la limite de la suite (u_n).

58 Condition suffisante d'arrêt (1) ALGO

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^3 + n$.

1) Quelle valeur le programme ci-dessous affiche-t-il si l'utilisateur rentre `A` $= 10\,000$?

```
Liste des variables utilisées
   n : entier
   u,A : réels
Traitement
   Demander A
   Donner à n la valeur 0
   Donner à u la valeur 0
   Tant que (u<=A) faire
      Donner à n la valeur n+1
      Donner à u la valeur n^3+n
   Fin Tant que
Sortie
   Afficher la valeur de n
```

2) Justifier que le programme s'arrête quelle que soit la valeur de A rentrée par l'utilisateur.

59 Condition suffisante d'arrêt (2) ALGO

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{20 + 0{,}5^n}{4 + 0{,}1^n}$.

1) Concrètement, que fait le programme ci-dessous :

```
Liste des variables utilisées
   n,k : entiers
   u : réel
Traitement
   Demander k
   Donner à n la valeur 0
   Donner à u la valeur 4,2
   Tant que (u<=5-0,1^k ou u>=5+0,1^k)
faire
      Donner à n la valeur n+1
      Donner à u la valeur (20+0,5^n)/(4+0,1^n)
   Fin Tant que
Sortie
   Afficher la valeur de n
```

2) Justifier que le programme s'arrête quelle que soit la valeur de k rentrée par l'utilisateur.

60 Écrire un algorithme ALGO

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^4 + 2n$.

1) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

2) Écrire un algorithme qui affiche le rang du premier terme de la suite (u_n) à partir duquel $u_n > 10^{10}$.

3) On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ pour tout $n \geqslant 0$.

Écrire un algorithme qui affiche le rang du premier terme tel que $S_n > 10^9$.

61 Trois opérations sur les limites ROC

Partie A : Une somme

On souhaite démontrer la propriété : Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = +\infty$.

Soit A un réel et $A' = \dfrac{A}{2}$.

1) Montrer que $u_n > A'$ à partir d'un certain rang que l'on nommera n_1 et que $v_n > A'$ à partir d'un certain rang que l'on nommera n_2.

2) a) À partir de quel rang a-t-on simultanément les inégalités $u_n > A'$ et $v_n > A'$?

b) En déduire que $u_n + v_n > A$ à partir de ce rang.

3) Conclure.

Partie B : Une différence

On souhaite démontrer la propriété : Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = -\infty$.

Soit A un réel et $A' = \dfrac{A}{2}$.

1) Justifier qu'il existe un rang à partir duquel on a simultanément les inégalités $u_n < A'$ et $v_n > -A'$.

2) En déduire que $u_n - v_n < A$ à partir de ce rang.

3) Conclure.

Partie C : Un produit

On souhaite démontrer la propriété : Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n = +\infty$.

1) Soit A un réel. Si $A \leqslant 0$.

a) Justifier qu'il existe un rang à partir duquel on a $u_n > 0$ **et** $v_n > 0$.

b) Comparer $u_n \times v_n$ et A à partir de ce rang.

2) Si $A > 0$, posons $A' = \sqrt{A}$.

a) Justifier qu'il existe un rang à partir duquel on a $u_n > A'$ **et** $v_n > A'$.

b) Comparer $u_n \times v_n$ et A à partir de ce rang.

3) Conclure.

Limites et comparaison

62 ► MÉTHODE 6 p. 23

Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cos(n)}{n^2}$
2) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 + 3\sin(n)$
3) $\lim\limits_{n\to+\infty} -5n^4 + 2n^4 \sin\left(\sqrt{n}\right)$
4) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^4 - n^3 \cos\left(n^5\right)$
5) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$
6) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 + \left(\sin\left(n^3\right) + \cos\left(n^2\right)\right) n$
7) $\lim\limits_{n\to+\infty} (3 + (-1)^n)\, 0{,}7^n$

63 **Ni cos, ni sin, ni $(-1)^n$**

1) a) Justifier que $\sqrt{n+1} \geqslant \sqrt{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1}$.
2) Déterminer les limites suivantes par comparaison après avoir trouvé une inégalité pertinente :
   a) $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)^4$
   b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{6n+5}$
   c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+2n+3}$
   d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^3+1}$
   e) $\lim\limits_{n\to+\infty} -(n+5)^3$
   f) $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+2)^n$

Nous verrons dans le chapitre A2 comment calculer plus facilement certaines de ces limites à l'aide de la composition de limites.

64 **Écart entre racines carrées**

1) Montrer que pour tout réel $k > 0$, on a :
$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+k} = +\infty$.
2) a) Conjecturer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.
   b) Peut-on justifier la conjecture précédente avec les propriétés sur les opérations sur limites ?
   c) Montrer que $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.
   d) Conclure.
3) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n + 1\,000\,000} - \sqrt{n}$.

65 On considère les suites (u_n) et (v_n) de terme général respectif $\dfrac{1}{n}$ et $\left(\dfrac{1}{n}\right)^n$.

1) Justifier qu'il existe un rang à partir duquel on a $0 < u_n < 0{,}5$.
2) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

66 On considère la suite définie par $u_1 = 8$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 2n - 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Montrer que $u_n \geqslant n$ pour tout $n \geqslant 4$.
2) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

67 On considère la suite définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = u_n - 4n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que $u_n \leqslant -n^2$ pour tout $n \geqslant 5$.
2) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

68 On considère les suites (u_n) et (S_n) définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = 3 + 10(-0{,}7)^n$ et $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

1) a) Justifier que $|(-0{,}7)^n| < 0{,}1$ pour tout $n \geqslant 7$.
   b) En déduire que la suite (u_n) est minorée par 2 **à partir du rang 7**.
2) Montrer que, pour tout $n \geqslant 7$, on a :
$$S_n \geqslant \sum_{k=0}^{6} u_k + 2(n-6).$$
3) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

69 Dans cet exercice, on suppose admis les deux résultats suivants :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} = +\infty$;
- $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \dfrac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$ c'est-à-dire $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

1) Montrer que $2\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{k}}$ pour tout entier k non nul.
2) En déduire que $2\sqrt{n+1} - 2 \leqslant u_n$.
3) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

70 On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+k}}$.

1) Calculer u_1, u_2 et u_3.
2) Soit k un entier tel que $1 \leqslant k \leqslant n$.
   a) Montrer que $n \leqslant \sqrt{n^2+k} \leqslant n+1$.
   b) En déduire un encadrement de u_n.
3) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
4) Déterminer de même $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n^2+k}$.

Convergence des suites monotones

71 ▶ MÉTHODE 7 p. 24

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \frac{1}{10}(u_n+1)^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3) On admet que la limite ℓ de la suite vérifie
$$\ell = \frac{1}{10}(\ell+1)^2 \text{ et } \ell \leqslant 5.$$
Déterminer cette limite.

72 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ où f est la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5}{12}\right\}$ par $f(x) = \frac{-60x+68}{-12x+5}$.

1) Étudier les variations de f.

2) Montrer que si $x \in [2\,;4]$ alors $f(x) \in [2\,;4]$.

3) En déduire que (u_n) est bornée par 2 et 4.

4) a) Montrer que $u_{n+1} - u_n = \frac{12u_n^2 - 65u_n + 68}{-12u_n+5}$.

b) Dresser le tableau de signe de $\frac{12x^2-65x+68}{-12x+5}$.

c) En déduire que (u_n) est croissante.

5) Que peut-on en déduire sur le comportement de (u_n) quand n tend vers $+\infty$?

73 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) a) Dans un repère orthonormé, tracer les droites d'équation $y = x$ et $y = \frac{1}{2}x + 4$.

b) Sans calcul, placer les 5 premiers termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses.

c) Conjecturer une minoration, une majoration et les variations de (u_n).

2) Démontrer ces conjectures.

3) En déduire que (u_n) est convergente.

4) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

74 **Question ouverte**

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{3u_n}{u_n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que (u_n) est convergente.

75 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n + \sqrt{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Étudier les variations de (u_n).

2) Dans cette question, on suppose que (u_n) converge vers un réel ℓ.

a) Quelle serait alors la limite de $u_{n+1} - u_n$?

b) En déduire une contradiction.

3) Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

76 On considère une variable aléatoire X_n suivant la loi binomiale de paramètres n et 0,5 où $n \geqslant 3$.

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = P(X_n = 2)$ pour tout n entier vérifiant $n \geqslant 3$.

On rappelle que pour tout entier k entre 0 et $n-1$, on a $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$.

1) Montrer que $u_n = \binom{n}{2} 0{,}5^n$ pour tout $n \geqslant 3$.

2) a) Exprimer u_{n+1} en fonction de $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$, 0,5 et n.

b) On admet que $\binom{n}{1} \leqslant \binom{n}{2}$ pour tout $n \geqslant 3$.
Montrer que (u_n) est décroissante.

3) En déduire que (u_n) est une suite convergente.

77 **Vers un nombre connu** ALGO

On considère la suite (u_n) de terme général $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ c'est-à-dire $u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$.

1) Étudier les variations de la suite (u_n).

2) a) Montrer que $\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ pour tout $k \geqslant 2$.

b) En déduire que $u_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}$ puis que (u_n) est majorée.

3) Que peut-on en déduire pour la convergence éventuelle de la suite (u_n) ?

4) a) Dans un logiciel ou sur la calculatrice, écrire un algorithme :
- demandant à l'utilisateur de saisir une valeur de n ;
- donnant en sortie la valeur u_n et la valeur $\sqrt{6u_n}$ correspondantes.

b) Tester l'algorithme.

c) Conjecturer la limite de (u_n).

78 D'après Bac (Asie - 2013) ALGO

Partie A

On considère la suite (w_n) définie par : $w_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n :

$$w_{n+1} = \frac{1+3w_n}{3+w_n}.$$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $w_n > 1$.

2) a) Établir que, pour tout entier naturel n, on a : $w_{n+1} - w_n = \dfrac{(1-w_n)(1+w_n)}{3+w_n}$.

b) Déterminer le sens de variation de la suite (w_n). En déduire que la suite (w_n) converge.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{1+0,5u_n}{0,5+u_n}.$$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1) On considère l'algorithme suivant :

```
Entrées :
Soit un entier naturel non nul n
Initialisation :
Affecter à u la valeur 2
Traitement et sortie
POUR i allant de 1 à n
    Affecter à u la valeur (1+0,5u)/(0,5+u)
    Afficher u
Fin POUR
```

Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $n = 3$. Les valeurs de u seront arrondies au millième.

i	1	2	3
u			

2) Pour $n = 12$, on a obtenu :

i	4	5	6	7	8
u	1,008 3	0,997 3	1,000 9	0,999 7	1,000 1

i	9	10	11	12
u	0,999 97	1,000 01	0,999 996	1,000 001

Conjecturer le comportement de la suite (u_n) à l'infini.

3) On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

b) Calculer v_0 puis écrire v_n en fonction de n.

4) a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $v_n \neq 1$.

b) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \dfrac{1+v_n}{1-v_n}$.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

79 Suites mêlées ALGO

On considère les suites mêlées (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 24$, $v_0 = 6$ et :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \sqrt{u_n \times v_n} \end{cases} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1) Calculer u_1, v_1, u_2 et v_2.

2) Montrer que $u_n > 0$ et $v_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) a) Montrer que $u_n^2 - v_n^2 = \dfrac{(u_{n-1} - v_{n-1})^2}{4}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) En déduire que $u_n - v_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4) En déduire que $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

5) Montrer que la suite (u_n) est convergente.

6) Exprimer v_n en fonction de u_{n+1} et u_n et en déduire que (v_n) converge vers la même limite que (u_n).

7) Expliquer pourquoi l'algorithme ci-dessous, censé donner le premier rang tel que $|u_n - v_n| < 0,1$, est incorrect et le modifier pour qu'il fonctionne.

```
Liste des variables utilisées
    n : entier
    u,v : réels
Traitement
    Donner à u la valeur 24
    Donner à v la valeur 6
    Donner à n la valeur 0
    Tant que (|u-v|>=0,1) faire
        Donner à u la valeur (u+v)/2
        Donner à v la valeur √(u*v)
        Donner à n la valeur n+1
    Fin Tant que
Sortie
    Afficher la valeur de n
```

80 Suites adjacentes, d'après Bac ALGO

Partie A : Généralités sur les suites adjacentes

On donne, ci-dessous, la définition de deux suites adjacentes.

> Deux suites sont adjacentes lorsque :
> - l'une est croissante ;
> - l'autre est décroissante ;
> - la différence des deux converge vers 0.

Démontrer à l'aide des deux propriétés ci-dessous que : Si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes, alors elles sont convergentes et elles ont la même limite.

- **Propriété 1** : Si deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes avec (u_n) croissante et (v_n) décroissante alors pour tout entier naturel n, $v_n \geqslant u_n$.
- **Propriété 2** : Toute suite croissante et majorée converge et toute suite décroissante et minorée converge.

Partie B : Application

On considère (u_n) et (v_n) deux suites définies par $u_0 = 0$, $v_0 = 12$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \end{cases}.$$

1) Démontrer que la suite (w_n) définie par $w_n = v_n - u_n$ pour tout $n \geqslant 0$ est une suite géométrique convergente et que ses termes sont strictement positifs.
2) a) Démontrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
   b) Que peut-on en déduire sur la convergence éventuelle des suites (u_n) et (v_n) ?
3) a) Montrer que la suite (t_n) définie pour tout n par $t_n = 2u_n + 3v_n$ est constante.
   b) En déduire la limite ℓ de (u_n) et de (v_n).
4) a) Écrire un algorithme :
   - demandant un entier n à l'utilisateur ;
   - donnant en sortie les valeurs de u_n et v_n.

   b) Modifier l'algorithme de la question précédente pour qu'il donne le premier rang à partir duquel l'écart entre v_n et ℓ est strictement inférieur à 0,000 01.

$u_{n+1} = au_n + b$

81 On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 50$ et $u_{n+1} = 0,4u_n + 120$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

1) La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?
2) À l'aide d'une calculatrice, conjecturer la limite de la suite (u_n).
3) a) Montrer par récurrence que $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 200$ pour tout $n \geqslant 1$.
   b) La suite (u_n) est-elle convergente ?
4) On considère la suite auxiliaire (v_n) définie par $v_n = u_n - 200$ pour tout $n \geqslant 1$.
   a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b) En déduire l'expression de v_n puis celle de u_n en fonction de n.
   c) Déterminer la limite de la suite (u_n).
5) Existe-il une valeur de n pour laquelle on a $u_n = 200$?
6) Quelle est la valeur exacte de $u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_{20}$?

82 Un algorithme pour sommer ALGO

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = 5u_n - 6$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

1) Donner les valeurs de u_1, u_2 et u_3.
2) On considère la suite (w_n) définie par $w_n = u_n - \dfrac{3}{2}$ pour tout entier naturel n.
   a) Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison 5.
   b) En déduire une expression de u_n en fonction de n.
3) Pour tout $n \geqslant 0$, on note :
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + ... + u_n.$$
   a) Calculer S_4.
   b) Écrire un algorithme qui :
   - demande une valeur n à l'utilisateur ;
   - calcule S_n et affiche le résultat.

   c) Montrer que (S_n) est croissante.
   d) Exprimer S_n en fonction de n.
   e) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.
   f) Modifier l'algorithme écrit précédemment afin qu'il affiche le rang à partir duquel S_n devient supérieur à 10^9.

83 Pizza et escalade

PARTIE A : Pour Youssef

Cette année, Youssef a décidé de se mettre au sport.

Pour cela, il s'inscrit dans un club où il pratique l'escalade une fois par semaine, ce qui lui fait perdre 0,25 % de sa masse par séance.

Par ailleurs, son club d'escalade ayant un partenariat avec la pizzeria « d'à côté », il s'y réunit avec ses amis après chaque entraînement et profite de réductions sur les pizzas et les boissons. Cela a des conséquences : 200 g supplémentaires après chaque repas.

On note a_n sa masse, en kg, après n semaines (donc après n séances et repas). Comme il pèse 70 kg au départ, on a $a_0 = 70$.

1) Calculer a_1 et a_2. Arrondir au gramme près.

2) Expliquer pourquoi on a $a_{n+1} = 0{,}997\,5a_n + 0{,}2$.

3) Montrer par récurrence que $a_n = 80 - 10 \times 0{,}997\,5^n$.

4) **a)** Calculer $a_{n+1} - a_n$.

b) Que peut-on en déduire sur les variations de la suite (a_n) ?

5) Calculer la limite de la suite (a_n).

Que représente concrètement cette valeur ?

PARTIE B : Pour Alban

Alban est inscrit au même club d'escalade que Youssef et fréquente la même pizzeria (le tout dans les mêmes conditions pour sa masse) et pèse 85 kg au départ.

On note b_n sa masse, en kg, après n semaines et on considère la suite (c_n) définie par $c_n = b_n - 80$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que (c_n) est géométrique et préciser son premier terme et sa raison.

2) En déduire c_n puis b_n en fonction de n.

3) En déduire la limite de (b_n).

PARTIE C : Conclusion

1) Commenter les résultats des parties A et B.

2) Au bout de combien d'années Youssef et Alban auront-ils moins d'un kg d'écart ?

84 On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = v_0 > 0$ et $u_{n+1} = au_n + b$ et $v_{n+1} = av_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $a > 1$ et $b > 0$.

1) Comparer les suites (u_n) et (v_n).

2) Que peut-on en déduire sur la limite de (u_n) ?

Problèmes

85 Projet de fin d'étude — ALGO

Pour son projet de fin d'étude d'école d'ingénieur, Kelly a inventé une machine permettant de remplir automatiquement le bol d'eau des animaux domestiques.

Le principe en est le suivant :

- au départ, le bol contient 500 ml d'eau ;
- quand il ne reste plus que 200 ml d'eau, la machine en réinjecte 200 ml puisés dans une réserve de 3 litres.

Ahmed, un ami de Kelly, a un chien qui boit toujours 7 ml d'eau quand il va se désaltérer.

On appelle e_n la quantité d'eau dans le bol après que le chien s'est désaltéré n fois, on a donc $e_0 = 500$ (on considère que le remplissage du bol est immédiat).

1) Écrire un algorithme :

- demandant un entier n à l'utilisateur ;
- donnant en sortie la valeur e_n.

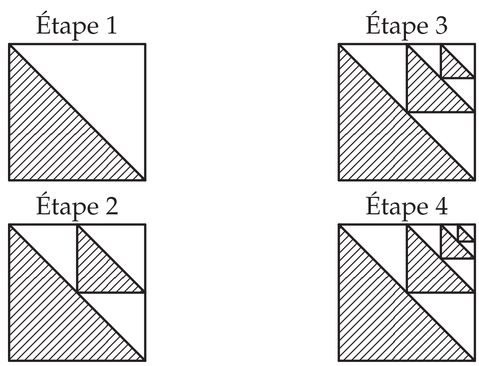
2) Kelly, voudrait pouvoir faire des tests avec des volumes supérieurs à 3 litres pour la réserve.

Modifier cet algorithme pour qu'il demande le volume de la réserve en ml puis affiche la plus petite valeur de n pour laquelle cette réserve est vide.

86 Un carré a pour côté 6.

On considère les étapes suivantes d'une construction où les sommets des triangles se situent au milieu des segments et les triangles tracés sont rectangles.

La construction peut alors se poursuivre à l'infini.



On note u_n l'aire du triangle ajouté à l'étape n et A_n l'aire totale hachurée à l'étape n pour $n \geqslant 1$.

1) Déterminer A_1 et A_2.

2) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

3) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} A_n$.

87 **D'après Bac (Métropole - 2013)**

Soit la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$.

1) a) Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4. On pourra en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.

b) Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.

2) a) Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$u_n \leqslant n+3.$$

b) Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n+3-u_n).$$

c) En déduire une validation de la conjecture précédente.

3) On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est bien une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

b) En déduire que pour tout entier naturel n,

$$u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n.$$

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

4) Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n \text{ et } T_n = \frac{S_n}{n^2}.$$

a) Exprimer S_n en fonction de n.

b) Déterminer la limite de la suite (T_n).

88 **Question ouverte**

En 2015, Miguel a planté 20 orchidées dans son jardin. Grâce à la pollinisation, il sait que le nombre d'orchidées va doubler chaque année ; par ailleurs, il a décidé qu'il planterait lui-même 5 orchidées supplémentaires chaque année.

On considère la suite (p_n) donnant le nombre d'orchidées dans le jardin de Miguel en $2015+n$, de sorte que l'on a $p_0 = 20$.

En considérant la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = p_n + 5$, déterminer le terme général de la suite (p_n).

89 **D'après Bac (Antilles-Guyane - 2014)** ALGO

Soit la suite numérique (u_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3 \times 0,5^n$ pour tout entier naturel n.

1) a) Recopier et, à l'aide d'une calculatrice, compléter le tableau des valeurs de la suite (u_n) approchées à 10^{-2} près :

n	0	1	2	3	4
u_n					

n	5	6	7	8
u_n				

b) D'après ce tableau, énoncer une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n).

2) a) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul on a

$$u_n \geqslant \frac{15}{4} \times 0,5^n.$$

b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

c) Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

3) *On se propose, dans cette question de déterminer la limite de la suite (u_n).*

Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 10 \times 0,5^n$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est bien une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$. On précisera le premier terme de la suite (v_n).

b) En déduire, que pour tout entier naturel n,

$$u_n = -8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + 10 \times 0,5^n.$$

c) Déterminer la limite de la suite (u_n)

4) Recopier et compléter les lignes (4), (5) et (6) de l'algorithme suivant, afin qu'il affiche la plus petite valeur de n telle que $u_n \leqslant 0{,}01$.

```
1. Entrée : n et u sont des nombres
2. Initialisation : n prend la valeur 0
3.                  u prend la valeur 2
4. Traitement : Tant que ...
5.                 n prend la valeur ...
6.                 u prend la valeur ...
7.              Fin Tant que
8. Sortie : Afficher n
```

90 **D'après Bac (Métropole - 2014)** ALGO

On administre à un patient un médicament par injection intraveineuse. La quantité de médicament dans le sang diminue en fonction du temps.

Le but de l'exercice est d'étudier pour différentes hypothèses, l'évolution de cette quantité minute par minute.

1) On effectue à l'instant 0 une injection de 10 ml de médicament. On estime que 20 % du médicament est éliminé par minute.

Pour tout entier naturel n, on note u_n la quantité de médicament, en ml, restant dans le sang au bout de n minutes. Ainsi $u_0 = 10$.

a) Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

b) Pour tout entier naturel n, donner l'expression de u_n en fonction de n.

c) Au bout de combien de temps la quantité de médicament restant dans le sang devient-elle inférieure à 1 % de la quantité initiale ?

Justifier la réponse.

2) Une machine effectue à l'instant 0 une injection de 10 ml de médicament. On estime que 20 % du médicament est éliminé par minute.

Lorsque la quantité de médicament tombe en-dessous de 5 ml, la machine réinjecte 4 ml de produit. Au bout de 15 minutes, on arrête la machine.

Pour tout entier naturel n, on note v_n la quantité de médicament, en ml, restant dans le sang à la minute n.

L'algorithme suivant donne la quantité restante de médicament minute par minute.

```
Variables :
    n est un entier naturel
    v est un nombre réel
Initialisation :
    Affecter à v la valeur 10
Traitement :
    Pour n allant de 1 à 15
        Affecter à v la valeur 0,8 × v
        Si v < 5 alors affecter à
        v la valeur v + 4
        Afficher v
    Fin de boucle
```

a) Calculer les éléments manquants du tableau ci-dessous donnant, arrondie à 10^{-2} et pour n supérieur ou égal à 0, la quantité restante de médicament minute par minute obtenue avec l'algorithme.

n	0	1	2	3	4	5
v_n	10	8	6,4			

n	6	7	8	9	10
v_n		8,15	6,52	5,21	8,17

n	11	12	13	14	15
v_n	6,54	5,23	8,18	6,55	5,24

b) Au bout de 15 minutes, quelle quantité totale de médicament a été injectée dans l'organisme ?

c) On souhaite programmer la machine afin qu'elle injecte 2 ml de produit lorsque la quantité de médicament dans le sang est inférieure ou égale à 6 ml et qu'elle s'arrête au bout de 30 minutes.

Recopier l'algorithme précédent en le modifiant pour qu'il affiche la quantité de médicament, en ml, restant dans le sang minute par minute avec ce nouveau protocole.

3) On programme la machine de façon que :

- à l'instant 0, elle injecte 10 ml de médicament ;
- toutes les minutes, elle injecte 1 ml de médicament.

On estime que 20 % du médicament présent dans le sang est éliminé par minute.

Pour tout entier naturel n, on note w_n la quantité de médicament, en ml, présente dans le sang du patient au bout de n minutes.

a) Justifier que pour tout entier naturel n, $w_{n+1} = 0{,}8w_n + 1$.

b) Pour tout entier naturel n, on pose $z_n = w_n - 5$.

Démontrer que (z_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

c) En déduire l'expression de w_n en fonction de n.

d) Quelle est la limite de la suite (w_n) ?

Quelle interprétation peut-on en donner ?

91 Limite d'un suite géométrique ROC

Le but de cet exercice est de démontrer que :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ si $-1 < q < 1$;
- q^n n'admet pas de limite quand n tend vers $+\infty$ si $q < -1$.

Pour cela, on supposera connue la propriété :

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty \text{ si } q > 1.$$

Partie A : Pour $0 \leqslant q < 1$

1) Que peut-on dire de la suite de terme général q^n quand $q = 0$?

2) On considère maintenant $q \in]0 ; 1[$.

a) Justifier que $\dfrac{1}{q} > 1$.

b) Conclure après avoir justifié que $q^n = \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{q}\right)^n}$.

Partie B : Pour $-1 < q < 0$

On considère $q \in]-1 ; 0[$ et $I =]a ; b[$ un intervalle ouvert contenant 0.

1) a) Tracer un tel intervalle $]a ; b[$ sur un axe des réels tel que $|a| < b$.

b) Tracer l'intervalle $]a ; |a|[$ sur cet axe.

2) a) Tracer un tel intervalle $]a ; b[$ sur un autre axe des réels tel que $|a| \geqslant b$.

b) Tracer l'intervalle $]-b ; b[$ sur cet axe.

3) a) Soit $c = \min(|a| ; b)$ le plus petit des deux nombres $|a|$ et b. Donner une relation d'inclusion entre les intervalles $]a ; b[$ et $]-c ; c[$.

b) Justifier qu'il existe un rang à partir duquel on a $|q|^n \in]-c ; c[$.

c) En déduire qu'il existe un rang à partir duquel $q^n \in]a ; b[$.

d) Conclure.

Partie C : Pour $q < -1$

On considère $q \in]-\infty ; -1[$ et les deux intervalles $I =]0 ; +\infty[$ et $I' =]-\infty ; 0[$.

1) Justifier que l'on ne peut pas trouver un rang à partir duquel tous les termes de la suite (q^n) sont dans I.

2) Même question pour I'.

3) Que peut-on en déduire en termes de limite ?

4) Trouver un intervalle ouvert contenant 0 ne contenant aucun terme de la suite (q^n).

Que peut-on en déduire en termes de limite ?

5) Conclure.

92 Limite(s) d'une suite géométrique

On considère une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 et $S_n = u_0 + \ldots + u_n$ la somme de ses $n+1$ premiers termes.

Recopier et compléter le tableau suivant :

u_0	q	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$
$u_0 > 0$	$q > 1$		
$u_0 > 0$	$-1 < q < 1$		
$u_0 > 0$	$q \leqslant -1$		
$u_0 < 0$	$q > 1$		
$u_0 < 0$	$-1 < q < 1$		
$u_0 < 0$	$q \leqslant -1$		

93 Suite arithmético-géométrique

On dit qu'une suite (u_n) de premier terme u_0 non nul est arithmético-géométrique si elle est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = au_n + b$ avec $a \in \mathbb{R} \setminus \{0 ; 1\}$ et $b \in \mathbb{R}^*$.

Partie A : Étude générale

1) Expliquer pourquoi on impose $a \neq 0$, $a \neq 1$ et $b \neq 0$.

2) Montrer que la suite (u_n) est constante si, et seulement si, $u_0 = \dfrac{b}{1-a}$.

Dans la suite, on considère $u_0 \neq \dfrac{b}{1-a}$ et on admet qu'alors, aucun terme de (u_n) n'est égal à $\dfrac{b}{1-a}$.

3) Justifier que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - \dfrac{b}{1-a}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est géométrique.

4) En déduire le terme général de (v_n) puis de (u_n).

5) a) Donner une condition suffisante pour que (u_n) converge. Quelle est alors sa limite ?

b) Que peut-on dire de la limite éventuelle de (u_n) dans le cas où $a > 1$?

Partie B : Application

On considère la suite (w_n) géométrique de raison q, avec $q \in \mathbb{R} \setminus \{0 ; 1\}$, et de premier terme w_0 non nul et la suite (S_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} w_k$.

1) Montrer que $S_{n+1} = qS_n + w_0$.

En déduire la nature de la suite (S_n).

2) En déduire le terme général de (S_n) en fonction de w_0, q et n.

3) Déterminer sans calcul $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ dans le cas où $-1 < q < 1$.

94 Cet exercice utilise le résultat démontré dans la partie 1 du TP 4 page 47 :

> Si une suite (u_n), minorée par un réel m, converge vers un réel ℓ alors $m \leqslant \ell$.

Partie A : Résultat préliminaire

Montrer que si une suite (u_n) converge alors la suite (u_{2n}) converge vers la même limite.

Partie B : Étude de la série harmonique

On considère la suite (u_n) de terme général $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ c'est-à-dire $u_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ (cette suite est appelée « série harmonique »).

1) Étudier les variations de la suite (u_n).

2) a) Simplifier $u_{2n} - u_n$.
   b) Combien reste-t-il de termes dans cette somme ? Quel est le plus petit de ces termes ?
   c) • D'une part, en déduire que l'on a $u_{2n} - u_n \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n}$;
      • D'autre part, montrer que $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$.
   d) En déduire une minoration de $u_{2n} - u_n$.

3) Déduire de la question 2d que (u_n) ne converge pas.

4) Que peut-on en déduire pour la limite éventuelle de la suite (u_n) ?

95 Soit (u_n) une suite croissante de premier terme u_0 strictement positif.

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = +\infty$.

96 **Question ouverte**

1) Un triangle rectangle a un côté de l'angle droit qui mesure n cm et l'hypoténuse $n+1$ cm.
   Que peut-on dire du deuxième côté de l'angle droit lorsque n devient grand ?

2) Même question avec un côté de l'angle droit qui mesure n cm et l'hypoténuse $n + \frac{1}{n}$ cm.
   On admettra que pour tous réels positifs a et b, on a $\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

97 **Question ouverte**

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 12$ et $u_{n+1} = 8u_n + 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Cette suite est-elle majorée ? Justifier.

98 **Limite d'un quotient** ROC

L'objet de cet exercice est de démontrer la propriété du cours : Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0^+$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = +\infty$.

1) Soit un réel $A \leqslant 0$.
   a) Justifier qu'il existe un rang à partir duquel on a $u_n > 0$ **et** $v_n > 0$.
   b) Comparer $\frac{u_n}{v_n}$ et A à partir de ce rang.

2) Soit un réel $A > 0$.
   a) Justifier qu'il existe un rang à partir duquel on a $u_n > \sqrt{A}$.
   b) Justifier qu'il existe un rang à partir duquel on a $0 < v_n < \frac{1}{\sqrt{A}}$.
   c) En déduire qu'il existe un rang à partir duquel on a $\frac{u_n}{v_n} > A$ puis conclure.

99 **Suites extraites** ROC

On considère une suite (u_n) et deux suites (v_n) et (w_n), dites « extraites », définies par $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.

1) Montrer que si (v_n) et (w_n) convergent vers la même limite ℓ alors (u_n) converge également vers ℓ.

2) Dans la question précédente, à l'aide d'un contre-exemple, montrer que l'hypothèse « vers la **même** limite » est essentielle.

100 **Question ouverte**

On considère la suite (v_n) définie par $v_1 = -2$ et $v_{n+1} = v_n - 2n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Cette suite est-elle minorée ? Justifier.

101 **Suites à valeurs entières**

Dans cet exercice, on s'intéresse aux suites à valeurs entières, c'est-à-dire aux suites dont tous les termes sont des nombres entiers.

1) Donner un exemple de suite à valeurs entières :
   a) croissante ; b) décroissante ; c) convergente.

2) Montrer qu'une suite convergente à valeurs entières est constante à partir d'un certain rang.

3) a) (u_n) étant une suite à valeurs entières **strictement** croissante de premier terme u_0, montrer que $u_n \geqslant u_0 + n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4) (v_n) étant une suite à valeurs entières **strictement** décroissante de premier terme v_0, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

102 **Unicité de la limite** ROC

Le but de cet exercice est de démontrer qu'une suite ne peut converger que vers une seule limite.

Pour cela, on procède par l'absurde. Soit donc une suite (u_n) et supposons qu'il existe deux nombres réels ℓ et ℓ', avec $\ell < \ell'$, tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell'$.

1) Dans un repère, placer deux réels distincts ℓ et ℓ', avec $\ell < \ell'$, sur l'axe des ordonnées.

2) Matérialiser les deux intervalles $I = \left]-\infty; \dfrac{\ell+\ell'}{2}\right[$ et $I' = \left]\dfrac{\ell+\ell'}{2}; +\infty\right[$ de deux couleurs différentes sur l'axe des ordonnées.

   a) Justifier qu'il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) appartiennent à I.

   b) Même question avec l'intervalle I'.

   c) En déduire qu'il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) appartiennent à $I \cap I'$.

3) Conclure.

103 Soit (u_n) une suite convergente vers un réel $\ell > 0$.

1) Montrer qu'il existe un rang $n_0 \geqslant 1$ à partir duquel tous les termes de la suite sont strictement supérieurs à $\dfrac{\ell}{2}$.

2) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k > \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \frac{(n+1-n_0)\ell}{2}$ pour tout $n \geqslant n_0$.

3) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$.

104 Dans le raisonnement par récurrence classique, lors de la justification de l'hérédité on suppose la propriété vraie à un certain rang n (c'est l'hypothèse de récurrence). D'une manière plus forte, on peut supposer la propriété vraie **pour tout entier naturel k inférieur ou égal à un certain rang** n, c'est-à-dire que la propriété est vraie pour tous les rangs jusqu'à n (et non pas uniquement au rang n) : pour justifier l'hérédité, il s'agit alors de montrer que la propriété est vraie au rang $n+1$.
Attention, il faudra parfois vérifier l'initialisation sur davantage de termes au départ.

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$, $u_1 = -2$ et $u_{n+1} = 4u_n - 4u_{n-1}$. Montrer en utilisant ce type de démonstration par récurrence que $u_n = (1-2n)2^n$ pour tout $n \geqslant 0$ (on réfléchira bien au nombre de termes sur lesquels doit porter l'initialisation).

105 **Binôme de Newton** ROC

Dans cet exercice, on souhaite démontrer la formule du binôme de Newton :

Soit deux réels a et b. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

On rappelle que :

- $\dbinom{n}{0} = \dbinom{n}{n} = 1$;
- pour tout entier k entre 0 et $n-1$, on a : $\dbinom{n+1}{k+1} = \dbinom{n}{k+1} + \dbinom{n}{k}$.

Partie A : Travail préliminaire

1) Montrer que :

- $\displaystyle a\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = a^{n+1} + \left[\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k\right]$
- $\displaystyle b\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \left[\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}\right] + b^{n+1}$

2) a) Écrire les deux premiers et les deux derniers termes de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}$.

   b) Recopier puis compléter les pointillés :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{\dots} a^{n+1-k} b^{\cdots}.$$

3) En déduire que l'expression $\displaystyle(a+b)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ et l'expression $\displaystyle a^{n+1} + \left[\sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k\right] + b^{n+1}$ sont égales puis que :

$$(a+b)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k.$$

Partie B : Démonstration

Démontrer la formule du binôme de Newton.

Partie C : Application

1) Dresser le triangle de Pascal jusqu'à $n = 6$.

2) En déduire la forme développée de :

   a) $(x+2)^5$
   b) $(4-\pi)^3$
   c) $\left(\sqrt{2}+2\right)^6$
   d) $\left(\sqrt{2}-2\right)^6$

3) Donner la fonction dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+2)^5$.

À la fin de ce chapitre, je dois être capable de :

- Construire une démonstration par récurrence
- Montrer qu'une suite est majorée ou minorée
- Exploiter les définitions des limites de suites
- Calculer une limite avec les propriétés d'opérations sur les limites
- Identifier une forme indéterminée et la lever si c'est possible
- Utiliser les théorèmes de comparaison et des gendarmes
- Exploiter la croissance ou la décroissance éventuelle d'une suite pour déterminer sa limite

QCM d'auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

Pour chaque question, plusieurs réponses sont proposées. Déterminer celles qui sont correctes.

106 On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 0,5u_n + 0,5 \end{cases}$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.
La propriété « $u_n \geqslant 0,75$ » est :

(a) initialisée pour $n = 1$ (b) héréditaire (c) vraie pour tout $n \geqslant 1$

107 La propriété « $2^n \geqslant n + 3$ » est :

(a) initialisée pour $n = 0$ (b) héréditaire (c) vraie pour tout $n \geqslant 3$

108 La suite (v_n) définie par $v_0 = 5$ et $v_{n+1} = 3v_n + 1$ pour tout entier naturel n est :

(a) décroissante (b) minorée (c) géométrique

109 La suite (w_n) de terme général $w_n = \dfrac{8n+5}{2n+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est :

(a) minorée par 0 (b) minorée par 2,5 (c) majorée par 4 (d) bornée

110 Si une suite est décroissante et minorée par 4, alors elle est :

(a) majorée (b) minorée par 5 (c) minorée par 3

111 Soit une suite (u_n) qui converge vers 2.
Pour le(s)quel(s) des intervalles suivants, peut-on affirmer qu'il existe un rang à partir duquel tous les termes lui appartiennent ?

(a) $]0\,;\,+\infty[$ (b) $]-\infty\,;\,2[$ (c) $]-1\,;1[$ (d) $]1{,}999\,99\,;\,2{,}000\,01[$

112 Soit une suite (v_n) qui diverge vers $-\infty$.
Pour le(s)quel(s) des intervalles suivants, peut-on affirmer qu'il existe un rang à partir duquel tous les termes lui appartiennent ?

(a) $]0\,;\,+\infty[$ (b) $]-\infty\,;\,2[$ (c) $]-1\,;\,1[$ (d) $]1{,}999\,99\,;\,2{,}000\,01[$

113 $\lim\limits_{n\to+\infty} 3+\dfrac{5}{n}-\dfrac{7}{n^2}$ est :

(a) 0 (b) 3 (c) $+\infty$ (d) $-\infty$

114 La suite de terme général -2×3^n :

(a) converge (b) diverge (c) n'a pas de limite

115 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{0{,}2^n}$ est :

(a) 0 (b) $+\infty$ (c) on ne peut pas savoir

116 $\lim\limits_{n\to+\infty} -4n^3+3n^2-6n+\pi$ est :

(a) $+\infty$ (b) $-\infty$ (c) π

117 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1-n}{5+n^2}$ est :

(a) 0 (b) $-\infty$ (c) $\dfrac{1}{5}$

118 Un encadrement de $\dfrac{6-2\cos\left(n^3\right)}{n^3}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ permettant de déterminer sa limite quand n tend vers $+\infty$ est :

(a) $\dfrac{4}{n^3}\leqslant\dfrac{6-2\cos\left(n^3\right)}{n^3}\leqslant\dfrac{8}{n^3}$

(b) $\dfrac{8}{n^3}\leqslant\dfrac{6-2\cos\left(n^3\right)}{n^3}\leqslant\dfrac{4}{n^3}$

(c) $\dfrac{6-2n^3}{n^3}\leqslant\dfrac{6-2\cos\left(n^3\right)}{n^3}\leqslant\dfrac{6+2n^3}{n^3}$

(d) $\dfrac{6+2n^3}{n^3}\leqslant\dfrac{6-2\cos\left(n^3\right)}{n^3}\leqslant\dfrac{6-2n^3}{n^3}$

119 Pour calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n^4+(-1)^n$, quel théorème utilise-t-on ?

(a) Le théorème de comparaison (b) Le théorème des gendarmes

On considère une suite (u_n).

120 Dans lesquels des cas ci-dessous peut-on affirmer que (u_n) admet une limite ?

(a) (u_n) est croissante (b) (u_n) est croissante et majorée (c) (u_n) est croissante et minorée

121 Dans lesquels des cas ci-dessous peut-on affirmer que la suite (u_n) converge ?

(a) (u_n) est croissante

(b) (u_n) est croissante et majorée

(c) (u_n) est croissante et minorée

(d) (u_n) est décroissante

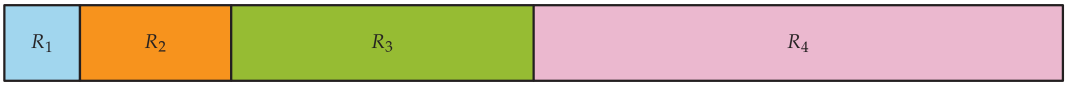
(e) (u_n) est décroissante et majorée

(f) (u_n) est décroissante et minorée

TP 1 Des rectangles et des suites (1)

INFO

Une suite de rectangles R_1, R_2, R_3, ... est construite de manière à ce que les aires de ceux-ci augmentent à chaque étape d'une valeur égale au numéro de l'étape.



- On part d'un rectangle R_1 d'aire 1 ;
- étape 1 : l'aire de R_2 est égale à celle de R_1 augmentée de 1 (le numéro de l'étape) donc $1+1=2$;
- étape 2 : l'aire de R_3 est égale à celle de R_2 augmentée de 2 donc $2+2=4$;
- étape 3 : l'aire de R_4 est égale à celle de R_3 augmentée de 3 donc $4+3=7$;
- etc.

Pour tout $n \geqslant 1$, on note A_n l'aire du rectangle R_n. On a donc $A_1=1$, $A_2=2$, $A_3=4$.

1) Dresser dans le tableur un tableau de valeurs de la suite (A_n) et faire apparaître le nuage de points représentant cette suite.

2) À quel type d'expression ce nuage de points peut-il faire penser ?

3) On peut donc conjecturer qu'il existe des nombres a, b et c tels que $A_n = an^2+bn+c$ pour tout $n \geqslant 1$.
Dans le cadre de cette conjecture, trouver a, b et c.

4) Montrer que l'expression conjecturée est bien l'expression de A_n pour tout $n \geqslant 1$.

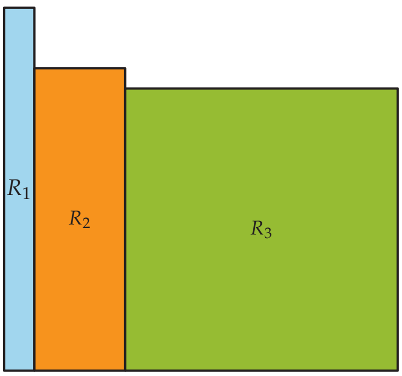
5) Soit $N \geqslant 1$ et R_N le rectangle correspondant.
En admettant que $\sum_{n=1}^{N} n^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$, déterminer en fonction de N l'aire totale de la bande jusqu'au rectangle R_N.

TP 2 Des rectangles et des suites (2)

INFO

Une suite de rectangles R_1, R_2, R_3,... est construite de la manière décrite ci-dessous :

- l'aire A_1 du rectangle R_1 est égale à 12 et sa largeur l_1 vaut 1 ;
- l'aire A_n du rectangle R_n est donnée par la formule de récurrence $A_{n+1} = 3A_n - 6$ pour tout $n \geqslant 1$;
- les largeurs des rectangles suivent une progression géométrique de raison 3.



Pour tout $n \geqslant 1$, on note A_n l'aire du rectangle R_n, l_n la largeur du rectangle R_n et h_n la hauteur du rectangle R_n.

1) En dressant dans un tableur les tableaux de valeurs des suites (A_n), (l_n) et (h_n), que peut-on penser de la hauteur des rectangles quand n tend vers $+\infty$?

2) Pour justifier cette limite, étudions la suite (A_n). Soit $v_n = A_n - 3$ pour tout $n \geqslant 1$.

a) Montrer que (v_n) est géométrique de raison 3.

b) En déduire l'expression de la suite (v_n) puis celle de (A_n) en fonction de n.

3) En déduire la limite de (h_n).

TP 3 Quand est-ce qu'on arrive ?

ALGO INFO

A Un premier exemple

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n + 3n + 5$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

1) En dressant dans un tableur ou à la calculatrice le tableau de valeurs de la suite, conjecturer le sens de variations et la limite de (u_n).

2) Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

3) **a)** Montrer que $u_n > n$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

b) Déterminer la limite de la suite (u_n).

4) On considère les deux algorithmes suivants :

```
Liste des variables utilisées
   u : réel
   n,i : entiers
Traitements
   Demander n
   Donner à i la valeur 0
   Donner à u la valeur 2
   Tant que (i⩽n) faire
      Donner à u la valeur u+3i+5
      Donner à i la valeur i+1
   Fin Tant que
Affichage
   Afficher u
```

```
Liste des variables utilisées
   u : réel
   n,i : entiers
Traitements
   Demander n
   Donner à i la valeur 0
   Donner à u la valeur 2
   Tant que (i⩽n) faire
      Donner à i la valeur i+1
      Donner à u la valeur u+3i+5
   Fin Tant que
Affichage
   Afficher u
```

De ces deux algorithmes, lequel permet d'afficher la valeur de u_n pour la valeur de n demandée au départ ?

Écrire cet algorithme dans un logiciel ou avec une calculatrice.

5) On souhaite maintenant trouver le rang du premier terme pour lequel $u_n > 1\,000\,000$.

Modifier l'algorithme dans le logiciel ou la calculatrice afin de répondre au problème.

6) Soit A un réel positif.

Modifier l'algorithme précédent pour qu'il demande une valeur de A à l'utilisateur puis trouve le rang du premier terme pour lequel $u_n > A$.

B D'autres exemples

On admet que chacune des suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ ci-dessous tend vers $+\infty$.

Déterminer, en écrivant pour chacune des suites un algorithme, le rang du premier terme pour lequel $u_n > 10^9$.

1) $u_n = n^2 + 3n + \dfrac{1}{n+1}$ 2) $u_n = 5n^2 - 1 - 30(-1)^n$ 3) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n^2 + 1$

C Vers $-\infty$

On considère la suite (w_n) définie par $w_0 = 0$ et $w_{n+1} = 3w_n - 5$ pour tout entier $n \geqslant 0$ et on admet que la suite (w_n) tend vers $-\infty$.

Déterminer à l'aide d'un algorithme le rang du premier terme de la suite (w_n) inférieur à $-1\,000\,000$.

TP 4 Une histoire de Héron

INFO

A Avec la définition

1) Rappeler la définition de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$.

2) À l'aide de cette définition, démontrer le résultat suivant :

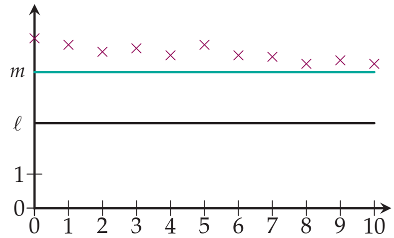
> Si une suite (u_n) converge vers un réel ℓ alors la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_{n+1}$ converge également vers ℓ.

3) a) Un élève affirme avoir trouvé une suite minorée par 2 qui converge vers 0.
Que peut-on en penser ?

b) Nous allons démontrer par l'absurde le résultat suivant :

> Si une suite (u_n), minorée par un réel m, converge vers un réel ℓ alors $m \leqslant \ell$.

On considère donc une suite (u_n), minorée par un réel m, qui converge vers un réel ℓ et on suppose que $m > \ell$ comme illustré ci-dessous.



i) Reproduire ce graphique et matérialiser l'intervalle $I = \left]-\infty ; \dfrac{m+\ell}{2}\right[$ sur l'axe des ordonnées.

ii) Justifier que I ne contient aucun terme de la suite (u_n).

iii) Conclure.

B Application

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 2}{2u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On admet que cette suite est définie pour tout entier naturel n.

1) Montrer que la fonction f définie sur $\left[\sqrt{2} ; +\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{x^2+2}{2x}$ est croissante.

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\sqrt{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

3) En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel $\ell \geqslant \sqrt{2}$.

4) a) En utilisant un résultat de la partie A, montrer que ℓ est solution de $\dfrac{2-\ell^2}{2\ell} = 0$.

b) Déterminer les deux solutions de cette équation.

c) En déduire la limite de (u_n) .

5) À l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, comparer u_4 à ℓ.
Que peut-on penser de cette approximation ?

> Cette méthode d'approximation des racines carrées est due au mathématicien grec Héron d'Alexandrie (1er siècle après J.-C).
> Elle peut être généralisée à n'importe quelle racine carrée $\sqrt{a}$ en considérant la fonction $x \mapsto \dfrac{x^2+a}{2x}$ au lieu de $x \mapsto \dfrac{x^2+2}{2x}$.

TP 5 C'est moi le premier ! ALGO

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = (2+\sin(n))n^2 + 5n + 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et les deux programmes ci-dessous écrits dans le langage AlgoBox :

Programme nº 1

```
VARIABLES
    u EST_DU_TYPE NOMBRE
    n EST_DU_TYPE NOMBRE
    A EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
    LIRE A
    n PREND_LA_VALEUR 0
    u PREND_LA_VALEUR F1(0)
    TANT_QUE (u<=A) FAIRE
        DEBUT_TANT_QUE
        n PREND_LA_VALEUR n+1
        u PREND_LA_VALEUR F1(n)
        FIN_TANT_QUE
    AFFICHER n
FIN_ALGORITHME
```

```
Fonction numérique utilisée :
F1(x)=(2+sin(x))*x*x+5*x+2
```

Programme nº 2

```
VARIABLES
    u EST_DU_TYPE NOMBRE
    n EST_DU_TYPE NOMBRE
    A EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
    LIRE A
    LIRE n
    TANT_QUE (F1(n)>A) FAIRE
        DEBUT_TANT_QUE
        n PREND_LA_VALEUR n-1
        FIN_TANT_QUE
    n PREND_LA_VALEUR n+1
    AFFICHER n
FIN_ALGORITHME
```

```
Fonction numérique utilisée :
F1(x)=(2+sin(x))*x*x+5*x+2
```

1) a) Ouvrir AlgoBox et écrire le programme nº 1.

b) Le tester pour $A = 1\,000$ et noter le résultat obtenu.

c) Ce programme affiche-t-il en sortie le premier rang à partir duquel **tous les termes de la suite** sont strictement supérieurs à A ?
Expliquer pourquoi.

d) Expliquer intuitivement pourquoi il ne semble pas possible d'écrire un tel programme.

2) Quelle condition suffisante sur une suite permet d'affirmer que le premier rang pour lequel un terme est strictement supérieur à A est le rang à partir duquel tous les termes de la suite sont supérieurs à A ?

3) Trouver une suite (v_n) dont le terme général est polynomial de degré 2 et vérifie $v_n \leqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4) a) Étudier le sens de variations de (v_n).

b) Modifier la fonction numérique utilisée dans le programme nº 1 pour le tester avec la suite (v_n) et le nombre $A = 1\,000$ (noter le résultat obtenu).

c) Justifier qu'à partir de ce rang, on est sûr que tous les termes de la suite (u_n) sont strictement supérieurs à 1 000.

d) Avec le programme nº 1, déterminer (et noter) un rang à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) sont strictement supérieurs à 100 000.
Est-ce le plus petit rang possible ?

5) **a)** Recopier et compléter le tableau ci-dessous en « faisant fonctionner à la main » le programme nº 2 quand on saisit $A = 1\,000$ et $n = 30$:

n	30	29	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$F1(n)$					$\dots$

b) Vérifier avec AlgoBox.

c) Justifier que le nombre obtenu est le plus petit rang à partir duquel tous les termes de la suite sont supérieurs à 1 000.

d) Déterminer avec AlgoBox le plus petit rang à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) sont strictement supérieurs à 100 000.

TP 6 La gestion du succès

INFO

Rhydwen a écrit un livre à succès intitulé « Vive les suites ! ».
Cela lui a rapporté 500 000 € la 1re année et son éditeur lui prédit qu'il gagnera 10 000 € de droits d'auteur chacune des années suivantes.

On appelle (u_n) la suite donnant la somme d'argent dont il dispose la ne année (on a donc $u_1 = 500\,000$) sachant qu'il a décidé que chaque année, il utilisera 10 % de l'argent dont il dispose l'année précédente.

1) **a)** Montrer que $u_2 = 460\,000$ et calculer u_3.

b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2) **a)** Préparer la feuille de calcul suivante :

	A	B	C	D
1	n	Un		
2	1	500 000		
3	2		Pourcentage prélevé	10
4	3			

b) Compléter la feuille de tableur (jusqu'à $n = 10$) en utilisant la cellule D3 de sorte que l'on puisse modifier dynamiquement la valeur qui y est présente.

3) **a)** Décrire l'évolution observée les 10 premières années (hausse ou baisse ? rapide ou lente ?).

b) Que peut-on alors penser de la somme dont Rhydwen disposera à long terme ?

4) **a)** Tabuler la suite jusqu'à $n = 50$ et décrire de nouveau l'évolution observée de la 40e à la 50e année.

b) Cela semble-t-il confirmer la réponse à la question **3b** ?

c) Proposer une conjecture sur la limite de (u_n).

5) **a)** Montrer que $100\,000 \leqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

c) Valider la conjecture de la question **4c** (on utilisera la question **1b** pour déterminer la limite).

6) Rhydwen souhaite pouvoir transmettre au moins 200 000 € à ses futur(e)s héritier(e)s mais également vivre longtemps !
En modifiant la valeur présente en D3, quel pourcentage maximum semble-t-il pouvoir prélever chaque année pour réaliser son souhait ?

Récréation, énigmes

Axiomatisons !

Les nombres entiers naturels sont connus et utilisés depuis l'Antiquité, d'abord pour dénombrer puis comme objet mathématique abstrait propre.

Au XIX^{e} siècle, le mathématicien italien Giuseppe Peano (1858-1932) propose une définition axiomatique des entiers naturels en cinq axiomes :

- L'élément appelé zéro et noté 0 est un entier naturel.
- Tout entier naturel n a un unique successeur noté $s(n)$.
- Aucun entier naturel n'a 0 pour successeur.
- Deux entiers naturels ayant même successeur sont égaux.
- Si un ensemble d'entiers naturels contient 0 et contient le successeur de chacun de ses éléments alors cet ensemble est $\mathbb{N}$.

1) Mener une recherche documentaire sur la notion d'axiome (Qu'est-ce ? À quoi servent-ils ?)
2) Lequel des axiomes précédents correspond au principe de récurrence ?
3) Quels noms portent les axiomes « classiques » de la géométrie ?

> Le mathématicien austro-américain Kurt Gödel (1906-1978) a démontré le théorème d'incertitude qui dit :
> Quel que soit le système d'axiomes dont on se dote pour décrire l'arithmétique des entiers, il existera toujours des propriétés indécidables c'est-à-dire dont on ne peut ni démontrer qu'elles sont vraies, ni démontrer qu'elles sont fausses (dans l'axiomatique des mathématiques modernes, c'est le cas de la célèbre « hypothèse du continu » par exemple).
>
> Plus simplement : quels que soient les axiomes que l'on se donne, il y aura toujours des énoncés qui ne seront ni vrais, ni faux !

À l'hôtel de Hilbert

L'hôtel de Hilbert possède une petite spécificité : il possède une infinité de chambres. Aujourd'hui, bonne nouvelle, il est complet pour toute la semaine à venir !

Le réceptionniste de l'hôtel reçoit un appel d'un groupe souhaitant réserver des chambres pour demain. Contre toute attente, il prend leur réservation, sort de derrière son comptoir et écrit le message suivant sur le panneau d'information de l'hôtel :

> Chères clientes, chers clients,
> à compter de demain, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
> les occupants de la chambre n seront
> déplacés en chambre $n + 10$.
> Veuillez nous excuser pour la gêne
> occasionnée.

1) a) Dans quelle chambre seront déplacés les occupants de la chambre 1 ? De la chambre 5 ?
b) De combien de personnes est composé le groupe ayant réservé aujourd'hui ?

2) Quel message aurait pu écrire le réceptionniste si le groupe avait compté 1 000 personnes ? Une infinité de personnes ?

ANALYSE

2

Limites et continuité

Connaissances nécessaires à ce chapitre

- Déterminer la limite éventuelle d'une suite géométrique
- Étudier la limite d'une somme, d'un produit ou d'un quotient de deux suites
- Utiliser un théorème de comparaison ou d'encadrement pour déterminer une limite de suite
- Établir (par dérivation ou non) les variations d'une fonction

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

Auto-évaluation

1 Donner la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

1) $u_n = \dfrac{1}{n}$ **3)** $u_n = \sqrt{n}$ **5)** $u_n = 0,5^n$

2) $u_n = -2n+3$ **4)** $u_n = 1,1^n$ **6)** $u_n = (-1)^n$

2 Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

1) $u_n = n^2+2n-3$ **3)** $u_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

2) $u_n = \dfrac{n+2}{n+1}$ **4)** $u_n = \dfrac{2\times 3^n+1}{3^n+4}$

3 Soit une suite géométrique $(v_n)_{n\geqslant 0}$ de raison q et de premier terme v_0. Déterminer sa limite éventuelle.

1) $q=2$ et $v_0=3$ **3)** $q=1$ et $v_0=-1$

2) $q=0,9$ et $v_0=0,1$ **4)** $q=-0,5$ et $v_0=\sqrt{2}$

4 Soit deux réels $a>0$ et $b>0$. Étudier :

1) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1-a^n}{1+a^n}$. **2)** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(a^n-b^n)$.

5 Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $u_n = n+\cos n\pi$.

1) Justifier que $n-1\leqslant u_n\leqslant n+1$.

2) En déduire la limite de la suite (u_n).

6 Soit $S_n = \dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2}+\ldots+\dfrac{n}{n^2+n}$.

1) Montrer que, pour tout entier $n\geqslant 1$:

$$\frac{n}{n+1}\leqslant S_n\leqslant\frac{n^2}{n^2+1}.$$

2) En déduire la limite de la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$.

7 Soit la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{x+1}$.

1) Soit un réel $h>-1$.

a) Montrer que $\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\dfrac{1}{\sqrt{h+1}+1}$.

b) Calculer $\displaystyle\lim_{h\to 0}\left(\sqrt{h+1}+1\right)$.

c) f est-elle dérivable en 0 ? Si oui, donner $f'(0)$.

2) Étudier de la même façon la dérivabilité de f en -1.

8 Soit la fonction $f : x\mapsto\dfrac{x}{x^2+1}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1) Justifier qu'on a le tableau de variation :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f		$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	

2) Quelles semblent être les limites de f en $\pm\infty$?

3) Résoudre l'équation $f(x)=0$ sur $\mathbb{R}$.

Voir solutions p. 419

ACTIVITÉ 1 Notion de limite

On considère la fonction suivante :

$$f \quad : \quad \begin{array}{ccc}]0\,;+\infty[& \to &]0\,;+\infty[\\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$$

Partie A : D'une approche quantitative...

1) Calculer $f(x)$ pour $x = 10\,;\,100\,;\,1\,000\,;\,10^4\,;\,10^5$; etc.

2) Que peut-on conjecturer quant à $f(x)$ lorsque $x \to +\infty$?

3) De la question précédente, déduire le complètement des notations équivalentes suivantes :

$$f(x) \to \ldots \text{ lorsque } x \to \ldots \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to \ldots} f(x) = \ldots$$

Partie B : ... à une étude qualitative

On vient de remarquer la propriété suivante, que l'on va par la suite chercher à démontrer :

« $f(x)$ prend des valeurs aussi proches de 0 que l'on veut
dès que
x est suffisamment grand. »

1) Dans cette proposition, quelle est l'hypothèse ? la conclusion ?

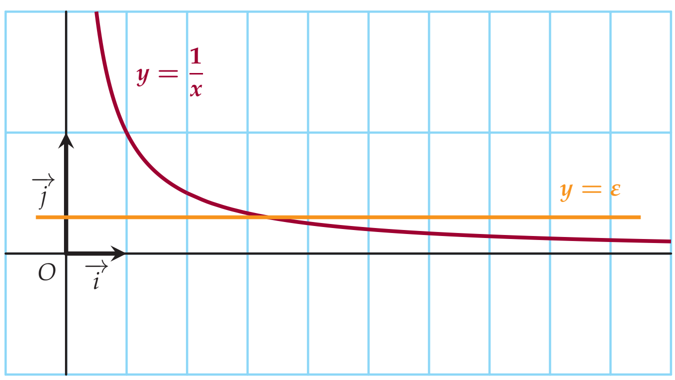
2) On considère la locution « x est suffisamment grand ». Parmi les quatre locutions données ci-dessous, deux la traduisent : lesquelles ?

- x est plus grand qu'un certain réel
- x est plus grand que tout réel
- il existe un réel A tel que $x > A$
- pour tout réel A, $x > A$

3) Même consigne avec la locution « $f(x)$ prend des valeurs aussi proches de 0 que l'on veut ». On notera $\varepsilon > 0$ le réel utilisé.

4) Détermination graphique de A.

a) Ci-dessous, on a représenté graphiquement la fonction inverse sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et on fixe $\varepsilon > 0$, un réel quelconque (de préférence petit).
Sur l'axe des abscisses, représenter le plus petit réel A à partir duquel on a $f(x) < \varepsilon$.



b) Pourquoi peut-on affirmer que, dès que $f(x) < \varepsilon$ pour un certain x, alors $f(t) < \varepsilon$ pour tout $t \geqslant x$?

5) Détermination algébrique de A.
Fixons $\varepsilon > 0$. En résolvant l'inéquation $f(x) < \varepsilon$, déterminer le plus petit réel A (que l'on exprimera en fonction de ε) tel que, si $x > A$, alors $f(x) < \varepsilon$.

ACTIVITÉ 2 Continuité d'une fonction

Partie A : Approche graphique

Aux XVII^e^ et XVIII^e^ siècles, la notion de fonction continue sur un intervalle I était celle d'une fonction dont on pouvait tracer la courbe représentative sur I sans lever le crayon.

1) Dans un repère, représenter graphiquement chacune des fonctions suivantes puis, à l'aide de la notion décrite ci-dessus, dire si elles sont continues sur leur ensemble de définition.

a) f définie sur $[-1\,;2]$ par $f(x) = x^2$.

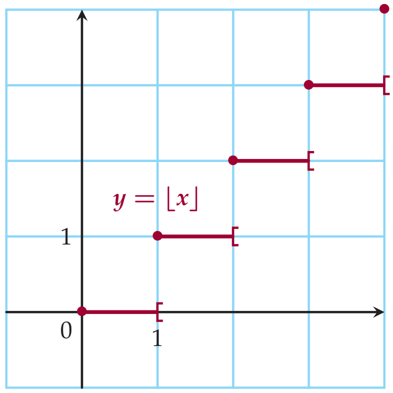
b) g définie sur $]0\,;1]$ par $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

c) u définie sur $[0\,;2]$ par $u(x) = x$ si $x \leqslant 1$ et $u(x) = 2 - x$ si $x > 1$.

d) v définie sur $[0\,;2]$ par $v(x) = 1 - x$ si $x < 1$ et $v(x) = x$ si $x \geqslant 1$.

e) E définie sur $\mathbb{R}^+$ par $E(x) = \lfloor x \rfloor$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière d'un réel x. Par exemple, $\lfloor 2{,}7 \rfloor = 2$, $\lfloor 0{,}99 \rfloor = 0$, $\lfloor 1 \rfloor = 1$, etc.

Cette fonction n'étant pas usuelle, on donne ci-dessous sa représentation graphique sur $[0\,;4]$:



2) Pour chacune des fonctions, donner les éventuels réels en lesquels il y a discontinuité.

Partie B : Étude algébrique

Au début du XIX^e^ siècle, Bolzano et Cauchy ont défini une approche plus algébrique de la notion de continuité en termes presque modernes, que l'on se propose d'explorer ci-dessous.
On reprend pour cela les fonctions u et v de la partie précédente.

1) D'après les définitions (seulement) des fonctions u et v, en quel réel x_0 y a-t-il a priori un problème de continuité ? Justifier.

2) a) Calculer les deux limites suivantes et les comparer avec la valeur de $u(x_0)$.

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} u(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} u(x)$$

b) Même question avec la fonction v.

c) En sachant que, graphiquement, la fonction u est continue en x_0 et que la fonction v ne l'est pas, donner une définition de la continuité d'une fonction en un réel x_0.

3) Représenter graphiquement une fonction f telle qu'en un réel x_0 (que l'on choisira), on ait :

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) \neq \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) \neq f(x_0)$$

ACTIVITÉ 3 Composée de deux fonctions

Partie A : De plusieurs fonctions... à une seule

On considère les deux fonctions u et v suivantes :

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x-3 \end{array} \quad \text{et} \quad v : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

À partir de ces deux fonctions, on considère l'enchaînement suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & u(x)=y & \mapsto & v(y) \end{array}$$

En notant f cet enchaînement, on a $f(x) = v(y)$. On appelle f la composée de u suivie de v.

1) a) Calculer l'image de 1 puis de 4 par la fonction f.

b) Traiter le cas général et donner l'expression de $f(x)$ en fonction de x.

2) a) Parmi u et v, quelle fonction a été utilisée en premier ? en dernier ?

b) Parmi les deux propositions suivantes, en déduire celle qui correspond à $f(x)$:

- $u(v(x))$;
- $v(u(x))$.

c) Trouver un moyen mnémotechnique logique de se rappeler de la bonne notation.

Partie B : D'une fonction... à plusieurs

Si u et v sont deux fonctions, et que f est la composée de u suivie de v, on note $f = v \circ u$ (qui se prononce « v rond u »), c'est-à-dire, pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $f(x) = v(u(x))$.
On donne les fonctions de référence a, b, c et d définies par :

$$a(x) = 2x+3 \qquad b(x) = x^2 \qquad c(x) = \sqrt{x} \qquad d(x) = \frac{1}{x}.$$

Décrire chacune des fonctions suivantes comme composées des fonctions a, b, c et d. On ne se préoccupera pas ici des ensembles de définition.

1) $f : x \mapsto 2x^2+3$
2) $g : x \mapsto (2x+3)^2$
3) $h : x \mapsto \sqrt{2x+3}$
4) $i : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$
5) $j : x \mapsto \dfrac{1}{(2x+3)^2}$
6) $k : x \mapsto \left(\dfrac{2}{x}+3\right)^2$

Partie C : Avec les ensembles de définition

Soit $u : x \mapsto x+1$ définie sur $\mathbb{R}$ et $v : x \mapsto \sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}^+$.
On pose $f = v \circ u$ et $g = u \circ v$.

1) Donner les expressions de $f(x)$ et de $g(x)$.

2) a) Quel est l'ensemble de définition de f ?

b) Coïncide-t-il avec celui de u ?

3) Mêmes questions avec les fonctions g et v.

DÉBAT 4

Soient u et v deux fonctions définies sur un intervalle I et à valeurs dans I.
A-t-on, pour tout $x \in I$, $u \circ v(x) = v \circ u(x)$, c'est-à-dire $u(v(x)) = v(u(x))$?

1. Limite d'une fonction en l'infini

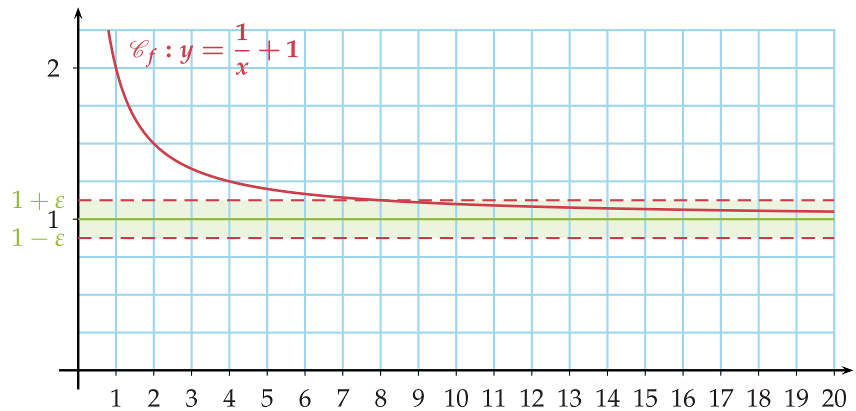
Dans toute cette partie, $\mathscr{C}_f$ désigne la courbe représentative de la fonction f dans un repère quelconque du plan.

A. Limite finie en l'infini

DÉFINITION

Soit f une fonction définie au moins sur un intervalle de $\mathbb{R}$ du type $]a\,;\,+\infty[$.
La fonction f a pour limite ℓ en $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand. On note alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.

Exemple Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x} + 1$. On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}+1\right) = 1$.
En effet, l'inverse de x se rapproche de 0 à mesure que x augmente.
Soit un intervalle ouvert I tel que $1 \in I$. Alors, $f(x)$ sera toujours dans I pour x assez grand.
Graphiquement, aussi étroite que soit une bande parallèle à la droite d'équation $y = 1$ et qui la contient, il existe toujours une valeur de x au delà de laquelle $\mathscr{C}_f$ ne sort plus de cette bande.



DÉFINITION : Asymptote horizontale

La droite d'équation $y = \ell$ est **asymptote horizontale** à $\mathscr{C}_f$ **en** $+\infty$ si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.

Remarque : On définit de façon analogue $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$ qui caractérise une asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$ d'équation $y = \ell$.

Exemple On a vu précédemment que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}+1\right) = 1$. On a aussi $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x}+1\right) = 1$.
Donc, la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

PROPRIÉTÉ (admise) : Limites finies des fonctions usuelles en $\pm\infty$

Soit n un entier naturel non nul.

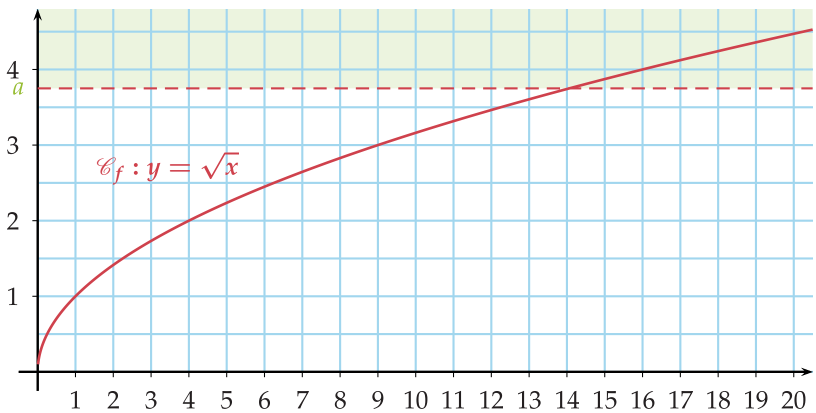
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$

B. Limite infinie en l'infini

DÉFINITION

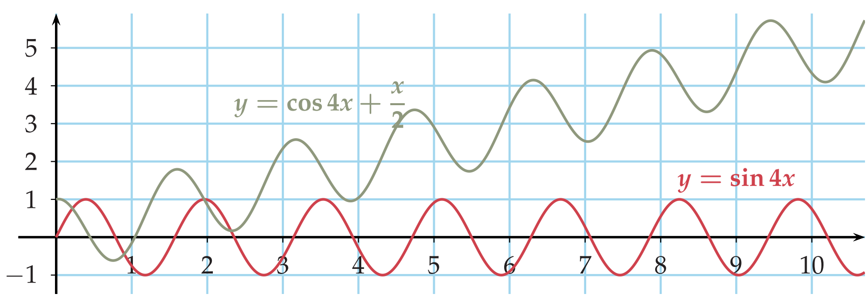
La fonction f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle de $\mathbb{R}$ du type $]a\ ;\ +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand. On note alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Exemple Soit f la fonction racine carrée. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$.
En effet, $\sqrt{x}$ devient aussi grand que l'on veut à mesure que x augmente.
Soit un intervalle ouvert $I =]a\ ;\ +\infty[$. Alors, $f(x)$ sera toujours dans I pour x assez grand.
Graphiquement, si on considère le demi-plan supérieur de frontière une droite d'équation $y = a$, il existe toujours une valeur de a au-delà de laquelle $\mathscr{C}_f$ ne sort plus de ce demi-plan.



REMARQUE :

- On définit de façon analogue : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
- Il existe des fonctions qui n'admettent pas de limite en l'infini. Par exemple, les fonctions sinus et cosinus n'admettent de limite ni en $+\infty$, ni en $-\infty$.
- Une fonction qui tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ n'est pas forcément croissante.



PROPRIÉTÉ (admise) : Limites infinies des fonctions usuelles en $\pm\infty$

Soit n un entier naturel non nul.

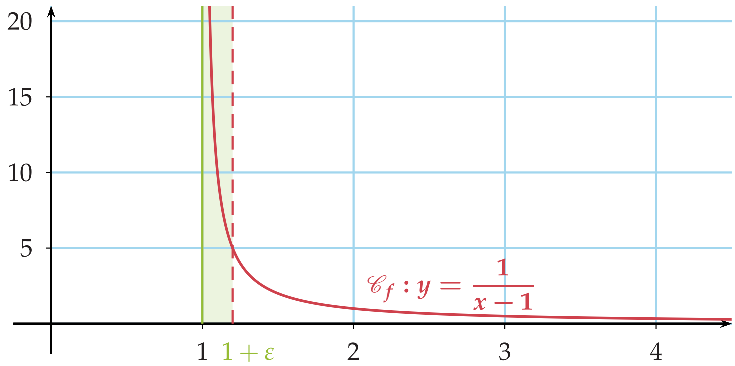
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{pour } n \text{ pair} \\ -\infty & \text{pour } n \text{ impair} \end{cases}$

2. Limite infinie en un réel

DÉFINITION

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ du type $]x_0-\varepsilon\,;\,x_0[$ ou $]x_0\,;\,x_0+\varepsilon[$. La fonction f a pour limite $+\infty$ en x_0 si tout intervalle de $\mathbb{R}$ du type $]A\,;\,+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez proche de x_0. On note alors : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$.

Exemple Soit f la fonction définie sur $]1\,;\,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$. On a $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=+\infty$.
En effet, si x tend 1, alors $x-1$ tend vers 0 et son inverse tend vers $+\infty$.
Soit un intervalle ouvert $I=]1\,;\,1+\varepsilon[$. Alors, $f(x)$ sera toujours dans I pour x assez proche de x_0. Graphiquement, $\mathscr{C}_f$ peut être aussi proche que l'on veut de la droite d'équation $x=1$.



DÉFINITION : Asymptote verticale

La droite d'équation $x=x_0$ est **asymptote verticale** à $\mathscr{C}_f$ si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$.

Exemple On a vu précédemment que $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=+\infty$.
Donc, la droite d'équation $x=1$ est asymptote verticale à l'hyperbole $\mathscr{C}_f$.

Remarque :

- Lorsque x tend vers x_0, cela peut parfois se faire en augmentant ou en diminuant. On parle alors de limite de f à gauche (resp. droite) en x_0 qu'on note $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x<x_0}} f(x)$ (resp. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x>x_0}} f(x)$).
- Une fonction admet une limite en x_0 si, et seulement si, f admet des limites à droite et à gauche en x_0 qui sont égales (ce qui n'est pas toujours le cas).
- Une fonction peut très bien ne pas avoir de limite du tout en un point.
  Par exemple, la fonction $x\mapsto \sin\dfrac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0.

PROPRIÉTÉ (admise) : Limites finies des fonctions usuelles en 0

Soit n un entier naturel non nul.

- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\dfrac{1}{x^n}=+\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}\dfrac{1}{x^n}=\begin{cases}+\infty & \text{pour } n \text{ pair}\\ -\infty & \text{pour } n \text{ impair}\end{cases}$

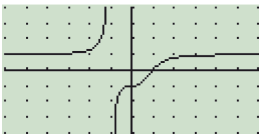
MÉTHODE 1 Interpréter graphiquement les limites d'une fonction

► Ex. 11 p. 65

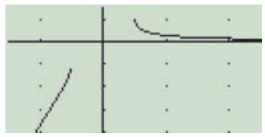
L'aperçu de la courbe représentative d'une fonction avec une calculatrice ou un logiciel peut aider à conjecturer une limite (et donc éventuellement une asymptote à la courbe) mais il faut paramétrer correctement la fenêtre d'affichage pour limiter les erreurs de jugement.

Exercice d'application Soit f une fonction dont on a un aperçu du graphe $\mathscr{C}$. Déterminer son ensemble de définition $\mathcal{D}$, puis conjecturer les limites aux bornes de $\mathcal{D}$ et les asymptotes à $\mathscr{C}$.

1) $f : x \mapsto \dfrac{x^3-1}{x^3+1}$



2) $f : x \mapsto 2x - \sqrt{4x^2-1}$



Correction

1) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. A priori, on aurait : $\lim\limits_{x\to\pm+\infty} f(x) = 1$; $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x) = -\infty$.
$\mathscr{C}$ aurait alors une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ en $\pm\infty$ et une asymptote verticale d'équation $x = -1$.

2) $\mathcal{D} =]-\infty\,;\,-\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}\,;\,+\infty[$. On a : $\lim\limits_{x\to-1/2} f(x) = -1$ et $\lim\limits_{x\to1/2} f(x) = 1$ et, il semblerait que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
$\mathscr{C}$ aurait alors une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) en $+\infty$.
La vérification des conjectures est l'objet de l'exercice 28 page 66.

3. Opérations sur les limites

PROPRIÉTÉ : Limite d'une somme, d'un produit et d'un quotient de deux fonctions

■ Limite d'une somme :

f	g	$f+g$
ℓ	ℓ'	$\ell+\ell'$
ℓ	∞	∞
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	???

■ Limite d'un produit :

f	g	fg
ℓ	ℓ'	$\ell\ell'$
$\ell\neq0$	∞	∞
∞	∞	∞
0	∞	???

■ Limite d'un quotient :

f	g	f/g
ℓ	$\ell'\neq0$	ℓ/ℓ'
$\ell\neq0$	0	∞
ℓ	∞	0
0	0	???
∞	∞	???

REMARQUE :
- ∞ peut signifier $+\infty$ ou $-\infty$. Les règles du signe d'un produit ou d'un quotient demeurent.
- Pour la limite de la différence $f-g$, on considère la limite de la somme $f+(-g)$.
- Les quatre lignes grises des tableaux correspondent aux quatre cas d'indétermination :
  - « $(+\infty)+(-\infty)$ »
  - « $\mathbf{0}\times\infty$ »
  - « $\dfrac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$ »
  - « $\dfrac{\infty}{\infty}$ »

Plusieurs techniques seront vues pour lever une indétermination. ► Ex. 2 p. 60

Exemple Soit $f : x \mapsto (1-x)\left(x^3+\dfrac{1}{x}\right)$ définie sur $\mathbb{R}^*$. Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3+\dfrac{1}{x}\right) = +\infty$ donc, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

4. Limite d'une fonction composée

A. Fonction composée

Une composée de deux fonctions correspond à un enchaînement de deux fonctions l'une après l'autre.
Par exemple, composons la fonction $f : x \mapsto 1 - x$ suivie de $g : x \mapsto \sqrt{x}$. On peut ainsi schématiser :

$$x \underset{f}{\mapsto} 1 - x \underset{g}{\mapsto} \sqrt{1-x}.$$

Cependant, on voit que la fonction g ne peut s'appliquer que si l'ensemble des images par la fonction f est inclus dans l'ensemble de définition de g.
Ainsi, pour appliquer ici la racine carrée, il faut que $1 - x \geqslant 0$ c'est-à-dire que $x \leqslant 1$.
La composée existe donc dans le schéma suivant où on précise les ensembles de départ et d'arrivée pour f :

$$\begin{array}{ccccc}]-\infty\,;\,2] & \to & [0\,;\,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \underset{f}{\mapsto} & 1-x & \underset{g}{\mapsto} & \sqrt{1-x} \end{array}$$

En composant f suivie de g, on a ainsi défini sur $]-\infty\,;\,1]$ la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x}$.

DÉFINITION

Soit f une fonction définie sur E et à valeurs dans F, et soit g une fonction définie sur F.
La composée de f suivie de g est la fonction notée $g \circ f$ définie sur E par $g \circ f(x) = g(f(x))$.

Remarque : Il ne faut pas confondre $g \circ f$ et $f \circ g$ qui sont, en général, différentes.

Exemple En reprenant f et g de l'exemple précédent, définissons $f \circ g$.
La composée de g suivie de f est possible en partant de l'ensemble de définition de g :

$$\begin{array}{ccccc} [0\,;\,+\infty[& \to & [0\,;\,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \underset{g}{\mapsto} & \sqrt{x} & \underset{f}{\mapsto} & 1-\sqrt{x} \end{array}$$

En composant g suivie de f, on a ainsi défini sur $[0\,;\,+\infty[$ la fonction $x \mapsto 1 - \sqrt{x}$.

B. Théorème de composition des limites

THÉORÈME

Soit h la composée de la fonction f suivie de g et α, β et γ trois réels ou $\pm\infty$.
Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta$ et $\lim\limits_{x\to\beta} g(x) = \gamma$, alors $\lim\limits_{x\to\alpha} h(x) = \gamma$.

Exemple Déterminons la limite en $-\infty$ de la fonction $g \circ f$ de l'exemple précédent.
La composée de $f : x \mapsto 1 - x$ suivie de $g : x \mapsto \sqrt{x}$ est $h : x \mapsto \sqrt{1-x}$ définie sur $]-\infty\,;\,1]$.
Or, $\lim\limits_{x\to-\infty} (1-x) = +\infty$ (par somme) et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ (limite de référence).
Donc, d'après le théorème de composition, $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{1-x} = +\infty$.

MÉTHODE 2 Déterminer une limite de fonction

► Ex. 16 p. 65

On applique les propriétés d'opérations sur les limites.

Si la limite est indéterminée, « $+\infty + (-\infty)$ », « $0 \times \infty$ », « $\dfrac{\infty}{\infty}$ » ou « $\dfrac{0}{0}$ », on essaye de :

- factoriser par le terme prépondérant ;
- multiplier par la quantité conjuguée[a] si des racines carrées interviennent ;
- effectuer un changement de variable (voir théorème de composition des limites).

D'autres techniques existent et seront vues ultérieurement.

a. on désigne généralement par $a - b\sqrt{c}$ la quantité conjuguée de $a + b\sqrt{c}$

Exercice d'application Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1}$ 3) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-4}{\sqrt{x} - 2}$

Correction Ces limites sont indéterminées (respectivement formes « $\infty - \infty$ », « $\dfrac{\infty}{\infty}$ » et « $\dfrac{0}{0}$ »).

1) On multiplie le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée de $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$:

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}.$$

Or, par composition : $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} = +\infty$.

Et, par somme : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right) = +\infty$. Donc, par inverse : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0$.

2) Divisons le numérateur et le dénominateur par x^2. Alors, $\dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1} = \dfrac{2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}}$.

Or, par somme : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right) = 2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right) = 1$.

Donc, par quotient : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = 2$.

3) Changeons de variable en posant $u = \sqrt{x}$. Si x tend vers 4, alors u tend vers 2.

$\dfrac{x-4}{\sqrt{x} - 2} = \dfrac{u^2 - 4}{u - 2} = \dfrac{(u+2)(u-2)}{u-2} = u + 2$ pour $u \neq 2$. Donc, par somme : $\lim\limits_{u\to 2} (u+2) = 4$.

5. Limites et comparaison

A. Théorème de comparaison

THÉORÈME

Soit f et g deux fonctions telles que $f(x) \leqslant g(x)$ sur un intervalle $]\alpha\,;\,+\infty[$ de $\mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Soit f et g deux fonctions telles que $f(x) \leqslant g(x)$ sur un intervalle $]-\infty\,;\,\beta[$ de $\mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Soit f et g deux fonctions telles que $f(x) \leqslant g(x)$ sur un intervalle $]\alpha\,;\,\beta[$ de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in]\alpha\,;\,\beta[$.

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.

Exemple Déterminons la limite en $+\infty$ et en $-\infty$ de $f(x) = x + \sin x$.
La limite de $\sin x$ en $\pm\infty$ est indéterminée donc, celle de $f(x)$ aussi.
Mais pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ donc $x - 1 \leqslant x + \sin x \leqslant x + 1$. Ainsi :

- De $x - 1 \leqslant x + \sin x$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (x-1) = +\infty$, on déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + \sin x) = +\infty$.
- De $x + \sin x \leqslant x + 1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (x+1) = -\infty$, on déduit que $\lim\limits_{x \to -\infty} (x + \sin x) = -\infty$.

B. Théorème d'encadrement dit « des gendarmes » ou « sandwich »

THÉORÈME

Soit deux réels α et ℓ et trois fonctions f, g et h telles que, pour $x > \alpha$, on a $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$.
Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \ell$.

Remarque : On a, comme pour le théorème de comparaison précédent, deux théorèmes analogues lorsque x tend vers $-\infty$ et lorsque x tend vers un réel x_0.

Exemple Déterminons la limite en $-\infty$ de $f(x) = \dfrac{x \cos x}{x^2 + 1}$.
La limite de $\cos x$ en $-\infty$ est indéterminée. Donc celle de $f(x)$ aussi.
Cependant pour tout x réel strictement négatif, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ donc $x \leqslant x \cos x \leqslant -x$.
Et en divisant membre à membre par $x^2 + 1 > 0$ on a : $\dfrac{x}{x^2+1} \leqslant \dfrac{x \cos x}{x^2+1} \leqslant \dfrac{-x}{x^2+1}$.

Pour $x \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{x}{x^2+1} = \dfrac{1}{x + \frac{1}{x}}$. Or, $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x + \dfrac{1}{x}\right) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{x^2+1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x}{x^2+1} = 0$.

Donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x \cos x}{x^2+1} = 0$.

6. Continuité d'une fonction

Remarque : Les programmes limitent la continuité à une approche intuitive qui est de considérer qu'une fonction est continue sur un intervalle I si sa courbe représentative sur I peut être tracée entièrement sans lever le crayon.

PROPRIÉTÉ (admise)

- Les fonctions usuelles (affines, carré, inverse, racine carrée, valeur absolue) sont continues sur tout intervalle inclus dans leur ensemble de définition.
- Toute fonction construite algébriquement (par somme, produit, inverse ou composée) à partir de fonctions usuelles est continue sur tout intervalle de son ensemble de définition.
- On convient qu'une flèche oblique dans un tableau de variation traduit la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.
- Une fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle.

Remarque : Attention, la réciproque de cette dernière propriété est fausse.
Par exemple, la fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais non dérivable en 0.

MÉTHODE 3 Interpréter graphiquement la continuité d'une fonction

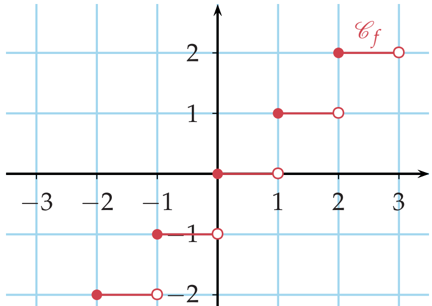
► Ex. 40 p. 68

Par convention, une fonction est continue là où elle est tracée. S'il n'y a pas continuité en x_0 :

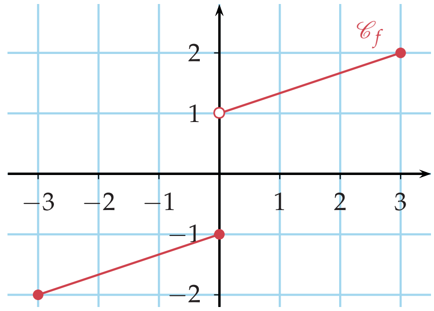
- le symbole • indique le point de la courbe de coordonnées $(x_0\ ;\ f(x_0))$;
- le symbole ∘ indique un point qui n'appartient pas à la courbe mais dont l'ordonnée est égale à la limite à gauche ou à droite en x_0.

Exercice d'application Déterminer graphiquement les intervalles sur lesquels f est continue.

1) Soit la fonction partie entière $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor$.



2) Soit la fonction f représentée ci-dessous.



Correction

1) En tout point d'abscisse $a \in \mathbb{Z}$, $\mathscr{C}_f$ présente un saut : on a $f(a) = a$ mais $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = a - 1$.

Ainsi, f n'est pas continue en a mais f est continue sur tout intervalle $[a\ ;\ a+1[$.

2) f est « affine par morceaux ». $\mathscr{C}_f$ a un « saut » en 0 donc f n'est pas continue sur $[-3\ ;\ 3]$ mais elle est continue sur $[-3\ ;\ 0]$ et $]0\ ;\ 3]$. En effet, on a $f(0) = -1$ mais $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 1$.

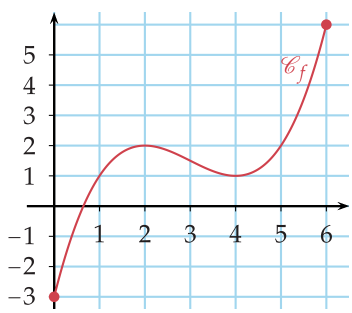
7. Théorème des valeurs intermédiaires

THÉORÈME : Cas général

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant deux réels a et b tels que $a < b$.
Si f est continue sur $[a\ ;\ b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c appartenant à $[a\ ;\ b]$ tel que $f(c) = k$.

Remarque : f prend au moins une fois toute valeur intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$.
Autrement dit, l'équation $f(x) = k$ a au moins une solution dans $[a\ ;\ b]$ et, sur $[a\ ;\ b]$, la courbe représentative de f coupe la droite d'équation $y = k$ en un point au moins.

Exemple Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ 6]$ par $f(x) = \dfrac{x^3}{4} - \dfrac{9}{4}x^2 + 6x - 3$.



On dresse le tableau de variation de f.

x	0	2	4	6
f	-3 ↗	2 ↘	1 ↗	6

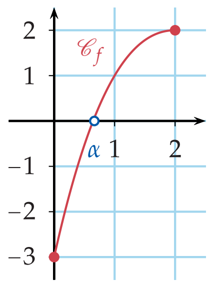
f admet pour minimum -3 et pour maximum 6.
f est continue sur $[0\ ;\ 6]$.

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, f prend toutes les valeurs de $[-3\ ;\ 6]$. En particulier, l'équation $f(x) = 0$ a au moins une solution dans $[0\ ;\ 6]$.

THÉORÈME : Cas d'une fonction strictement monotone

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant deux réels a et b tels que $a < b$.
Si f est continue et **strictement monotone** sur $[a\,;\,b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe **un unique** réel c appartenant à $[a\,;\,b]$ tel que $f(c) = k$.

Exemple Reprenons la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{4} - \dfrac{9}{4}x^2 + 6x - 3$.



x	0	α	2
f	-3 ↗	0 ↗	2

Sur $[0\,;\,2]$, f est continue, strictement croissante et admet pour minimum -3 et maximum 2.
Donc, f prend une fois, et une seule, toutes les valeurs intermédiaires entre -3 et 2.
En particulier, l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution α entre 0 et 2.

Remarque : Le théorème des valeurs intermédiaires s'applique aussi pour f continue sur un intervalle I de type : $[a\,;\,b[$, $]a\,;\,b]$, $]a\,;\,b[$, $[a\,;\,+\infty[$, $]a\,;\,+\infty[$, $]-\infty\,;\,b]$ ou $]-\infty\,;\,b[$, $]-\infty\,;\,+\infty[$.
Si une borne a ou b de l'intervalle est ouverte, alors on remplace $f(a)$ ou $f(b)$ par la limite de f en cette borne ; si une borne de l'intervalle est $\pm\infty$, alors on considère la limite de f en $\pm\infty$.

MÉTHODE 4 Exploiter le théorème des valeurs intermédiaires

▶ Ex. 45 p. 69

Le théorème des valeurs intermédiaires (T.V.I.) est utile pour prouver l'existence d'une solution d'une équation du type $f(x) = k$ et dénombrer ces solutions. Pour cela :

- On dresse le tableau de variation de la fonction f ;
- On applique le T.V.I. à chaque intervalle où la fonction est strictement monotone.

Exercice d'application Dénombrer les solutions de l'équation (E) : $x^4 + 3x^3 + x^2 + 1 = 0$.

Correction $f : x \mapsto x^4 + 3x^3 + x^2 + 1$ est une fonction polynôme de degré 4 dérivable sur $\mathbb{R}$.
$f'(x) = 4x^3 + 9x^2 + 2x = x(4x^2 + 9x + 2) = x(x+2)(4x+1)$ après factorisation du trinôme.
On établit alors le tableau de signes de $f'(x)$ et de variation de f :

x	$-\infty$	α	-2	β	$-\frac{1}{4}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$ ↘	0 ↘	-3 ↗	0 ↗	$\simeq 1{,}02$	↘	1	↗	$+\infty$

Sur $]-\infty\,;\,-2]$, f est continue, strictement décroissante et : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $f(-2) = -3$.
Donc, d'après le T.V.I., l'équation (E) a une unique solution α inférieure à -2.
Sur $\left[-2\,;\,-\dfrac{1}{4}\right]$, f est continue, strictement croissante et : $f(-2) = -3$; $f\left(-\dfrac{1}{4}\right) \approx 1{,}02 > 0$.
Donc, d'après le T.V.I., l'équation (E) a une unique solution β comprise entre -2 et $-\dfrac{1}{4}$.
Sur $\left[-\dfrac{1}{4}\,;\,0\right]$ et $[0\,;\,+\infty[$, le minimum de f est $1 > 0$ donc on n'y trouve pas de solution.
Conclusion : l'équation (E) admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.

S'entraîner

Activités mentales

1 Déterminer les limites suivantes.

1) $\lim\limits_{x\to 0} \left(x^3+5\right)$

2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\sqrt{x}+2\right)$

3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-2\right)$

4) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2}{(x+1)^2}$

5) $\lim\limits_{x\to -\infty} x^2(1-x)$

6) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \dfrac{x}{2-x}$

7) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \left(1+\sqrt{-x}\right)$

8) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

2 Déterminer la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$.

1) $f(x) = x^{2\,016}$

2) $f(x) = x^{2\,017}$

3) $f(x) = x^2+3x-5$

4) $f(x) = x^3-2x$

5) $f(x) = \dfrac{3}{x+5}$

6) $f(x) = \dfrac{x}{2}-\dfrac{2}{x}$

7) $f(x) = x(1-x)$

8) $f(x) = x(x+1)(x+2)$

9) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

10) $f(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

11) $f(x) = \dfrac{x^2-x}{x^3-2}$

12) $f(x) = \dfrac{3x^3+2}{2x^2+4}$

3 Étudier la limite de f en 1 à gauche et à droite.

1) $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$

2) $f(x) = \dfrac{1-x}{x}$

3) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x^2+6x-7}$

4) $f(x) = \dfrac{1}{\lfloor x \rfloor}$

4 Soit f et g deux fonctions. Justifier par un contre-exemple que les implications suivantes sont fausses.

1) $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} g(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{+\infty} (f(x)-g(x)) = 0.$

2) $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} g(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1.$

3) $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{1}{g(x)} = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{+\infty} f(x)g(x) = 0.$

5 Soit un réel $x > 0$. Est-il vrai ou faux que :

1) $f(x) \geqslant x^2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$?

2) $f(x) \leqslant \dfrac{1}{x} \Rightarrow \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$?

3) $1 \leqslant f(x) \leqslant x+1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x^2} = 0$?

6 On donne une limite d'une fonction f. En déduire l'équation d'une éventuelle asymptote au graphe de f.

1) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$

2) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 10^{99}$

3) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

4) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0$

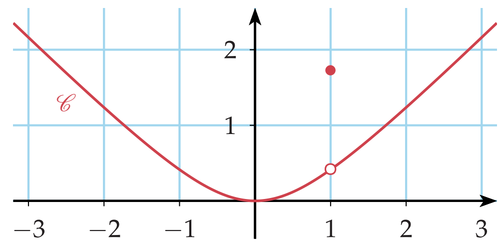
5) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = +\infty$

6) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -10^{99}$

7 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+1}-1 & \text{si } x \in \mathbb{R}\setminus\{1\} \\ \alpha & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

de graphe $\mathscr{C}$ dans le repère ci-dessous où • indique un point qui est sur $\mathscr{C}$ et ∘ un point qui n'est pas sur $\mathscr{C}$.



1) Justifier que f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

2) Donner les valeurs de $f(1)$ et des limites de f en 1 à gauche et à droite.

3) Que doit valoir α pour que f soit continue ?

8 Soit $f : x \mapsto x^3$ la fonction cube.

1) Déterminer les limites de f en $\pm\infty$.

2) Dresser le tableau de variation de f.

3) Justifier l'unique solution des équations suivantes :

a) $f(x) = 4$ sur $[1{,}5\,;\,1{,}6]$ **b)** $f(x) = -3$ sur $\mathbb{R}$

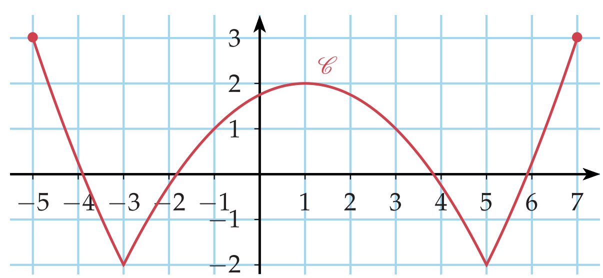
9 Soit $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ la fonction partie entière.

1) Représenter graphiquement cette fonction.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

a) $\lfloor x \rfloor = \dfrac{1}{2}$ **b)** $\lfloor x \rfloor = 1$

10 Soit une fonction f définie sur $I = [-5\,;\,7]$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}$ est tracée ci-dessous.



1) Justifier que f est continue sur I.

2) Établir le tableau de variation de f sur I.

3) Dénombrer les solutions de l'équation $f(x) = 0$:

a) dans $[1\,;\,5]$ **b)** dans $[-1\,;\,1]$ **c)** dans I

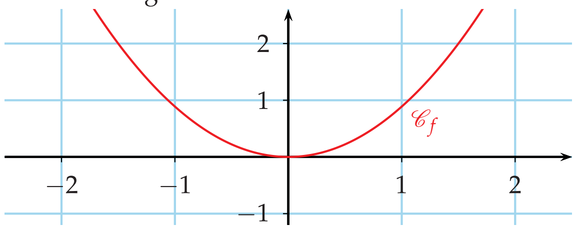
Limites : interprétation graphique

11 ▶ MÉTHODE 1 p. 58

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2\left(1 - \frac{x^2}{9}\right).$$

1) Conjecturer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$ à partir de la représentation graphique ci-dessous obtenue à l'aide d'un logiciel.



2) Étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

3) Expliquer pourquoi la conjecture était erronée.

12 INFO

Soit g la fonction définie par :

$$g(x) = \frac{x}{\sqrt{3x^2 + x + 7}}$$

représentée par $\mathscr{C}$ dans un repère.

1) Donner l'ensemble de définition de la fonction g.

2) À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique :

a) Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

b) Conjecturer une valeur approchée de la limite en $+\infty$ de la fonction g.

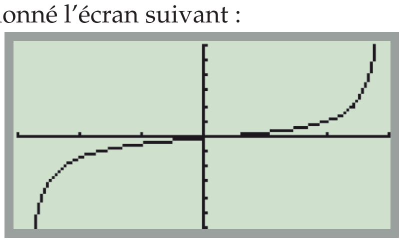
3) Déterminer par calcul la valeur exacte de la limite de g en $+\infty$.

13 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\,;\,3\}$ par :

$$f(x) = \frac{1 - 3x}{x^2 - 9}.$$

1) Déterminer la limite de f en $-\infty$ et $+\infty$.

a) Sur une calculatrice, on a tracé le graphe de f ce qui a donné l'écran suivant :



b) Expliquer pourquoi il semble apparaître une contradiction.

14 Soit h la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$h(x) = \frac{5x - 8}{2x + 1}.$$

Avec une calculatrice, on a établi le tableau suivant :

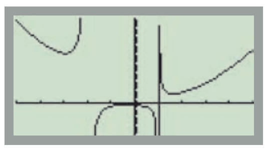
n	3	4	5	6
$h(10^n)$	2,494 753	2,499 475	2,499 948	2,499 995

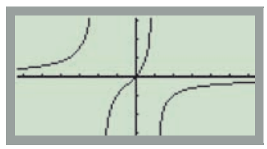
1) Conjecturer la limite de f en $+\infty$ puis, la justifier.

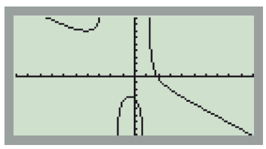
2) Interpréter graphiquement cette limite.

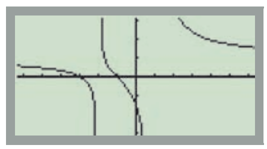
15 Chacune des quatre captures d'écran représente une des quatre fonctions définies sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\,;\,1\}$. Sans utiliser la calculatrice ou un logiciel, associer chaque capture d'écran à sa fonction.

- $f : x \mapsto \dfrac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + x - 2}$
- $f : x \mapsto \dfrac{7 - x^3}{x^2 + x - 2}$
- $f : x \mapsto -\dfrac{2x}{x^2 + x - 2}$
- $f : x \mapsto \dfrac{x^4 + 2}{x^2 + x - 2}$

a


c


b


d


Limites : opérations

16 ▶ MÉTHODE 2 p. 60

Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition $\mathcal{D}$.

1) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 6 \quad \mathcal{D} =]-\infty\,;\,+\infty[$

2) $f(x) = \dfrac{1}{x+2} \quad \mathcal{D} =]-\infty\,;\,-2[\cup]-2\,;\,+\infty[$

3) $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x-1} \quad \mathcal{D} =]-\infty\,;\,1[\cup]1\,;\,+\infty[$

4) $f(x) = \dfrac{1-2x}{(x-2)^2} \quad \mathcal{D} =]-\infty\,;\,2[\cup]2\,;\,+\infty[$

17 Déterminer les limites en $\pm\infty$ des fonctions polynômes f, g et h.

1) $f(x) = 7x^5 - 3x^2 + 2x + 1$.

2) $g(x) = 3x^6 - x^4 + 2x + 3$.

3) $h(x) = 3x^3x - 2x^2 + 7x + 2$.

18 Soit la fonction f définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ par :

$$f(x) = \frac{-5x+3}{x-2}.$$

1) Exprimer $f(x)$ sous la forme $a + \dfrac{b}{x-2}$.
2) Donner les limites aux bornes de $\mathcal{D}$.
3) Dresser le tableau de variation f.

19 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 - x - 6}{x-2}.$$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)$ et $\lim\limits_{x\to 2}(x^3 - x - 6)$.
En déduire que la limite de f en 2 est indéterminée.
2) Avec la calculatrice, faire un tableau de valeurs de $f(x)$ pour conjecturer la limite de f en 2.
3) Donner le développement de $(x-2)(x^2+2x+3)$.
S'en servir pour déterminer la limite de f en 2.

20 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - \sqrt{x^2+1}.$$

1) Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2) a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ semble indéterminée. Pourquoi ?
b) Démontrer que, pour tout réel x :

$$f(x) = -\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}.$$

c) En déduire la limite de f en $+\infty$.

21 Calculer les limites en $\pm\infty$ des fonctions f, g et h.
1) $f : x \mapsto x\left(\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2+1}\right)$.
2) $g : x \mapsto x\left(\sqrt{x^2-1} - \sqrt{2x^2+1}\right)$.
3) $h : x \mapsto x\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} - 1\right)$

22 Calculer les limites suivantes, à gauche et à droite s'il y a lieu.
1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$
2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$
3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{1-\sqrt{1-x^2}}$
4) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x}$

23 Étudier la limite de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
1) $f(x) = x^2 - 5x + 6$
2) $f(x) = -4x^2 + 6x - 7$
3) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$
4) $f(x) = \dfrac{2x^2-3x+5}{x^3+x-3}$
5) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1} - x$
6) $f(x) = \dfrac{2x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}$
7) $f(x) = 2x - \sqrt{4x^2-1}$
8) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-2x+3}}{x}$

24 **En -2, c'est rationnel !**
Étudier la limite de la fonction f en -2.
1) $f(x) = \dfrac{x-4}{x^2+3x+2}$
2) $f(x) = \dfrac{-x^2+x+6}{2x^2+5x+2}$
3) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{(x+2)^2}$
4) $f(x) = \dfrac{x^3+8}{x^2-x-6}$

25 **En 0, c'est radical !**
Étudier la limite de la fonction f en 0.
1) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$
2) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$
3) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$
4) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x^2-2x}$

26 Déterminer les limites suivantes.
1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+3}{3x-2}$
2) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{x-1}{x^2+x-2}$
3) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{\dfrac{2x-1}{x-2}}$
4) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{x-1}{x^2+x-2}$

27 Déterminer les limites suivantes.
1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{5-\dfrac{4}{x^2}}$
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(2-\dfrac{1}{x}\right)^3$
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-\sqrt{x})$
4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sqrt{\dfrac{2-x}{x}}$

28 Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition (on pourra s'appuyer sur les conjectures émises dans la méthode 2 page 60).
1) $f : x \mapsto \dfrac{x^3-1}{x^3+1}$
2) $f : x \mapsto 2x - \sqrt{4x^2-1}$

29 INFO
On s'est servi d'un logiciel de calcul formel :

```
1  f:=x->(2x+1)/(x-2)+(2x-1)/(x+2)
```

$$x \to \frac{2*x+1}{x-2} + \frac{2*x-1}{x+2}$$

```
2  limite(f(x),x,-infinity)
```

$$4$$

```
3  limite(f(x),x,-2,-1)
```

$$+\infty$$

```
4  limite(f(x),x,-2,+1)
```

$$-\infty$$

1) Quelle est la fonction f étudiée ?
Quel est son ensemble de définition $\mathcal{D}$?
2) Expliquer les limites obtenues par le logiciel.
Les vérifier par le calcul.
3) Déterminer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$, puis toutes les asymptotes à la courbe représentative de la fonction f.

Limites : comparaison/encadrement

30 Soit une fonction f telle que $f(x)$ vérifie une inégalité ou un encadrement sur un ensemble donné. Indiquer les limites qu'on peut en déduire parmi les deux proposées.

1) Pour tout réel $x \neq 0$, on a $\frac{1}{x} \leqslant f(x)$.

ⓐ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x)$ ⓑ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x)$

2) Pour tout réel $x \neq 0$, on a $f(x) \leqslant \frac{1}{x}$.

ⓐ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x)$ ⓑ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x)$

3) Pour tout réel $x > 1$, on a $x + \frac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant x + 1$.

ⓐ $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x)$ ⓑ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

4) Pour tout réel $x > 0$, on a $-\frac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x}$.

ⓐ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x)$ ⓑ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

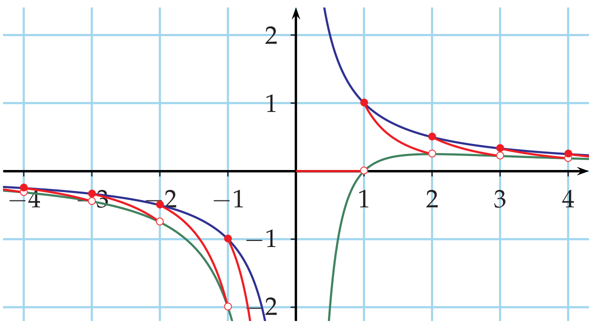
5) Pour tout réel $x \in]0\,;\,1[$, on a $|f(x) - 1| \leqslant x$.

ⓐ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x)$ ⓑ $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x)$

31 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{\lfloor x \rfloor}{x^2}$$

représentée dans le repère ci-dessous avec deux autres courbes d'équations $y = \frac{1}{x}$ et $y = \frac{x-1}{x^2}$.



1) Démontrer que, pour tout réel $x \neq 0$;

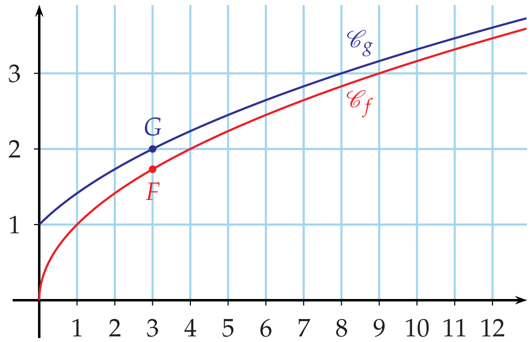
$$\frac{x-1}{x^2} < f(x) \leqslant \frac{1}{x}.$$

2) En déduire la limite de f en $-\infty$ et $+\infty$.

32 Soit f et g les fonctions définies sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ et } g(x) = \sqrt{x+1}.$$

Dans le repère ci-dessous, on a représenté les graphes de f et g et deux points $F(x\,;\,f(x))$ et $G(x\,;\,g(x))$.



1) Vérifier que $FG = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$.

2) Soit la fonction $d : x \mapsto FG$.

a) Conjecturer la limite de d en $+\infty$.

b) Démontrer que, pour tout réel $x > 0$:

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}.$$

c) Démontrer que, pour tout réel $x > 0$:

$$0 \leqslant h(x) \leqslant \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

d) En déduire la limite de h en $+\infty$.

Comportement asymptotique

33 Déduire de chaque limite l'équation d'une éventuelle asymptote au graphe de la fonction f.

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$

2) $\lim\limits_{x \to +3} f(x) = -\infty$

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

4) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = +\infty$

5) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

6) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -\infty$

7) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 10^{100}$

8) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$

34 Le graphe d'une fonction f admet une asymptote d'équation donnée. Déduire les limites possibles de f.

1) $x = 1$

2) $y = -2$

3) $y = 4$

4) $x = 0$

5) $x = -3$

6) $y = 0$

35 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = -2 + \frac{1}{x}.$$

1) Donner les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2) Donner les limites de f à droite et à gauche en 0.
3) Déduire de 1 et 2 les asymptotes à la courbe représentative de la fonction f dans un repère.

36 INFO

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\,;\,2\}$ par :

$$g(x) = \frac{-3x^2+5}{x^2-4}.$$

1) Donner les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$ puis en -2 et en 2.
2) Donner les équations des asymptotes à la courbe $\mathscr{C}$.
3) Avec un logiciel de calcul formel, étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à son asymptote horizontale.

37 INFO

Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$h(x) = \frac{2x^3+x-1}{x^3-1}$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1) Donner, à l'aide d'un logiciel de calcul formel, les limites de h en $+\infty$ et en $-\infty$ puis en 1.
2) En déduire les équations des asymptotes à $\mathscr{C}$.

38 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\,;\,3\}$ par :

$$f(x) = \frac{-4x^2+1}{x^2-9}$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
2) En déduire les équations des asymptotes à $\mathscr{C}$.
3) Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à son asymptote horizontale.

39 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{2x^3+4x-1}{x^3-1}.$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

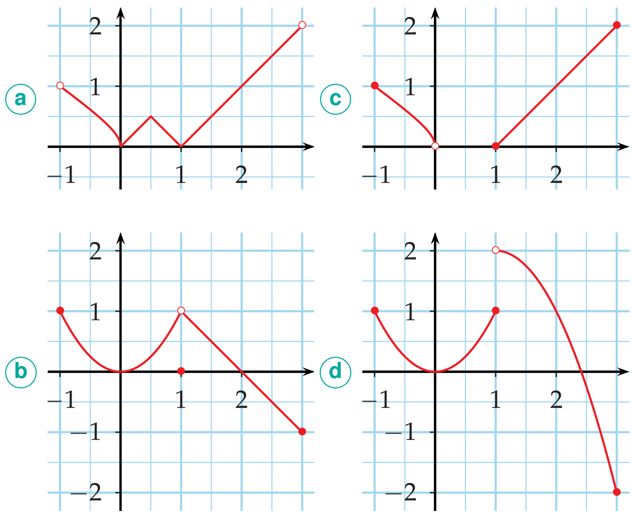
1) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
2) En déduire les équations des asymptotes à $\mathscr{C}$.

Continuité

40 MÉTHODE 3 p. 62

Dans chaque repère ci-dessous, la courbe tracée représente une fonction f.

1) Déterminer les intervalles où f est continue.
2) Donner l'image de 1 par la fonction f.
   Coïncide-t-elle avec les limites de f en 1, à gauche et à droite ?



41 Soit la fonction f définie par ;

$$f(x) = (x-1)\sqrt{1-x^2}.$$

1) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f.
2) Représenter graphiquement f à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel.
3) Étudier la continuité de f sur $\mathcal{D}$.

42 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \leqslant -1 \\ -2x-1 & \text{si } x > -1 \end{cases}.$$

1) Tracer la courbe représentative de f.
2) La fonction f est-elle continue en 1 ?
3) Déterminer $\displaystyle\lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x)$ et $\displaystyle\lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x)$.

43 La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 2+\sqrt{5} & \text{si } x \leqslant 0 \\ \sqrt{9+4\sqrt{5}} & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

est-elle continue en 0 ?

44 ALGO

On considère l'algorithme suivant.

```
Saisir x
Si x⩽-1 alors f prend la valeur x+2
Sinon f prend la valeur x²
Fin Si
Afficher f
```

1) Que vaut f en sortie si on saisit pour x :
- -2
- 2
- -1
- $-1{,}01$
- $-0{,}99$

2) Soit f la fonction définie par l'algorithme.
a) Exprimer $f(x)$ selon les valeurs de x.
b) Représenter graphiquement la fonction f.

3) La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Théorème des valeurs intermédiaires

45 ► MÉTHODE 4 p. 63

Soit la fonction f définie sur $I = [-4\,;\,1]$ par :

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 3$$

dont les variations sont données par le tableau suivant :

x	-4		-3		-1		1
f	-1	↗	3	↘	-1	↗	19

1) Justifier que f est continue sur I.

2) Dénombrer les solutions de l'équation $f(x) = 2$.

3) a) Justifier que l'équation $f(x) = 4$ admet une unique solution α.
b) Déterminer un encadrement de α à l'unité près.

46 Soit la fonction f définie sur $[-1\,;\,3]$ par :

$$f(x) = 0{,}4x^5 - 8x - 3.$$

1) Dresser le tableau de variation de f.

2) Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution dans l'intervalle $[2\,;\,3]$.

3) Chercher une valeur approchée de cette solution à l'aide d'une calculatrice (arrondir à 0,01 près).

47

1) Montrer que l'équation :

$$-2x^3 - 6x^2 + 18x + 59 = 0$$

admet une unique solution réelle α.

2) Avec une calculatrice, encadrer α au dixième près.

48 Soit la fonction polynôme de degré 2 :

$$f : x \mapsto 4x^2 - 8x + 7.$$

1) Mettre $f(x)$ sous forme canonique.

2) En déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$ en fonction de la valeur réelle de k.

49 Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - x^2 + x + 2 \text{ et } g(x) = x + 2.$$

1) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
a) Démontrer que l'équation $f(x) = g(x)$ admet une solution unique α dans $[-1\,;\,0]$.
Qu'en est-il sur $\mathbb{R}$?
b) Donner un encadrement de α à 0,001 près à l'aide d'une calculatrice.

50 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x - 4.$$

1) Déterminer les solutions de l'équation $f(x) = -4$.

2) Dresser le tableau de variation de f.

3) Donner, en justifiant, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = -12$.

4) Existe-t-il un réel y tel que l'équation $f(x) = y$ n'ait aucune solution ?

51 Une fonction g a pour tableau de variation :

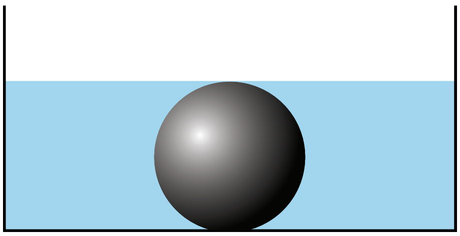
x	-10		-4		0		3		10
g	$\sqrt{2}$	↘	$-\pi$	↗	2	↘	-4	↗	$+\infty$

Discuter, suivant la valeur de k, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$.

Problèmes

52 Boule immergée dans l'eau

Une boite cylindrique de rayon 12 cm contient de l'eau jusqu'à une hauteur de 5 cm. On immerge une boule métallique dans ce récipient et on constate que la surface de l'eau est tangente à la boule. On désigne par x le rayon de la boule en millimètre.



1) a) Démontrer que $25 \leqslant x \leqslant 120$.

b) Démontrer que x est solution de l'équation :

$$x^3 - 21\,600x + 540\,000 = 0 \qquad \text{(E)}$$

2) a) Démontrer que l'équation (E) admet deux solutions positives α et β telles que :

$$\alpha \in [25{,}6\ ;\ 26] \quad \text{et} \quad \beta \in [125\ ;\ 135].$$

b) Déterminer alors une valeur approchée du rayon de la boule à 0,1 mm près.

53 Partie entière et continuité

Soit la fonction f définie sur $[0\ ;\ 4[$ par :

$$f(x) = x^2 - \lfloor x \rfloor.$$

où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x.

1) À l'aide de la calculatrice, tracer une représentation graphique de f.

2) La fonction f est-elle continue sur $[0\ ;\ 4[$?
Sinon, indiquer pour quelles valeurs elle n'est pas continue.

3) Soit la fonction g définie sur $[0\ ;\ 4[$ par :

$$g(x) = (x-3)\left(x^2 - \lfloor x \rfloor\right).$$

Étudier la continuité de g en $x \in \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\}$.

54

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\ ;\ 1\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$$

et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (unité graphique : 2 cm).
Le but de ce problème est l'étude de la fonction f et la résolution graphique d'une équation à partir de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ représentative de f.

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x^3 - 3x - 4.$$

1) Étudier les variations de la fonction g.

2) Démontrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in]2{,}1\ ;\ 2{,}2[$ tel que $g(x) = 0$.
Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de α.

3) Étudier le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B : Étude de la fonction f

1) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son domaine de définition.

2) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\ ;\ 1\}$:

$$f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}.$$

3) En déduire le tableau de variation de la fonction.

4) a) Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\ ;\ 1\}$:

$$f(x) = x + 2 + \frac{x+2}{x^2-1}.$$

b) En déduire que la courbe $(\mathscr{C}_f)$ admet une asymptote oblique $(\mathcal{D})$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

c) Étudier la position de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ par rapport à $(\mathcal{D})$.

5) Tracer la droite $(\mathcal{D})$ et la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

55 Théorème de Bolzano

1) Justifier le théorème suivant :
« *Si f est une fonction définie et continue sur $[a\ ;\ b]$ et si $f(a)f(b) < 0$, alors il existe au moins un réel c dans l'intervalle $[a\ ;\ b]$ tel que $f(c) = 0$* ».

2) En déduire que, si deux fonctions f et g sont continues sur un même intervalle $I = [a\ ;\ b]$ et si leur différence change de signe sur I, alors il existe un réel $c \in I$ tel que $f(c) = g(c)$.

56

Partie A

Soit x un réel positif.

1) Démontrer que : $\sqrt{x} > x \Leftrightarrow x - x^2 > 0$.

2) En déduire que : $\sqrt{x} > x \Leftrightarrow 0 < x < 1$.

Partie B : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{x}{2} - \frac{2}{x}$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1) Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2) Déterminer la limite de f en 0.
Que peut-on en déduire graphiquement ?

3) Dresser le tableau de variation de f sans utiliser la dérivée de f.

4) Étudier le tableau de signe de $f(x)$.

Partie C : Étude d'une fonction

Soit g la fonction définie sur $[-2\,;\,0[\,\cup\,[2\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = \sqrt{\frac{x}{2} - \frac{2}{x}}$$

et $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative.

1) Étudier les limites de g en $+\infty$ et 0.
Que peut-on en déduire ?

2) Dresser le tableau de variation de g, en utilisant les variations de la fonction f.

3) En utilisant le résultat établi dans la partie A, résoudre l'inéquation : $g(x) > f(x)$.
Que peut-on en déduire ?

4) Tracer les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

57 Soit la fonction $x \mapsto \sqrt{\dfrac{5x}{3x-5}}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f.

2) Écrire f comme composée de deux fonctions.

3) Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et en déduire les équations des asymptotes à $\mathscr{C}$.

4) Tracer les asymptotes à $\mathscr{C}$, puis la courbe $\mathscr{C}$.

58 Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{ax+b}{2x-1}$ où a et b sont deux réels et $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère.
On sait que : $f(0) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$.

1) a) Déterminer a et b.

b) Montrer que $f(x) = \dfrac{a}{2} + \dfrac{a+2b}{4x-2}$.

2) Déterminer les asymptotes à $\mathscr{C}$.

3) Calculer $f'(x)$, puis étudier son signe.

4) Dresser le tableau de variation de f.

5) Tracer l'allure de $\mathscr{C}$.

59 Soit la fonction f définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ par :

$$f(x) = \frac{2x-3}{x-2}.$$

1) Montrer que, pour tout $x \neq 2$, $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x-2}$.

2) Donner les limites aux bornes de $\mathcal{D}$.

3) En utilisant la forme la plus adaptée, déterminer :

a) le sens de variation de la fonction f ;

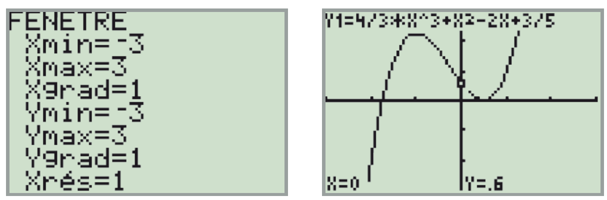
b) le signe de $f(x)$;

c) les solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant 2$.

60 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{4}{3}x^3 + x^2 - 2x + \frac{3}{5}.$$

À l'aide d'une calculatrice, on a paramétré la fenêtre puis, tracé le graphe de f. Voici les deux captures d'écran correspondantes :



1) Conjecturer le nombre d'antécédents de 0 par f.

2) a) Justifier que f est continue sur $[-3\,;\,3]$.

b) Étudier les variations de f sur $[-3\,;\,3]$.

c) Votre conjecture était-elle correcte ?

3) Justifier du nombre d'antécédents de 0 par f.

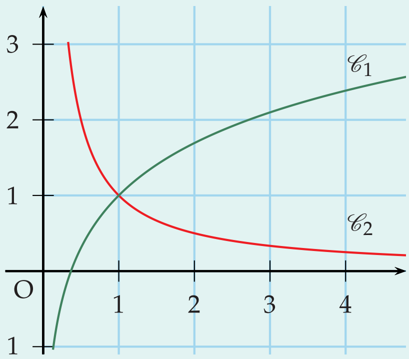
4) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = -\frac{4}{3}x^3 + x^2 + 2x + \frac{4}{7}.$$

À l'aide de la calculatrice, conjecturer correctement le nombre de solutions de l'équation $g(x) = 0$.
Démontrer cette conjecture.

61 **D'après Bac (Pondichéry - 2011)**

Dans le repère suivant, on a tracé les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ représentatives de deux fonctions f_1 et f_2 définies sur $\mathscr{D} =]0\,;\,+\infty[$.



On sait que :

- l'axe des ordonnées est asymptote à $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$;
- l'axe des abscisses est asymptote à $\mathscr{C}_2$;
- f_2 est continue et strictement décroissante sur $\mathscr{D}$;
- f_1 est continue et strictement croissante sur $\mathscr{D}$;
- la limite quand x tend vers $+\infty$ de $f_1(x)$ est $+\infty$.

Pour chacune des trois questions suivantes, déterminer la réponse exacte parmi les trois proposées.

1) La limite quand x tend vers 0 de $f_2(x)$ est :

(a) 0 (b) $+\infty$ (c) indéterminée

2) La limite quand x tend vers $+\infty$ de $f_2(x)$ est :

(a) 0 (b) $0,2$ (c) indéterminée

3) Sur $\mathscr{D}$, le signe de $f_2(x) - f_1(x)$ est :

(a) positif (b) négatif (c) variable

62 **D'après Bac (Nouvelle-Calédonie - 2000)**

Dans tout le problème le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{i}\,\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

Soit la fonction numérique u définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$u(x) = \sqrt{x^2+1} - x$$

et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative.

1) a) Déterminer la limite de u en $-\infty$.

b) Montrer que, pour tout x réel :

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}.$$

En déduire la limite de u en $+\infty$.

2) a) Montrer que $u(x) + 2x$ tend vers 0 quand x tend vers $-\infty$.

b) Montrer que pour tout x réel, on a $u(x) > 0$.
En déduire le signe de $u(x) + 2x$.

c) Interpréter graphiquement ces résultats.

3) a) Montrer que la dérivée de la fonction u est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$u'(x) = \frac{-u(x)}{\sqrt{x^2+1}}.$$

b) Étudier les variations de la fonction u.

4) Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ et son asymptote oblique.

63 **D'après Bac (Liban - 2005)**

Pour chacune des quatre affirmations (entre guillemets) ci-dessous, préciser si elle est vraie ou fausse.

1) « Si a est un réel quelconque et f une fonction définie et strictement décroissante sur $[a\,;\,+\infty[$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$. »

2) Soit f et g deux fonctions définies sur $[0\,;\,+\infty[$ telles que g ne s'annule pas.
« Si $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ ».

3) « Si f est une fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ telle que $0 \leqslant f(x) \leqslant \sqrt{x}$ sur $[0\,;\,+\infty[$, alors $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ ».

4) « Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$, alors la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à la courbe représentative de f dans un repère du plan ».

64 **D'après Bac (Métropole - sept. 2005)**

Soit la fonction g définie par :

$$g(x) = \frac{\sqrt{x^2-2x}}{x-1}$$

et Γ sa courbe représentative dans un repère du plan.
Trouver la ou les bonne(s) réponse(s) parmi les quatre réponses proposées.

(a) Γ admet une asymptote d'équation $y = -1$.
(b) Γ n'admet pas d'asymptote.
(c) Γ admet une asymptote d'équation $x = 1$.
(d) Γ admet une asymptote d'équation $y = 1$.

65 D'après Bac (Pondichéry - 2006)

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et soit a un élément de I.
Déterminer si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse.

a) Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.
b) Si f est continue en a, alors f est dérivable en a.
c) Si f est dérivable en a, alors la fonction $h \mapsto \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ a une limite finie en 0.

66 D'après Bac (Nouvelle-Calédonie - 2007) ROC

1) Soit f une fonction réelle définie sur $[a\,;\,+\infty[$.
Compléter la phrase suivante :
« On dit que f admet une limite finie ℓ en $+\infty$ si ... ».
2) Démontrer le théorème « des gendarmes » :
« Soit f, g et h trois fonctions définies sur $[a\,;\,+\infty[$.
Si g et h ont pour limite commune ℓ quand x tend vers $+\infty$ et si, pour tout x suffisamment grand, on a l'encadrement $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$, alors la limite de f quand x tend vers $+\infty$ est égale à ℓ ».

67 D'après Bac (Polynésie - 1997)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

1) Montrer que f est paire.
2) Étudier les variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$.
3) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
4) Tracer sa courbe représentative dans un repère.
5) a) Montrer que, pour tout $y \in]0\,;\,1]$, l'équation $f(x) = y$ a une unique solution α dans $[0\,;\,+\infty[$.
b) Exprimer α en fonction de y.

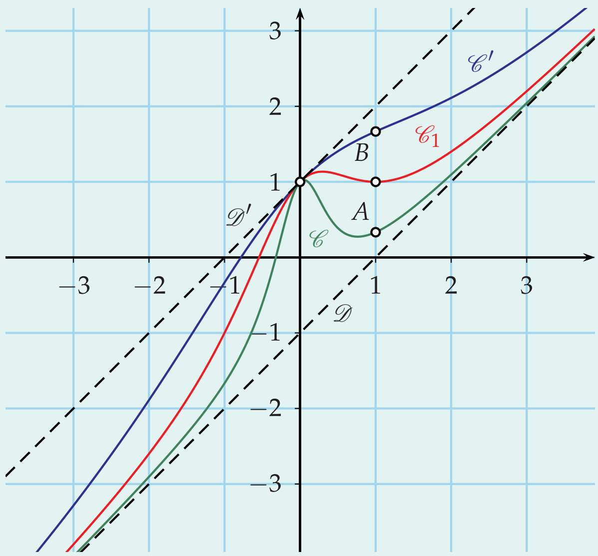
68 D'après Bac (Polynésie - 2004)

Soit la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = x + \frac{1-kx^2}{1+kx^2}$$

où k est un réel positif ou nul.

Dans le repère orthonormal de centre O ci-dessous, on a représenté les droites $\mathscr{D}$ d'équation $y = x-1$ et $\mathscr{D}'$ d'équation $y = x+1$, la courbe représentative $\mathscr{C}_1$ de f_1 et deux autres courbes représentatives de f_k : $\mathscr{C}$ passant par $A\left(1\,;\,\dfrac{1}{3}\right)$ et $\mathscr{C}'$ passant par $B\left(1\,;\,\dfrac{5}{3}\right)$.



1) Déterminer les limites de f_k en $-\infty$ et $+\infty$.
2) Justifier que, pour tout réel $k \geqslant 0$, la droite $\mathscr{D}'$ est tangente à la courbe représentative de f_k.
3) Déterminer le réel k associé à $\mathscr{C}$ et celui associé à $\mathscr{C}'$.
4) a) Justifier que, pour tout x réel, on a :

$$f_k(x) = x - 1 + \frac{2}{1+kx^2} \quad \text{et} \quad f_k(x) = x + 1 - \frac{2kx^2}{1+kx^2}.$$

b) En déduire pour tout k strictement positif :
- la position de la courbe $\mathscr{C}_k$ par rapport aux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$;
- les asymptotes de la courbe $\mathscr{C}_k$.

5) On fait tendre k vers $+\infty$.
Vers quelle fonction f_k va-t-elle se rapprocher ?

69 D'après Bac (Centres Étrangers - 2014) ALGO

Une image numérique en noir et blanc est composée de petits carrés (pixels) dont la couleur va du blanc au noir en passant par toutes les nuances de gris. Chaque nuance est définie par un réel x de la façon suivante :

- $x = 0$ pour le blanc et $x = 1$ pour le noir ;
- $x = 0,01$; $x = 0,02$ et ainsi de suite jusqu'à $x = 0,99$ par pas de $0,01$ pour les nuances dégradées.

On donne aussi les définitions suivantes :

- Une fonction f est dite **fotopol** si $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ et f est continue et croissante sur $[0\,;\,1]$.
- Une nuance x est dite **assombrie** par f si $f(x) > x$, et **éclaircie**, si $f(x) < x$.

Prenons par exemple l'image A ci-dessous :

0,20	0,40
0,60	0,80

Image A

0,04	0,16
0,36	0,64

Image B

0,45	0,63
0,77	0,89

Image C

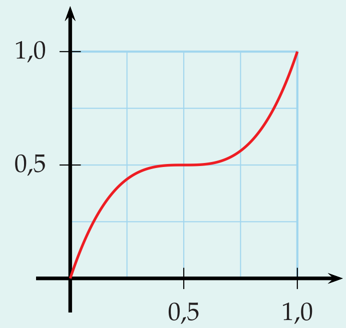
- Si $f(x) = x^2$, un pixel de nuance $0,2$ prendra la nuance $0,2^2 = 0,04$ et l'image A se changera en B.
- Si $f(x) = \sqrt{x}$, la nuance $0,2$ prendra la nuance $\sqrt{0,2} \approx 0,45$ et l'image A se changera en C.

Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par :

$$g(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x.$$

1) Démontrer que g est une fonction fotopol.

2) Résoudre graphiquement l'inéquation $g(x) \leqslant x$, à l'aide du graphique donné ci-dessous.
Interpréter ce résultat en termes d'éclaircissement ou d'assombrissement.



Une modification de nuance n'est visible que si la valeur absolue de l'écart entre la nuance initiale et la nuance modifiée est supérieure ou égale à $0,05$.
Dans l'algorithme suivant, f est une fonction fotopol.

```
Variables :
x, y, E sont des réels
k et c sont des entiers
Traitement :
c prend la valeur 0
Pour k allant de 0 à 100 faire
    x prend la valeur k/100
    y prend la valeur f(x)
    E prend la valeur |y-x|
    Si E⩾0,05 faire
        c prend la valeur c+1
    Fin si
Fin pour
Afficher c
```

1) Quel est le rôle de cet algorithme ?

2) Quelle valeur affiche cet algorithme si on l'applique à la fonction g ?

Pour les exercices **70** à **73**, on donne ci-dessous la définition de continuité en un réel.

> Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. f est **continue en x_0** si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

70 La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2-\sqrt{x+3}}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ -\dfrac{1}{4} & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

est-elle continue en 1 ?

71 La fonction f définie sur $[-1\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{\sqrt{x+1}} & \text{si } x > -1 \\ 1 & \text{si } x = -1. \end{cases}$$

est-elle continue en -1 ?

72 Soit k un entier et f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Déterminer k pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

1) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5 & \text{si } x < 1 \\ k & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$.

2) $f(x) = \begin{cases} k & \text{si } x = -1 \\ \dfrac{2x+\sqrt{x+5}}{x+1} & \text{si } x > -1 \end{cases}$.

73 Soit a un réel et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

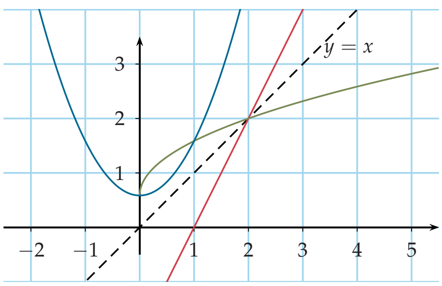
$$g(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \leqslant 1 \\ x^2 + ax + a & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

Peut-on déterminer a pour que g soit continue sur $\mathbb{R}$?

74 Dans un repère, on a tracé les graphes des fonctions f, g et h et la droite d'équation $y = x$.

De plus, on sait que :

- $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$
- $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{g(x)}{x} = 2$
- $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{h(x)}{x} = +\infty$



Retrouver les associations fonction-graphe et donner un exemple d'expression pour chaque fonction.

75

1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = ax + b + \frac{8}{x^2}$$

où a et b sont des réels donnés et soit $\mathscr{C}$ son graphe.

a) Montrer que pour tout couple de réels $(a\,;\,b)$, la courbe admet deux asymptotes distinctes que l'on déterminera.

b) Déterminer les nombres a et b pour que $\mathscr{C}$ passe par le point $A(-2\,;\,-1)$ et f admette un extremum en 2.

2) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$g(x) = 2x + 1 + \frac{8}{x^2}.$$

a) Étudier les variations de la fonction g.
On rappelle que : $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$.

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $\left]-\dfrac{15}{8}\,;\,-\dfrac{7}{4}\right[$.

76 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1) Montrer que f est paire.
2) Étudier ses variations sur $]0\,;\,+\infty[$, et déterminer sa limite en $+\infty$.
3) Tracer sa courbe représentative $\mathscr{C}$.
4) Montrer que pour tout réel y de $]0\,;\,1]$ l'équation $f(x) = y$ admet une solution dans $[0\,;\,+\infty[$.
Exprimer en fonction de y cette solution.

77 Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{|x|}{x}$.
Étudier sa limite en zéro à gauche et à droite.

78 Étudier selon les valeurs de a et b les limites des fonctions suivantes là où c'est indiqué.

1) $f : x \mapsto \sqrt{x^2+5x+1} + ax + b$ en $+\infty$ et en $-\infty$
2) $g : x \mapsto \dfrac{ax^2 - (2a+1)x + 2}{x-1}$ en 1.

79 Déterminer les limites suivantes.

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)$
2) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2+2x+3} + x\right)$

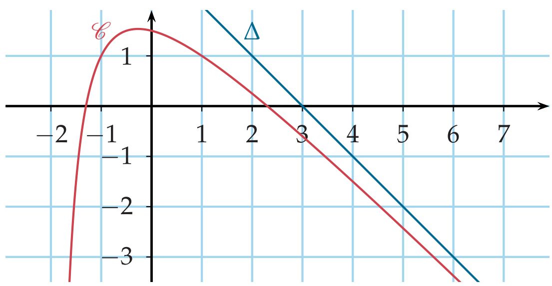
Pour les exercices **80** à **83**, on donne ci-dessous la définition d'asymptote oblique.

> On dit que la droite d'équation $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ est **asymptote oblique** à la courbe représentative de la fonction f si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$.

80 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par :

$$f(x) = \frac{-x^2 + x + 3}{x+2}.$$

Dans le repère ci-dessous, on a tracé en partie sa courbe représentative $\mathscr{C}$ et la droite Δ d'équation $y = -x + 3$.



1) Montrer que Δ est asymptote oblique à $\mathscr{C}$.
2) Déterminer les autres asymptotes éventuelles.

81 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}.$$

1) Montrer que, pour tout réel $x \neq 2$:
$$f(x) = x + 1 + \frac{2}{x-1}.$$
2) Déterminer la limite en $-\infty$ et $+\infty$ de $f(x) - (x+1)$.
Quelle est l'interprétation graphique de ce résultat ?

82 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{-x^3 + 2x^2 - x + 3}{x^2+1}.$$

1) Déterminer trois réels a, b et c tels que :
$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x^2+1}.$$
2) Calculer la limite de $f(x) - (ax+b)$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
3) En déduire que $\mathscr{C}$, la courbe représentative de f, admet une asymptote oblique Δ en $-\infty$ et en $+\infty$.
4) Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}$ et de Δ.

83 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{3(x-1)^3}{3x^2+1}$$

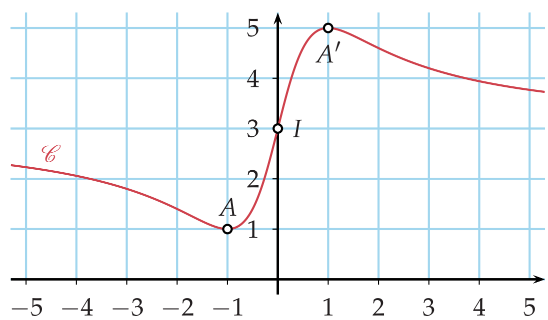
et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1) Déterminer le triplet de réels $(a\,;\,b\,;\,c)$ tel que :
$$f(x) = ax + b + \frac{cx}{3x^2+1}.$$
2) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
3) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :
$$f'(x) = \frac{9(x-1)^2(x+1)^2}{3x^2+1}.$$
4) Dresser le tableau de variation de f.
5) Montrer que $\mathscr{C}$ a une asymptote oblique.
Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}$ et de $\mathscr{D}$.
6) Montrer que l'équation $f(x) = 1$ a une solution unique dans $\mathbb{R}$ (on note α cette solution).
Donner une valeur arrondie de α à 10^{-2} près.

84 Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2+1}$$

représentée par $\mathscr{C}$ dans le repère suivant.



1) Déterminer graphiquement les réels a, b et c.
2) Montrer que $\mathscr{C}$ admet une asymptote horizontale.
3) Déterminer les réels α et β tels que :
$$f(x) = \alpha + \frac{\beta x}{x^2+1}.$$
4) Dresser le tableau de variation complet de f.
5) Déterminer les positions relatives de $\mathscr{C}$ et Δ.
6) a) Montrer que, pour tout réel x, $f(x) + f(-x) = 6$.
b) Que peut-on en déduire pour $\mathscr{C}$?
7) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(|x|)$.
a) Déterminer la limite de g en $-\infty$.
b) Expliquer comment on peut obtenir la courbe représentative de g à partir de $\mathscr{C}$.

85 **« La science est l'asymptote de la vérité »** [1]

Rudy a remarqué qu'« *une asymptote, c'est comme une tangente à l'infini* ». Son professeur digresse alors.

1) Soit f la fonction homographique propre :

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ avec $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$.

« *Monsieur, pourquoi "homographique **propre**" ?* ».

De quel type serait la fonction f :

- pour $c = 0$?
- pour $ad - bc = 0$?

2) Montrez que :

a) $f(x) = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c(cx+d)}$ pour $x \in \mathcal{D}$.

b) $f(x) = \left(\frac{a+bx^{-1}}{c+dx^{-1}}\right)$ pour $x \in \mathcal{D}^*$.

c) $f'(x) = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ pour $x \in \mathcal{D}$.

3) Déduisez de **2a** et **2b** les équations des asymptotes à la courbe représentative de f aux bornes de $\mathcal{D}$.

4) Calculez les limites suivantes :

a) $\lim_{x \to \pm\infty} f'(x)$ **b)** $\lim_{x \to -d/c} f'(x)$

« *Plus ou moins l'infini, vous n'en êtes pas sûr ?* ».

Le professeur précise qu'il veut les limites de $f'(x)$ en $+\infty$ et $-\infty$.

5) Rapprochez les résultats du **4** de celui du **3**.

Concluez à propos de la remarque de Rudy.

86 Soit f et g les fonctions définies par :

$$f(x) = \frac{1}{3}\left(x^2 + x + \frac{1}{x}\right) \quad \text{et} \quad g(x) = 2x^3 + x^2 - 1.$$

1) Montrer que, pour tout $x \neq 0$, $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.

2) Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une racine unique α dans l'intervalle $]0\,;\,1[$ (on ne cherchera pas à calculer α).

b) En déduire le signe de $g(x)$.

3) Dresser le tableau de variation de f.

4) Dans un repère, soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f et les points $I\left(-1\,;\,-\frac{1}{3}\right)$ et $J(1\,;\,1)$.

a) Vérifier que la droite (IJ) est tangente à $\mathscr{C}$ en J.

b) Déterminer une équation de la tangente $(\mathcal{T})$ à $\mathscr{C}$ en I.

c) Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $(\mathcal{T})$.

87 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}.$$

1) Montrer que si $1{,}9 < x < 2$ ou $2 < x < 2{,}1$, alors $f(x) > 100$.

2) Soit un réel $A > 0$. Déterminer un intervalle ouvert I contenant 2 tel que : si $x \in I$, alors $f(x) > A$.

3) Que peut-on en déduire pour la limite de f en 2 ?

88 Soit la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x^2+1}{x^2}.$$

1) Donner des valeurs approchées à 10^{-3} près de $f(1)$, $f(32)$, $f(320)$ et $f(3\,232)$.

2) Soit l'intervalle ouvert de centre 2 et de rayon 0,01 c'est-à-dire $]1{,}99\,;\,2{,}01[$.

Démontrer que pour $x > 10$, $f(x) \in]1{,}99\,;\,2{,}01[$.

3) Soit l'intervalle $I =]2-r\,;\,2+r[$ avec $r > 0$.

Montrer que pour x supérieur à un certain x_0 à déterminer en fonction de r, tous les $f(x)$ sont dans I.

4) Démontrer que $\lim +\infty f(x) = 2$.

89 Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 3x^3 + x^2.$$

1) Donner les valeurs de $g(32)$, $g(320)$ et $g(3\,232)$.

2) Démontrer que si $x > 10$, alors $f(x) > 100$.

3) Soit un intervalle $]A\,;\,\infty[$, avec $A > 0$.

Montrer que pour $x \geqslant \sqrt{A}$, $f(x) > A$.

4) Démontrer que $\lim\limits_{+\infty} g(x) = +\infty$.

1. « La science est l'asymptote de la vérité. Elle approche sans cesse et ne touche jamais. » d'après Hugo, Victor, *William Shakspeare*.

Je teste mes connaissances

À la fin de ce chapitre, je dois être capable de :

- Déterminer la limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient ou d'une composée de deux fonctions
- Déterminer des limites par comparaison et encadrement
- Faire le lien entre limites et comportement asymptotique
- Appréhender la notion de continuité d'une fonction
- Exploiter le théorème des valeurs intermédiaires (cas d'une fonction strictement monotone) pour résoudre un problème
- Approcher une solution d'équation par l'algorithmique

QCM d'auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

Pour chaque question, plusieurs réponses sont proposées. Déterminer celles qui sont correctes.

90 La limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur $]-\infty\,;\,-1[$ par $f(x)=\dfrac{1+x^2+x^3}{x\,(1-x^2)}$ est :

(a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) $-\infty$

91 La limite à gauche en 0 de la fonction f définie sur $[-1\,;\,0[$ par $f(x)=\sqrt{-\dfrac{x+1}{x}}$ est :

(a) 0 (b) 1 (c) $-\infty$ (d) $+\infty$

92 La limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\,;\,1\}$ par $f(x)=\dfrac{(2x-3)(x^2+1)}{(1-x^2)^2}$ est :

(a) -2 (b) 0 (c) $+\infty$ (d) $-\infty$

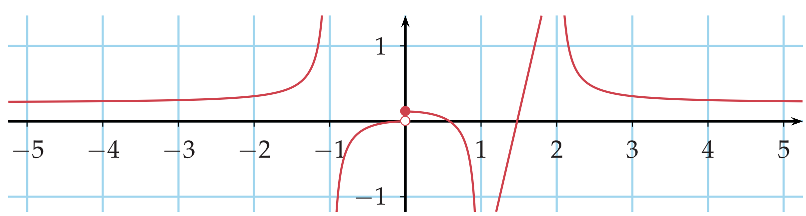
93 Soit f une fonction définie sur $[2\,;\,+\infty[$. Si pour tout $x\geqslant 2$, on a $x^2\leqslant f(x)$ alors :

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ (b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$ (c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ (d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}=1$

94 La courbe représentative de la fonction $h : x\mapsto \dfrac{(2x-1)^2}{2(4-x^2)}$ admet une asymptote d'équation :

(a) $x=-2$ (b) $y=-2$ (c) $x=2$ (d) $y=2$

95 Soit ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f.



Il est certain que la fonction f n'est pas continue :

(a) en -1 (b) en 0 (c) en 2 (d) en 6

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{b\}$ par $x \mapsto a + \dfrac{1}{x-b}$ et représentée par $\mathscr{C}$ dans un repère.

96 Quelles que soient les valeurs de a et b, $\mathscr{C}$ a pour asymptote la droite d'équation :

ⓐ $x = a$ ⓑ $y = a$ ⓒ $x = b$ ⓓ $y = b$

97 Si les droites d'équation $y = 1$ et $x = 1$ sont asymptotes à $\mathscr{C}$, alors :

ⓐ $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ ⓑ $f(x) = \dfrac{x-1}{x}$ ⓒ $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ ⓓ $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$

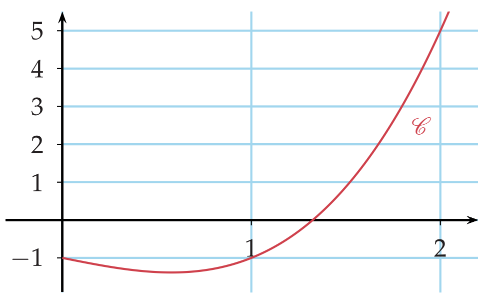
98 La fonction f est :

ⓐ continue sur $\mathbb{R} \setminus \{b\}$
ⓑ continue sur $]b\,;\,+\infty[$
ⓒ strictement croissante sur $]-\infty\,;\,b[$
ⓓ strictement décroissante sur $]b\,;\,+\infty[$

99 Sur $\mathbb{R} \setminus \{b\}$, l'équation $f(x) = 0$:

ⓐ peut ne pas avoir de solution
ⓑ a une solution si $a \geqslant 1$
ⓒ peut avoir deux solutions
ⓓ a deux solutions si $a < -1$

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - x - 1$, son graphe partiel ci-dessous et l'algorithme ci-contre.




```
Saisir un entier k
a prend la valeur 1
p prend la valeur 1
Tant que p⩽k Faire
    Tant que f(a+10^-p)<0 Faire
        a prend la valeur a+10^-p
    Fin Tant que
    p prend la valeur p+1
Fin Tant que
Afficher a
```

100 La limite de f en $-\infty$ est :

ⓐ -1 ⓑ 0 ⓒ $-\infty$ ⓓ $+\infty$

101 Le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$ est :

ⓐ 0 ⓑ 1 ⓒ 2 ⓓ 3

102 Soit un réel λ. Le nombre de solutions de l'équation $f(x) = \lambda$ sur $\mathbb{R}$ peut être égal à :

ⓐ 1 ⓑ 2 ⓒ 3 ⓓ 4

103 On fait tourner l'algorithme. Si on saisit $k = 1$, alors l'algorithme va :

ⓐ boucler indéfiniment ⓑ afficher 1 ⓒ afficher $1,3$ ⓓ afficher $1,4$

104 En sortie, l'algorithme affiche la valeur approchée d'une solution de l'équation $f(x) = 0$:

ⓐ la plus proche de k ⓑ dans $[0\,;\,2]$ ⓒ dans $[1\,;\,2]$ ⓓ à 10^{-k} près

TP 1 Méthode de dichotomie

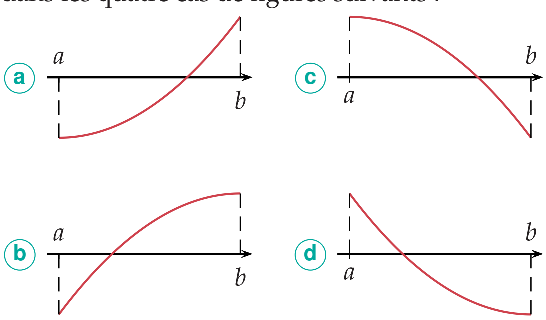
ALGO

A Le principe et l'algorithme

La **méthode de dichotomie** ou **méthode de la bissection** est un algorithme (voir ci-dessous) de recherche d'un zéro d'une fonction qui consiste à réitérer des partages d'un intervalle en deux moitiés puis à sélectionner celui dans lequel se trouve le zéro de la fonction.
Si cela est possible, on dégrossit le plus souvent la recherche en se plaçant initialement sur un intervalle $[a\,;\,b]$ où la fonction est continue, strictement monotone et telle que $f(a)f(b) < 0$ afin d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires et assurer ainsi l'unicité de la solution.

1) Que représente la variable ε ?

2) Expliquer le premier pas de l'algorithme dans les quatre cas de figures suivants :




```
Lire a, b, ε
Tant que (b-a)>ε
  c prend la valeur (a+b)/2
  Si f(a)*f(c)>0 alors
    a prend la valeur c
  Sinon
    b prend la valeur c
  Fin Si
Fin Tant Que
Afficher c
```

B Application : approcher le nombre d'or

Intéressons-nous au nombre d'or, solution positive de l'équation :

$$\text{(E)} \quad x^2 - x - 1 = 0$$

1) Soit la fonction $f : x \mapsto x^2 - x - 1$ qu'on étudie sur $[1\,;\,2]$.

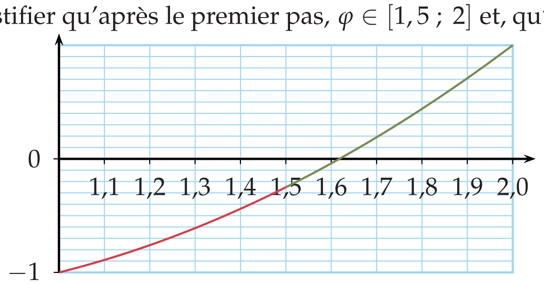
a) Justifier que la fonction f est continue sur $[1\,;\,2]$.

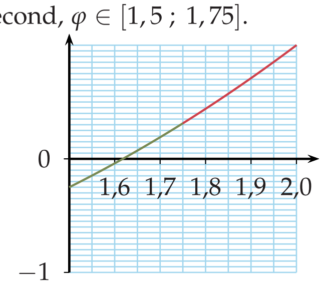
b) Dresser le tableau de variation complet de f sur $[1\,;\,2]$.

c) Montrer qu'il existe une solution unique φ à l'équation $f(x) = 0$.

2) On applique l'algorithme de dichotomie à f avec $a = 1$, $b = 2$ et $\varepsilon = 10^{-5}$.

a) Justifier qu'après le premier pas, $\varphi \in [1{,}5\,;\,2]$ et, qu'après le second, $\varphi \in [1{,}5\,;\,1{,}75]$.





b) À l'aide d'AlgoBox ou d'un autre logiciel, programmer l'algorithme de dichotomie pour qu'il affiche les encadrements successifs de φ et leurs précisions.

$1{,}5 < \varphi < 2$	0,5
$1{,}5 < \varphi < 1{,}75$	0,25
$\vdots$	$\vdots$

3) On définit la suite $(p_n)_{n\geqslant 0}$ par $p_0 = 1$ et $p_{n+1} = \dfrac{p_n}{2}$.

a) Que représente (p_n) ? Justifier qu'elle est décroissante et exprimer p_n en fonction de n.

b) Écrire puis programmer un algorithme qui prend en entrée ε et qui retourne le plus petit entier n tel que $p_n < \varepsilon$?

c) À l'aide du programme, déterminer le plus petit entier n tel que p_n soit inférieur à :

- $0,1$
- $0,01$
- $0,001$
- $0,000\,1$
- $0,000\,01$

Commenter l'efficacité de l'algorithme de dichotomie à partir des résultats obtenus.

TP 2 Méthode de Newton

INFO ALGO

La **méthode de Newton** est une autre méthode destinée à déterminer une valeur approchée du zéro d'une fonction, sous condition de sa dérivabilité sur un intervalle réel.
Partant d'un réel x_0 de préférence proche du zéro à trouver, on approche la fonction f au premier ordre en la considérant à peu près égale à la fonction affine donnée par l'équation de la tangente à sa courbe représentative au point d'abscisse x_0 :

$$f(x) \simeq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

On résout alors l'équation $f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = 0$ pour obtenir x_1 qui, en général, est plus proche du zéro de f que x_0. On réitère ensuite le processus.

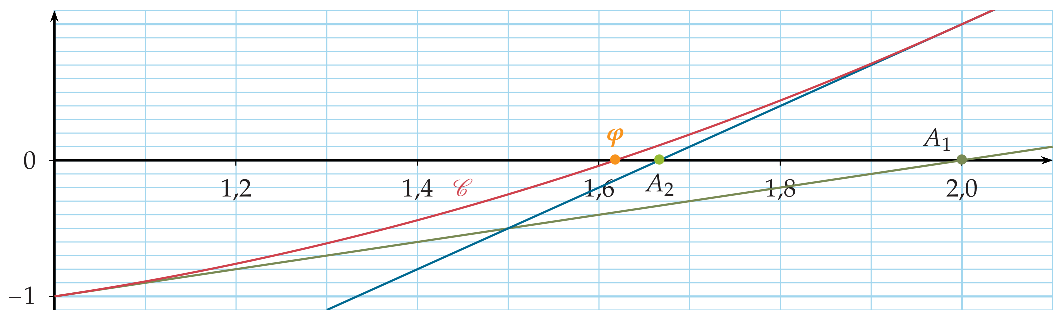
Le but de ce TP est de déterminer une valeur approchée du nombre d'or φ comme dans le TP précédent et de comparer l'efficacité de la méthode de Newton à celle de dichotomie.

A Approche graphique

1) Avec un logiciel de géométrie dynamique, tracer le graphe $\mathscr{C}$ de $f : x \mapsto x^2 - x - 1$.

2) Tracer la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $x_0 = 1$. Elle coupe l'axe des abscisses en $A_1(x_1\,;\,0)$.

3) Réitérer le processus pour obtenir x_1 puis x_2. Est-on proche de φ ?



B Avec l'algorithmique

La construction devient vite compliquée avec l'agglomérat des tangentes successives.
On souhaite ainsi s'orienter vers l'élaboration et la programmation d'un algorithme.

1) Justifier qu'on peut définir la suite (x_n) telle que $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

2) Écrire et programmer l'algorithme en considérant la condition d'arrêt $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$.

3) Faire tourner l'algorithme pour ε égal à $10^{-1}, 10^{-2}, \ldots, 10^{-5}$.

4) Rajouter un compteur d'itérations pour estimer l'efficacité de la méthode. Conclure.

Récréation, énigmes

Des discontinuités... en continu !

Soit x et y deux réels tels que $x < y$.

Définissons la suite $(d_n)_{n \geqslant 0}$ telle que $d_n = \dfrac{\lfloor 10^n y \rfloor}{10^n}$ où $\lfloor a \rfloor$ désigne la partie entière de a.

1) À quel ensemble les nombres d_n appartiennent-ils ? • $\mathbb{N}$? • $\mathbb{Z}$? • $\mathbb{D}$? • $\mathbb{Q}$? • $\mathbb{R}$?

2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a l'encadrement $\dfrac{10^n y - 1}{10^n} < d_n \leqslant y$.

b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} d_n$.

3) a) Montrer que, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel N tel que pour tout $n \geqslant N$, $|d_n - y| < \varepsilon$.

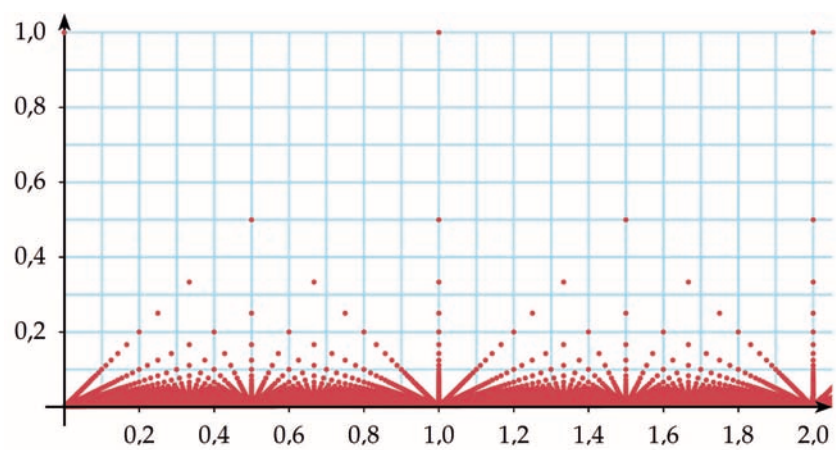
b) En posant $\varepsilon = y - x$, en déduire que $x \leqslant d_N \leqslant y$.

On vient de montrer qu'entre deux réels, il existe toujours un décimal et donc toujours un rationnel.
On dit que l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ est **dense** dans l'ensemble des réels $\mathbb{R}$.

La **fonction de Dirichlet** D et la **fonction de Thomae** T sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\mathrm{D}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathrm{T}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{q} & \text{si } x = \dfrac{p}{q} \text{ est une fraction irréductible} \end{cases}$$

Introduite par Dirichlet[2] en 1829, la fonction D est discontinue partout ce que le résultat établi précédemment montre. Cette fonction est appelée aussi **fonction indicatrice des rationnels**.
Introduite par Thomae[3] en 1875, la fonction T est continue en tout nombre irrationnel mais discontinue en tout nombre rationnel. Cette fonction est appelée aussi la **fonction popcorn** (voir sa représentation ci-dessous !).



2. Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859), mathématicien allemand
3. Carl Johannes Thomae (1840–1921), mathématicien allemand

ANALYSE 3

Dérivation. Fonctions cosinus et sinus

Connaissances nécessaires à ce chapitre

- Calculer la dérivée d'une fonction f
- Déterminer certaines caractéristiques de f à partir de f'
- Utiliser le cercle trigonométrique, notamment pour donner une valeur de cosinus et sinus ou résoudre une équation.

Auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

1 Donner l'ensemble de dérivabilité de la fonction f et calculer $f'(x)$ pour tout x dans cet ensemble.

1) $f(x)=3x^4-7x^2+2$

2) $f(x)=(x^2+2)(x^3+3)$

3) $f(x)=\dfrac{2x-3}{5x-7}$

4) $f(x)=(x+1)^3$

5) $f(x)=\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}$

6) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$

2 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = -x^3+2x^2+\frac{1}{x}.$$

1) On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

a) Montrer que $f'(x) = -\dfrac{(x-1)^2(3x^2+2x+1)}{x^2}$.

b) En déduire les variations de f.

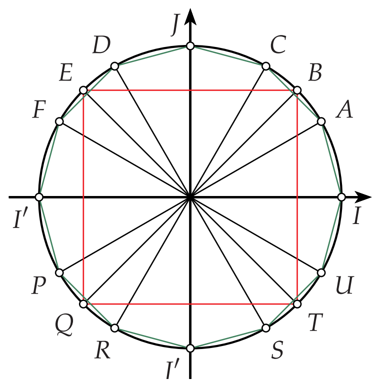
2) f admet-elle un extremum local en 1 ?

3) Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f aux points d'abscisses -1 et 1.

3 Dresser le tableau de variation des fonctions définies ci-après et préciser les extremums locaux.

- $f(x) = -2x^2+5x-3$ pour tout réel x
- $g(x) = 2-\dfrac{3}{x-1}$ pour $x \neq 1$
- $h(x) = \sqrt{2x-3}$ pour $x \geqslant \dfrac{3}{2}$
- $A(x) = (x+1)\left(\sqrt{x}-2\right)$ pour $x > 0$

4 Un carré rouge et un dodécagone regulier vert sont inscrits dans le cercle trigonométrique suivant :



1) Associer à chaque point une mesure en radians.

2) Donner les valeurs exactes de :

a) $\sin\dfrac{2\pi}{3}$ **b)** $\cos\dfrac{5\pi}{4}$ **c)** $\sin\dfrac{11\pi}{2}$ **d)** $\cos\dfrac{7\pi}{6}$

3) Résoudre les équations sur $[0\,;\,2\pi]$.

a) $\cos x = \dfrac{1}{2}$ **b)** $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **c)** $\cos x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

5 Résoudre sur $]-\pi\,;\,\pi]$ les équations suivantes :

1) $2\sin^2 x+5\sin x+2=0$

2) $\cos^2 x-\left(3+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\cos x+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}=0$

Voir solutions p. 419

ACTIVITÉ 1 Vers de nouvelles formules de dérivation

Partie A : Fonction sous radical

Soit u la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2 - 2x - 8$.

1) a) Étudier le signe de $u(x)$.

b) En déduire l'ensemble de définition de la fonction $\sqrt{u}$.

2) a) Soit h un réel strictement positif. Montrer que $\dfrac{\sqrt{u(4+h)} - \sqrt{u(4)}}{h} = \sqrt{1 + \dfrac{6}{h}}$.

b) Déterminer $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{u(4+h)} - \sqrt{u(4)}}{h}$.

c) En déduire que la fonction $\sqrt{u}$ n'est pas dérivable en 4.

Pour la suite, on admet que $\sqrt{u}$ est dérivable sur $]-\infty\,;\,-2[\,\cup\,]4\,;\,+\infty[$.

3) Soit v une fonction quelconque dérivable et strictement positive sur un intervalle I.

On pose $f = \sqrt{v}$ et on admet que f est dérivable sur I.

a) En dérivant chaque membre de l'égalité $f \times f = v$, écrire f' en fonction de v' et f.

b) En déduire une formule pour $\left(\sqrt{v}\right)'$.

4) Appliquer la formule précédente et exprimer la dérivée de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 2x - 8}$.

Faire de même pour les fonctions suivantes, après avoir déterminé leurs ensembles de définition et de dérivabilité.

- $g : x \mapsto \sqrt{5 - 3x}$
- $h : x \mapsto \sqrt{\dfrac{4x - 9}{7x - 3}}$
- $v : x \mapsto \sqrt{-9x^2 + 12x - 4}$

Partie B : Fonction en puissance

1) Soit f la fonction polynôme de degré 4 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(x^2 - 2x + 2\right)^2$.

a) Développer $f(x)$. En déduire une expression développée de $f'(x)$.

b) En dérivant un produit, déterminer une expression factorisée de $f'(x)$.

c) Pourquoi la forme factorisée de $f'(x)$ est-elle plus satisfaisante que sa forme développée ?

2) a) Justifier que, si u est dérivable sur I, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u^n est dérivable sur I.

b) Calculer $\left(u^2\right)'$, $\left(u^3\right)'$ et $\left(u^4\right)'$. Conjecturer une expression de $(u^n)'$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) Démontrer par récurrence la conjecture établie précédemment.

3) Déterminer les ensembles de définition et de dérivabilité de chaque fonction, puis appliquer la formule précédente pour obtenir une expression de sa fonction dérivée.

- $g : x \mapsto (5 - 3x)^3$
- $h : x \mapsto \left(\dfrac{4x - 9}{7x - 3}\right)^2$
- $v : x \mapsto \left(-9x^2 + 12x - 4\right)^4$

ACTIVITÉ 2 Vers les fonctions sinus et cosinus

Partie A : Dégager le sinus

1) Ouvrir un logiciel de géométrie dynamique et choisir comme unité d'angle le radian.

a) Créer les points $O(0\ ;\ 0)$, $I(1\ ;\ 0)$, $J(0\ ;\ 1)$, $K(-1\ ;\ 0)$ et $L(0\ ;\ -1)$.

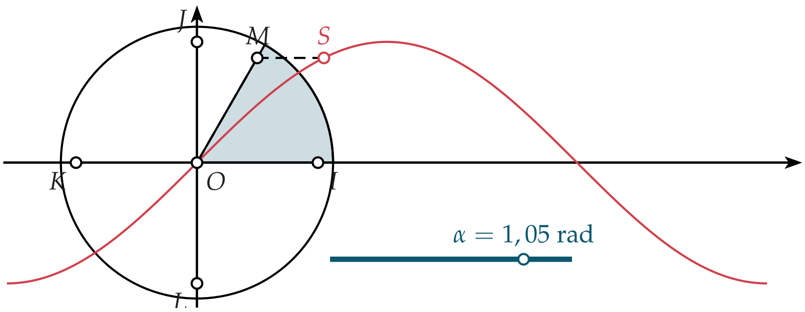
b) Créer le cercle de centre O et de rayon 1.

c) Créer un curseur d'angle α allant de $-\dfrac{\pi}{2} \approx -1{,}57$ à $\dfrac{3\pi}{2} \approx 4{,}71$ avec un pas de 0,01.

d) Créer le point $M(\cos\alpha\ ;\ \sin\alpha)$ et le segment $[OM]$.
Justifier que M appartient au cercle de centre O et de rayon 1.

e) Créer le point $S(\alpha\ ;\ \sin\alpha)$ et le segment $[MS]$.

f) Afficher la trace de S et animer le curseur α.



2) Soit la fonction $f : \alpha \mapsto \sin\alpha$ définie sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

a) Comment varie l'ordonnée de S quand M parcourt l'arc de cercle :

- $\overset{\frown}{LI}$ de L à I ?
- $\overset{\frown}{IJ}$ de I à J ?
- $\overset{\frown}{JK}$ de J à K ?
- $\overset{\frown}{KL}$ de K à L ?

b) Décrire les variations de f. Quels sont ses extremums ?

c) Dresser un tableau de variation de f.

3) a) Donner les valeurs de α associées aux points I, J, K et L dans les intervalles suivants.

- $\left[-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{3\pi}{2}\right]$
- $\left[\dfrac{3\pi}{2}\ ;\ \dfrac{7\pi}{2}\right]$

b) Soit la fonction $g : \alpha \mapsto \sin\alpha$ définie sur $\left[\dfrac{3\pi}{2}\ ;\ \dfrac{7\pi}{2}\right]$.
Expliquer pourquoi on peut aisément déduire le tableau de variation de g de celui de f ?

c) Quelle formule trigonométrique met-on ainsi en évidence ?

d) Quelle particularité aura la courbe représentative de la fonction $\alpha \mapsto \sin\alpha$ définie sur $\mathbb{R}$?

Partie B : Déboucher sur cosinus

1) Soit la fonction $h : \alpha \mapsto \cos\alpha$ définie sur $[-\pi\ ;\ \pi]$.

a) Écrire plus simplement $\sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

b) En déduire les variations de h à partir de celles de la fonction f de la première partie.

2) a) Soit α un réel. Écrire plus simplement $\cos(-\alpha)$ et $\sin(-\alpha)$.

b) Qu'en déduit-on pour les courbes représentatives dans un repère orthogonal des fonctions $\alpha \mapsto \cos\alpha$ et $\alpha \mapsto \sin\alpha$ définies sur $\mathbb{R}$?

1. Rappels

A. Dérivabilité et fonction dérivée

DÉFINITION : Nombre dérivé

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Soit a et h deux réels tels que a et $a+h$ appartiennent à I.
La fonction f est **dérivable en a** si, et seulement si, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \ell$ où ℓ est un réel.
Le réel ℓ est alors appelé **nombre dérivé de f en** a et se note $f'(a)$.

DÉFINITION : Fonction dérivable - Fonction dérivée

Soit une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
La fonction f est **dérivable sur I** si f est dérivable en tout réel x de I.
La fonction $f' : x \mapsto f'(x)$ définie sur I est appelée la **fonction dérivée de f sur I**.

REMARQUES :

- Une fonction peut être définie en a mais non dérivable en a.
  Par exemple, prenons la fonction racine carrée qui est définie en 0.
  On a $\dfrac{\sqrt{h}-\sqrt{0}}{h} = \dfrac{\sqrt{h}}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{h}}$. Or, $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \dfrac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$.
  Donc, la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.
- Les physiciens expriment une variation à l'aide du symbole Δ. Ainsi, entre x et x_0, elle est notée $\Delta x = x - x_0$ et $\Delta y = f(x) - f(x_0)$. On a alors : $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.
- On peut noter $f'(a)$ également $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$ qui exprime la différentielle de la fonction f en a par rapport à la variable x. Cela sert à écarter toute ambiguïté s'il y a d'autres variables.

B. Applications de la dérivation

PROPRIÉTÉ : Tangente en un point à une courbe

Soit f une fonction dérivable en a et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.
Une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a est :

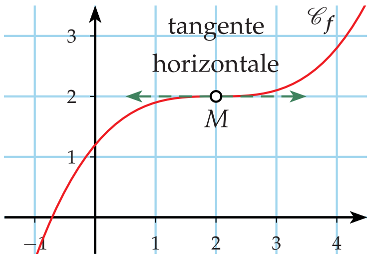
$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

PROPRIÉTÉ : Du signe de $f'(x)$ aux variations de f

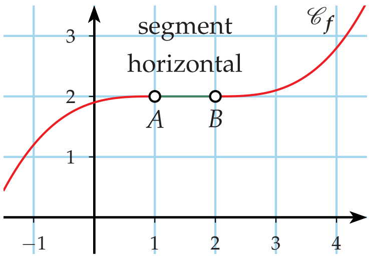
Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- Si f' est strictement positive sur I, sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I.
- Si f' est strictement négative sur I, sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est strictement décroissante sur I.
- Si f' est nulle sur I, alors f est constante sur I.

REMARQUE : « sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule » signifie que la courbe représentative de f peut admettre des tangentes horizontales mais ne peut avoir à aucun endroit la forme d'un segment parallèle à l'axe des abscisses.



f' est strictement positive sauf en 2 où elle s'annule donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.



*f' est strictement positive sur $]-\infty\,;\,1[\,\cup\,]2\,;\,\infty[$ donc f n'est pas **strictement** croissante sur $\mathbb{R}$.*

PROPRIÉTÉ : Extremums locaux d'une fonction

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.

- Si f admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$.
- Si f' s'annule et change de signe en a, alors f admet un extremum local en a.

C. Calcul de dérivées

PROPRIÉTÉ : Dérivées des fonctions usuelles

On désigne par $\mathscr{D}_f$ l'ensemble de définition de la fonction f.
Toutes les fonctions du tableau ci-dessous sont dérivables sur $\mathscr{D}_f$ à l'exception de la fonction racine carrée qui n'est pas dérivable en zéro.

Fonction f	$\mathscr{D}_f$	Dérivée f'
$f(x) = k \quad (k \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0\,;\,+\infty[$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

PROPRIÉTÉ : Opérations sur les fonctions dérivées

Soit un réel k et deux fonctions u et v dérivables sur un intervalle I.

- Les fonctions $u + v$, ku et uv sont dérivables sur I.
- Les fonctions $\dfrac{1}{v}$ et $\dfrac{u}{v}$ sont dérivables sur I sauf là où v s'annule.

Fonction	$u+v$	ku	uv	$\dfrac{1}{v}$	$\dfrac{u}{v}$
Dérivée	$u'+v'$	ku'	$u'v+uv'$	$-\dfrac{v'}{v^2}$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

2. Dérivées des fonctions composées

Dans cette partie, u désigne une fonction et I un intervalle.

PROPRIÉTÉ : Dérivée de $\sqrt{u}$

Si u est dérivable et strictement positive sur I, alors $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

PREUVE Soit un réel $a \in I$ et un réel $h > 0$ tel que $a + h$ soit dans I.
On calcule le taux d'accroissement de $\sqrt{u}$ entre a et $a + h$.

$$\frac{\sqrt{u(a+h)} - \sqrt{u(a)}}{h} = \frac{u(a+h) - u(a)}{h\left(\sqrt{u(a+h)} + \sqrt{u(a)}\right)} = \frac{u(a+h) - u(a)}{h} \times \frac{1}{\sqrt{u(a+h)} + \sqrt{u(a)}}.$$

Or, la fonction u est dérivable sur I donc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{u(a+h) - u(a)}{h} = u'(a)$.

D'où $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{u(a+h)} - \sqrt{u(a)}}{h} = u'(a) \times \dfrac{1}{2\sqrt{u(a)}} = \dfrac{u'(a)}{2\sqrt{u(a)}}$.

PROPRIÉTÉ : Dérivée de u^n et u^{-n}

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si u est dérivable sur I alors :
- La fonction u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.
- La fonction u^{-n} est dérivable sur I sauf là où u s'annule et $\left(u^{-n}\right)' = -nu'u^{-n-1}$.

PREUVE
- On démontre par récurrence. Voici l'initialisation et l'hérédité :
  $\left(u^1\right)' = u' = 1 \times u'u^{1-1}$. La proposition est donc initialisée au rang 1.
  Supposons qu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que la propriété « $\left(u^k\right)' = ku'u^{k-1}$ » soit vraie.
  $\left(u^{k+1}\right)' = \left(u^k u\right)' = \left(u^k\right)' u + u^k u' = ku'u^{k-1}u + u^k u' = (k+1)u'u^k$.
  La propriété est encore vraie au rang suivant donc elle est héréditaire.
- Si u est dérivable sur I, alors $\dfrac{1}{u}$ est dérivable sur I sauf là où u s'annule.
  $(u^{-n})' = \left(\dfrac{1}{u^n}\right)' = \left[\left(\dfrac{1}{u}\right)^n\right]' = n\left(\dfrac{1}{u}\right)'\left(\dfrac{1}{u}\right)^{n-1}$ d'après la première propriété.
  Ainsi : $(u^{-n})' = n\left(-\dfrac{u'}{u^2}\right)\dfrac{1}{u^{n-1}} = -\dfrac{nu'}{u^{n+1}} = -nu'u^{-n-1}$.

PROPRIÉTÉ : Dérivée de $x \mapsto u(ax+b)$

Soit deux réels a et b. Si u est dérivable sur I alors :
La fonction $f : x \mapsto u(ax+b)$ est dérivable là où $(ax+b) \in I$ et $f'(x) = au'(ax+b)$.

PREUVE Soit u dérivable sur I et deux réels a et b tels que $x \in I \Rightarrow (ax+b) \in I$.
- Si $a = 0$, alors $f : x \mapsto u(b)$ est constante et on a bien $f'(x) = 0 = 0 \times u'(b)$.
- Prenons $a \neq 0$. La fonction u est dérivable sur I donc :
  pour tous $X \in I$ et H réel tels que $(X+H) \in I$: $\lim\limits_{H \to 0} \dfrac{u(X+H) - u(X)}{H} = u'(X)$.

Posons $X = ax + b$ et $H = ah$. Alors, H tend vers 0 vu que h tend vers 0 et que $a \neq 0$. Ainsi :
$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{u(ax+b+ah) - u(ax+b)}{ah} = u'(ax+b)$ soit $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{u(a(x+h)+b) - u(ax+b)}{h} = au'(ax+b)$.

MÉTHODE 1 Dériver une fonction composée

► Ex. 11 p. 94

1) On reconnaît le type de composée ($\sqrt{u}$, u^n, u^{-n} ou $x \mapsto u(ax+b)$) et on identifie u.
2) On détermine les ensembles de définition et de dérivabilité de la fonction.
3) On calcule $u'(x)$ et on applique la formule de dérivation qui convient.

Exercice d'application

Déterminer les ensembles de définition $\mathscr{D}$ et de dérivabilité $\mathscr{D}'$ de f, puis calculer $f'(x)$.

1) $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$ 2) $f(x) = \left(\dfrac{3x-1}{2x-4}\right)^2$ 3) $f(x) = \dfrac{1}{\left(\sqrt{x}-1\right)^3}$ 4) $f(x) = (2x-3)^5$

Correction

1) f est du type $\sqrt{u}$ avec $u(x) = x^2 - x - 2$.
Or, $u(x)$ est un trinôme de degré 2 ayant deux racines : -1 et 2.
Ainsi, $u(x) \geqslant 0$ si $x \leqslant -1$ ou $x \geqslant 2$ et f est définie sur $\mathcal{D} =]-\infty\,;\,-1] \cup [2\,;\,+\infty[$.
Et comme $f = \sqrt{u}$ est dérivable sur $\mathcal{D}$ sauf là où u s'annule alors $\mathcal{D}' =]-\infty\,;\,-1[\cup]2\,;\,+\infty[$.
On a $u'(x) = 2x - 1$ d'où $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-2}}$.

2) f est du type u^2 avec $u(x) = \dfrac{3x-1}{2x-4}$.
Or, u est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ donc f est définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
f est dérivable sur son ensemble de définition donc $\mathcal{D}' = \mathcal{D}$.
On a $u'(x) = \dfrac{3(2x-4) - 2(3x-1)}{(2x-4)^2} = \dfrac{-10}{(2x-4)^2}$.
D'où, $f'(x) = 2u'(x)u^{2-1}(x) = 2u'(x)u(x) = 2 \times \dfrac{-10}{(2x-4)^2} \times \dfrac{3x-1}{2x-4} = -\dfrac{20(3x-1)}{(2x-4)^3}$.

3) $f(x) = \left(\sqrt{x}-1\right)^{-3}$ est du type u^{-3} avec $u(x) = \sqrt{x} - 1$.
Or, u est définie sur $[0\,;\,+\infty[$ et f aussi sauf là où u s'annule. Donc, $\mathcal{D} = [0\,;\,1[\cup]1\,;\,+\infty[$.
La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0 donc u et f aussi. Ainsi, $\mathcal{D}' =]0\,;\,1[\cup]1\,;\,+\infty[$.
On a $u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ d'où $f'(x) = -3u'(x)u^{-3-1}(x) = -3u'(x)u^{-4}(x) = -\dfrac{3}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)^4}$.

4) On pourrait voir le type u^5. Voyons plutôt le type $u(ax+b)$ avec $u(x) = x^5$, $a = 2$ et $b = -3$.
Il est évident que $\mathcal{D} = \mathcal{D}' = \mathbb{R}$ vu que f est une fonction polynôme de degré 5 !
On a $u'(x) = 5x^4$ d'où $f'(x) = au'(ax+b) = 2u'(2x-3) = 2 \times 5\,(2x-3)^4 = 10\,(2x-3)^4$.

Remarque : Les exemples de formules de dérivation des composées vues précédemment mettent en évidence une expression unifiée de la dérivée de $x \mapsto f(u(x))$. On donne, ci-après, la propriété générale mais sa connaissance n'est pas une capacité attendue.

PROPRIÉTÉ (admise)

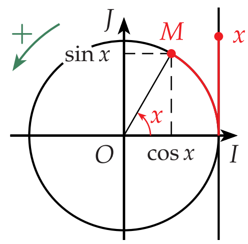
Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et f une fonction dérivable sur un intervalle J de $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in I$, $u(x) \in J$.
La fonction $f \circ u$ composée de u suivie de f est dérivable sur I, et pour tout $x \in I$:

$$(f \circ u)'(x) = u'(x) \times (f' \circ u)(x) \text{ ou } [f(u(x))]' = u'(x) \times f'(u(x)).$$

3. Fonctions cosinus et sinus

A. Définition et rappels

Soit $(O\ ;\ I\ ,\ J)$ un repère orthonormé direct. Le point M, image d'un réel x sur le cercle trigonométrique de centre O, a pour coordonnées $(\cos x\ ;\ \sin x)$ où $\cos x$ est le cosinus de x et $\sin x$ est le sinus de x.



x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0

DÉFINITION : Fonctions cosinus et sinus

- La fonction cosinus, notée cos, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\cos : x \mapsto \cos x$.
- La fonction sinus, notée sin, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\sin : x \mapsto \sin x$.

B. Propriétés des fonctions cosinus et sinus

DÉFINITION : Fonction périodique

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et un réel T.
f est **périodique** de période T ou est T-périodique si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+T) = f(x)$.

DÉFINITION : Fonctions paire et impaire

Soit une fonction f définie sur un ensemble $\mathscr{D}_f$ symétrique par rapport à 0.

- Une fonction f est **paire** si, pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $f(-x) = f(x)$.
- Une fonction f est **impaire** si, pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $f(-x) = -f(x)$.

PROPRIÉTÉ

- Les fonctions cos et sin sont 2π-périodiques.
- La fonction cos est paire et la fonction sin est impaire.

PREUVE Pour tout réel x, on a en effet :

- $\cos(x+2\pi) = \cos x$ et $\sin(x+2\pi) = \sin x$.
- $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$.

Remarque :

- Dans un repère, les courbes représentatives de cos et sin « se répètent » tous les 2π.
- Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de cos est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et celle de sin est symétrique par rapport à l'origine du repère.

C. Dérivabilité et variations

PROPRIÉTÉ (admise) : Dérivées des fonctions cos et sin

Les fonctions cos et sin sont dérivables et continues sur $\mathbb{R}$.

- $\cos' = -\sin$
- $\sin' = \cos$

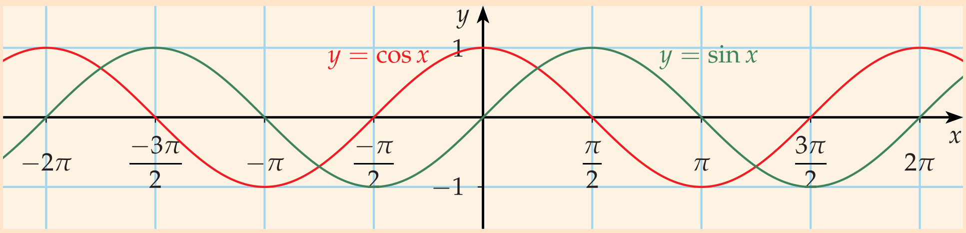
PROPRIÉTÉ

- Les variations des fonctions cos et sin sur $[0\,;\,\pi]$ sont données par les tableaux ci-contre.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
cos	1 ↘	0 ↘	-1

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
sin	0 ↗	1 ↘	0

- Les courbes représentatives de cos et sin sont appelées des **sinusoïdes**.



PREUVE

- $\cos' = -\sin$. Or, $0 < x < \pi \Rightarrow \sin x > 0$ c'est-à-dire $-\sin x < 0$.
  De plus, la fonction sin ne s'annule qu'en 0 et π.
  Donc, cos est strictement décroissante sur $[0\,;\,\pi]$.
- $\sin' = \cos$. Or, $0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos x > 0$ et $-\frac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow \cos x < 0$.
  De plus, la fonction cos ne s'annule qu'en $\frac{\pi}{2}$.
  Donc, sin est strictement croissante sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\right]$.

MÉTHODE 2 Dériver une fonction formée de cos ou sin

► Ex. 13 p. 94

En général, ce type de fonction définie est dérivable sur $\mathbb{R}$. Si ce n'est pas le cas, on établira d'abord les ensembles de définition et de dérivabilité (► MÉTHODE 1 p. 89).

Exercice d'application Calculer $f'(x)$. L'écrire sous une forme facilitant l'étude de son signe.

1) $f(x) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$ 2) $f(x) = \cos^2 x$ 3) $f(x) = \sin x\,(1 + \cos x)$

Correction

1) f est de la forme $u(ax+b)$ avec $u(x) = \sin x$, $a = 3$ et $b = \frac{\pi}{4}$.

On a $u'(x) = \cos x$ d'où $f'(x) = au'(ax+b) = 3\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$.

2) f est de la forme u^2 avec $u(x) = \cos(x)$.
On a $u'(x) = -\sin x$ d'où $f'(x) = 2u'(x)u(x) = 2(-\sin x)\cos x = -2\sin x\cos x = -\sin 2x$.

3) f est de la forme uv dont la dérivée est $(u'v + uv')$ avec $u(x) = sin(x)$ et $v(x) = 1 + cos(x)$.
$f'(x) = \cos x(1 + \cos x) + \sin x(-\sin x) = \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x$.
Or, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ donc $-\sin^2 x = \cos^2 x - 1$. D'où $f'(x) = 2\cos^2 x + \cos x - 1$.
Posons $X = \cos x$. Alors, $f'(x) = 2X^2 + X - 1 = (2X-1)(X+1)$ après calcul des racines.
Ainsi, $f'(x) = (2\cos x - 1)(\cos x + 1)$.

PROPRIÉTÉ

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

PREUVE Les fonctions cos et sin sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc en particulier en 0. Ainsi :

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - \cos 0}{x - 0} = \cos'(0) = -\sin 0 = 0.$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \sin'(0) = \cos 0 = 1.$

MÉTHODE 3 Étudier une fonction trigonométrique

▶ Ex. 57 p. 98

Il arrive fréquemment qu'une fonction trigonométrique soit périodique et paire ou impaire. Cela amène alors souvent à étudier d'abord la fonction sur un intervalle restreint avant de l'étudier sur un ensemble plus grand.

Exercice d'application Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3\sin x}{2 + \cos x}$.

1) Calculer $f'(x)$. Étudier son signe sur $[0\,;\,\pi]$. En déduire les variations de f sur $[0\,;\,\pi]$.
2) Calculer $f(-x)$. En déduire les variations de f sur $[-\pi\,;\,\pi]$.
3) Montrer que f est 2π-périodique.
4) Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f sur $[0\,;\,\pi]$ puis sur $[-4\pi\,;\,4\pi]$.

Correction

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ avec $2 + \cos x \neq 0$.

$$f'(x) = \frac{3\cos x(2 + \cos x) - 3\sin x(-\sin x)}{(2 + \cos x)^2} = \frac{6\cos x + 3}{(2 + \cos x)^2} = \frac{6\left(\cos x + \frac{1}{2}\right)}{(2 + \cos x)^2}.$$

$f'(x)$ est du signe de $\cos x + \dfrac{1}{2}$ sur $[0\,;\,\pi]$. Or :

- sur $\left[0\,;\,\dfrac{2\pi}{3}\right[$, $\cos x > -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x + \dfrac{1}{2} > 0$;
- sur $\left[\dfrac{2\pi}{3}\,;\,\pi\right]$, $\cos x < -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x + \dfrac{1}{2} > 0.$

Et $f'(x)$ ne s'annule qu'en $\dfrac{2\pi}{3}$.

D'où le tableau de variation ci-contre.

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	↗	$\sqrt{3}$	↘	0

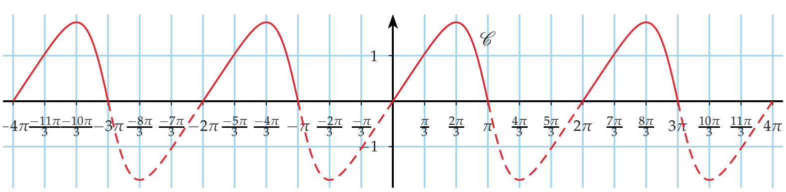
2) $f(-x) = \dfrac{3\sin(-x)}{2 + \cos(-x)} = \dfrac{-3\sin x}{2 + \cos x} = -\dfrac{3\sin x}{2 + \cos x} = -f(x)$ donc f est impaire.

On peut donc limiter l'étude de f à $[0\,;\,\pi]$. On peut en déduire que la fonction f est décroissante sur $[-\pi\,;\,-2\frac{\pi}{3}]$ et sur $[2\frac{\pi}{3}\,;\,\pi]$ et croissante sur $[-\frac{2\pi}{3}\,;\,\frac{2\pi}{3}]$.

3) $f(x + 2\pi) = \dfrac{3\sin(x + 2\pi)}{2 + \cos(x + 2\pi)} = \dfrac{3\sin x}{2 + \cos x} = f(x)$ donc f est 2π-périodique.

4) On trace $\mathscr{C}$ sur $[0\,;\,\pi]$ puis sur $[-\pi\,;\,0]$ par symétrie centrale puisque f est impaire.

Enfin, comme f est 2π-périodique, on répète le motif tous les 2π par translation.



Activités mentales

1 Soit f une fonction définie par $f(x)$. Déterminer son ensemble de dérivabilité $\mathscr{D}'$, puis calculer $f'(x)$.

1) $f(x) = x^3 - 3 + 3\sqrt{x}$

2) $f(x) = \left(4x^3 + 2x - 1\right)^4$

3) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

4) $f(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^3$

5) $f(x) = \cos(5x - 2)$

6) $f(x) = (\sin 5x)^2$

2 Soit f une fonction définie et dérivable en x_0 de courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un repère.
Calculer $f(x_0)$ et $f'(x_0)$, puis donner une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse x_0.

1) $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 7}{x^2 + 1}$ $\qquad x_0 = 1$

2) $f(x) = (2x - 1)^{11}$ $\qquad x_0 = 0$

3) $f(x) = 3x - 2\sqrt{-x} - \dfrac{5}{x}$ $\qquad x_0 = -1$

4) $f(x) = \sqrt{5 - 2x}$ $\qquad x_0 = 2$

5) $f(x) = \cos 2x$ $\qquad x_0 = \dfrac{\pi}{4}$

3 Soit la fonction tangente $x \mapsto \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

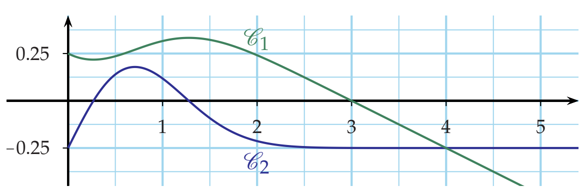
1) Pour quelles valeurs de x peut-on calculer $\tan x$?

2) Recopier et compléter le tableau suivant.

x	$\frac{3\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{7\pi}{2}$
$\cos x$						
$\sin x$						
$\tan x$						

4 Les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ tracées ci-dessous sur $[0\,;\,+\infty[$ représentent les fonctions h et H telles que h est la dérivée de H c'est-à-dire que $H' = h$.

Associer chaque courbe à sa fonction. Justifier.



5 Soit la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = \pi - x$.
Étudier les variations des fonctions suivantes.

1) u **2)** u^3 **3)** $\sqrt{u}$ **4)** $\cos u$

6 Vérifier que la fonction f est T-périodique.

1) $f : x \mapsto \sin(10\pi x)$ $\qquad T = 0,2$

2) $f : x \mapsto \cos\left(4x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ $\qquad T = \dfrac{\pi}{2}$

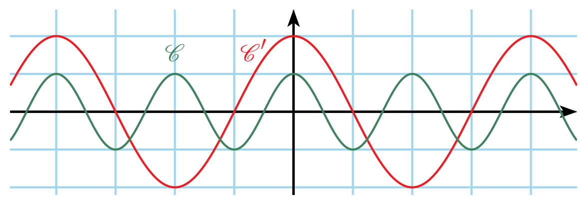
3) $f : x \mapsto \sin\left(\dfrac{10x - 1}{3}\right)$ $\qquad T = \dfrac{3\pi}{5}$

4) $f : x \mapsto \dfrac{2}{5}\cos(3\pi x)$ $\qquad T = \dfrac{2}{3}$

7 Soit deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2\cos x \text{ et } g(x) = \cos 2x.$$

représentées dans le repère ci-dessous.
Associer chaque courbe à sa fonction. Justifier.



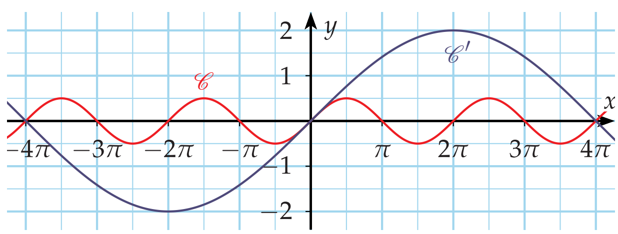
8 Résoudre sur I l'équation donnée.

1) $\cos t = \cos \dfrac{\pi}{6}$ $\qquad I = \left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$

2) $\sin t = \sin \dfrac{\pi}{3}$ $\qquad I =]-\pi\,;\,\pi]$

3) $\sin t = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad I = [0\,;\,2\pi]$

9 Les deux courbes suivantes ont une équation du type $y = a\sin\omega x$. Retrouver a et ω dans chaque cas.



10 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Parmi les affirmations suivantes, démêler le vrai du faux. Justifier.

1) $f'(x) = 2\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

2) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{\dfrac{3\pi}{4} + k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}$

3) f est strictement monotone sur $\left[-\dfrac{\pi}{4}\,;\,\dfrac{\pi}{4}\right]$

4) $f(x) = \sqrt{2} \Leftrightarrow x \in \left\{\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}$

Dérivabilité et dérivation

11 ► MÉTHODE 1 p. 89

Déterminer l'ensemble de dérivabilité $\mathscr{D}'$ de chaque fonction et calculer sa dérivée sur $\mathscr{D}'$:

1) $f : x \mapsto \sqrt{3x-7}$

2) $g : x \mapsto (5x^3-3)^2$

3) $h : x \mapsto \dfrac{1}{(x+6)^3}$

4) $a : x \mapsto (1-2\sqrt{x})^2$

5) $b : x \mapsto \sqrt{x^2-1}$

6) $c : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{10-x}}$

12 Soit f une fonction définie sur I par $f(x)$. Justifier que f est dérivable sur I puis calculer $f'(x)$.

1) $f(x) = \dfrac{5}{3\,(x-2)^4}$ $\quad I =]2\,;\,+\infty[$

2) $f(x) = \dfrac{x^2}{(x+1)^3}$ $\quad I =]-1\,;\,+\infty[$

3) $f(x) = \left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)^2$ $\quad I =]2\,;\,+\infty[$

4) $f(x) = (x-2)^3 + \dfrac{1}{(2x-1)^3}$ $\quad I = \left]\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$

13 ► MÉTHODE 2 p. 91

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Calculer $f'(x)$.

1) $f(x) = x^2 + \cos x$

2) $f(x) = \sin 2x$

3) $f(x) = \cos x \sin x$

4) $f(x) = \sin^2 x$

5) $f(x) = x^2 \cos x$

6) $f(x) = \cos^2 x$

7) $f(x) = \sin x + \cos x$

8) $f(x) = \dfrac{2\cos x + 3}{2\cos x - 3}$

14 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Calculer $f'(x)$.

1) $f(x) = \left(1-x^2\right)^2$

2) $f(x) = \left(1-3x^2\right)^3$

3) $f(x) = \left(x^2+x+1\right)^2$

4) $f(x) = \sin^2 x$

5) $f(x) = \cos 2x$

6) $f(x) = \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right)$

15 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes et calculer leurs dérivées (on admet qu'elles sont dérivables là où elles sont définies).

1) $f : x \mapsto \dfrac{\cos x}{\sin x}$

2) $g : x \mapsto (5x-3)^3 \cos x$

3) $h : x \mapsto \dfrac{\cos(\pi x - 1)}{\cos(x-\pi)}$

4) $u : x \mapsto 2x \sin(3x+1)$

5) $v : x \mapsto \left(3x^2-2\right)\sin^2 x$

6) $w : x \mapsto \dfrac{2\cos 2x}{3-\sin(1-x)}$

16 Soit f une fonction définie sur $\mathscr{D}_f$. Calculer $f'(x)$.

1) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ $\quad \mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \text{ où } k \in \mathbb{R}\}$

2) $f(x) = \dfrac{3}{2\cos x}$ $\quad \mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}\right\}$

3) $f(x) = \dfrac{\cos x}{3x + \sin x}$ $\quad \mathscr{D}_f = \mathbb{R}^*$

17 On note $f^{(0)} : x \mapsto \cos x$ la fonction cosinus, $f^{(1)}$ la dérivée de $f^{(0)}$, $f^{(2)}$ la dérivée de $f^{(1)}$, $f^{(3)}$ la dérivée de $f^{(2)}$, etc. On nomme $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f.

1) a) Calculer $f^{(1)}(x) = f'(x)$, $f^{(2)}(x) = f''(x)$ et $f^{(3)}(x)$.

b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

2) Prouver la formule analogue pour la fonction sinus.

18 Déterminer les valeurs où la dérivée des fonctions suivantes s'annule.

1) $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x}{2} + 3}$ définie sur $\mathbb{R}$.

2) $g : x \mapsto \dfrac{x^2}{\sqrt{2-x^2}}$ définie sur $\left]-\sqrt{2}\,;\,\sqrt{2}\right[$.

3) $h : x \mapsto \dfrac{\cos x + 2}{\sin^2 x + 2}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Applications de la dérivation

19 Soit la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x - \sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}}.$$

1) Montrer que f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et que :

$$f'(x) = \frac{x + 4\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}\,(2+\sqrt{x})^2}.$$

2) Résoudre l'équation $X^2 + 4X - 1 = 0$.
En déduire le signe de $f'(x)$.

3) Dresser le tableau de variation complet de f.

20 Soit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} - 2x \quad\text{et}\quad g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

1) Montrer que $g'(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.
En déduire le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$.

2) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3) Montrer que $f'(x) = g(x) - 2$.
En déduire le signe de $f'(x)$ puis les variations de f.

21 Écrire une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0.

1) $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+4}$ $\quad x_0 = 1$

2) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$ $\quad x_0 = -\dfrac{1}{2}$

3) $f(x) = \dfrac{4x^2}{(x+1)^3}$ $\quad x_0 = 2$

22 Étudier les variations de $f : x \mapsto (5x-1)^6$.

23 Soit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - 3x + 3 \text{ et } g(x) = -x^2 + x + 1.$$

Montrer que les courbes représentatives de ces deux fonctions ont une tangente commune en un point.

24 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2\cos x}{2+\cos x}.$$

Étudier les extremums locaux de f sur $[0\,;\,2\pi]$.

25 Soit la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto \frac{x^2+2x+1}{\sqrt{x+3}}.$$

1) Déterminer les ensembles de définition et de dérivabilité de f.
2) Montrer que, là où f est dérivable :

$$f'(x) = \frac{(x+1)(3x+11)}{2(x+3)\sqrt{x+3}}.$$

3) Dresser le tableau de variation de f.
4) Montrer que f admet un minimum sur son ensemble de définition.

26 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto \frac{x^2+2x+5}{\sqrt{x^2+1}}.$$

1) Démontrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
2) Établir que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

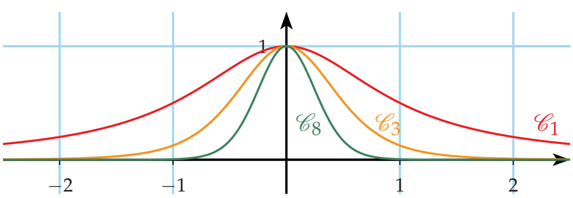
$$f'(x) = \frac{(x-1)(x^2+x-2)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}.$$

3) Dresser le tableau de variation de f.

27 Soit la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{1}{(x^2+1)^n}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Dans un repère orthonormé, on note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n. Ci-dessous, on a tracé $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_3$ et $\mathscr{C}_8$.



1) On admet que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Calculer $f_n'(x)$.
2) a) Déterminer l'équation réduite de la tangente (d) à la courbe $\mathscr{C}_3$ au point d'abscisse 1.
b) Soit la droite (Δ) d'équation $y = \frac{5}{32}x + \frac{3}{16}$.
Montrer qu'il existe une courbe $\mathscr{C}_n$ qui admet (Δ) comme tangente au point d'abscisse -1.
Déterminer la valeur de n correspondante.

28

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (1+x)^n - 1 - nx.$$

Établir le sens de variation de f sur $[-1\,;\,+\infty[$.
2) a) Établir **l'inégalité de Bernoulli** :

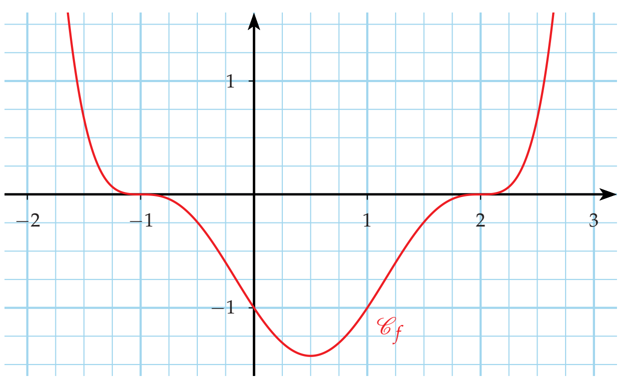
$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [-1\,;\,+\infty[$.
b) Pour quelle(s) valeur(s) de x a-t-on l'égalité ?

29 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{8}(x^2-x-2)^3$$

représentée par la courbe $\mathscr{C}_f$ ci-dessous.



1) Conjecturer les variations de f.
2) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
3) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
4) Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

S'entraîner

Calculs avec cos et sin

30 Exprimer les nombres suivants en fonction de $\cos x$ ou de $\sin x$:

1) a) $\sin(3\pi+x)$ c) $\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$

b) $\cos\left(\dfrac{5\pi}{2}-x\right)$ d) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)$

2) a) $\sin(\pi-x)+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$

b) $3\sin(\pi+x)-2\sin(\pi-x)+4\sin(x-\pi)$

31 Simplifier les expressions suivantes :

1) $\cos(x-\pi)$ 3) $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$

2) $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$ 4) $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$

32

1) Étant donné que $\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}$, calculer les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

2) Déterminer les valeurs exactes de $\cos\dfrac{7\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{7\pi}{12}$.

33 Établir pour tous réels x et y les égalités suivantes.

1) $\sin(x+y)\cos(x-y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$.

2) $1-\sin 2x=(\cos x-\sin x)^2$.

3) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)+\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)=\sqrt{2}\,(\cos x-\sin x)$.

34 Simplifier les expressions suivantes :

1) $\cos 2x\cos x-\sin 2x\sin x$

2) $\sin 3x\cos 2x-\sin 2x\cos 3x$

35

1) Simplifier l'expression suivante :

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$$

2) Établir l'égalité suivante :

$$\frac{\sin 5x}{\sin 2x}+\frac{\sin 2x}{\sin x}=\frac{(\sin 3x)^2}{\sin 2x\sin x}.$$

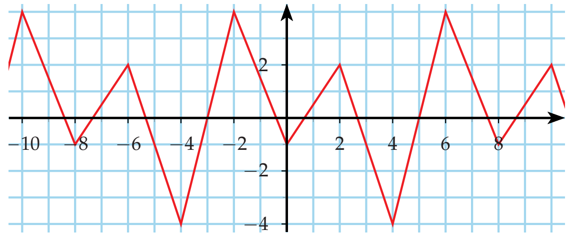
3) Résoudre dans $]-\pi\,;\,\pi]$ l'équation suivante :

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x)+\frac{1}{2}\sin(2x)=\cos\frac{\pi}{7}.$$

36 Soit $A=2\cos\dfrac{\pi}{7}+3\cos\dfrac{8\pi}{7}-2\sin\dfrac{6\pi}{7}-\sin\dfrac{\pi}{7}$.
Exprimer A sous la forme $\lambda\cos\dfrac{\pi}{7}+\mu\sin\dfrac{\pi}{7}$.

Périodicité

37 Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T représentée dans le repère suivant.



1) a) Déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ telles que $\mathscr{C}_f$ est invariante par translation de vecteur $\vec{u}$.

b) Déterminer la valeur de T.

2) Donner l'image par f des entiers : 14, -16, 56 et 58.

38 Vérifier que la fonction f est T-périodique.

1) $f : x \mapsto \sin(6x-3)$ $T=\dfrac{\pi}{3}$

2) $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{\cos x}$ $T=\pi$

3) $f : x \mapsto \cos^2 x-\sin^2 x$ $T=\pi$

4) $f : x \mapsto \left(4\cos^2 x-3\right)\cos x$ $T=\dfrac{2\pi}{3}$

Parité

On rappelle que, sur un ensemble $\mathscr{D}$ symétrique par rapport à 0, une fonction est :

- paire si, pour tout $x\in\mathscr{D}$, $f(-x)=f(x)$;
- impaire si, pour tout $x\in\mathscr{D}$, $f(-x)=-f(x)$.

39 Étudier la parité des fonctions suivantes.

- $f_1 : x\mapsto x^2+4$
- $f_2 : x\mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$
- $f_3 : x\mapsto \dfrac{1+x^2+x^4}{x(x^2+x^4)}$
- $f_4 : x\mapsto \dfrac{2x+1}{x-2}$
- $f_5 : x\mapsto \lfloor x\rfloor$
- $f_6 : x\mapsto |x|$
- $f_7 : x\mapsto \cos x+\sin x$
- $f_8 : x\mapsto \cos(x+\pi)$

40 On considère les types de fonctions suivantes :

1) affine $x\mapsto ax+b$

2) polynôme du second degré $x\mapsto ax^2+bx+c$

3) homographique $x\mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$

4) polynôme du troisième degré $x\mapsto ax^3+bx^2+cx+d$

Pour chaque type, à quelle condition a-t-on :

- une fonction paire ?
- une fonction impaire ?

(In)équations avec cos et sin

41 Résoudre dans $]-\pi\,;\,\pi]$ les équations suivantes :

1) $\cos x = \cos\dfrac{\pi}{4}$

2) $\sin x = \sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$

3) $\cos 2x = \cos\dfrac{\pi}{4}$

4) $\cos x = \cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

5) $2\cos 2x = 1$

6) $\sin 3x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

7) $\cos 2x = \cos x$

8) $\sin 3x = \cos x$

42

1) Résoudre dans $]-\pi\,;\,\pi]$ les équations suivantes :

a) $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\sin x = -\dfrac{1}{2}$

c) $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos x = -\sin x$

43

1) Sur un cercle trigonométrique, représenter les ensembles suivants :

a) $\cos x$ sur $\left[\dfrac{\pi}{6}\,;\,\dfrac{2\pi}{3}\right]$

b) $\sin x$ sur $\left[\dfrac{2\pi}{3}\,;\,\dfrac{7\pi}{3}\right]$

2) À l'aide d'un cercle trigonométrique, donner sans justification l'ensemble des solutions des inéquations suivantes dans l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$:

a) $\sin x \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos x \geqslant -\dfrac{1}{2}$

c) $\cos x < 0$

44 Résoudre sur $]-\pi\,;\,\pi]$ les équations suivantes :

1) $\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$

2) $\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

3) $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right) = \sin x$

4) $\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right) = \cos x$

45 Résoudre sur $]-\pi\,;\,\pi]$ les inéquations suivantes :

1) $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 \geqslant 0$

2) $2\sin^2 x + 5\sin x + 2 < 0$

3) $\cos^2 x - \left(3+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\cos x + \dfrac{3\sqrt{2}}{2} \leqslant 0$

46 Résoudre sur $]-\pi\,;\,\pi]$ les inéquations :

1) $\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right) < \dfrac{1}{2}$.

2) $\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{7}\right) \leqslant -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

47 Soit l'équation $\sin x = \dfrac{1}{4}$.

1) Montrer que l'équation possède une unique solution α sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

2) À la calculatrice, approcher α à 10^{-2} près.

3) Donner la valeur exacte de :

- $\cos\alpha$
- $\sin 2\alpha$
- $\cos 2\alpha$

Limites avec cos et sin

48 ROC

1) On rappelle que la fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\sin' = \cos$.

Démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

2) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ lorsque :

a) $u_n = n\sin\dfrac{1}{n}$ b) $u_n = n^2\sin\dfrac{1}{n}$ c) $u_n = \sqrt{n}\sin\dfrac{1}{n}$

49 Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{2\cos x}{2x-\pi}\ \text{pour}\ x \neq \frac{\pi}{2}.$$

En étudiant la dérivabilité de la fonction cosinus en $\dfrac{\pi}{2}$, déterminer $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)$.

50 Déterminer les limites suivantes :

1) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sin x}$

2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{\sin x}$ où $a\in\mathbb{R}$

3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{\sin^2 x}$

4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x - 1}{x}$

51 En opérant le changement de variable $X = x+\dfrac{\pi}{4}$, déterminer $\displaystyle\lim_{x\to-\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x+\cos x}{x+\frac{\pi}{4}}$.

52 Déterminer les limites suivantes :

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x - 2\sin x}{x^2}$

2) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{2}{\pi}}\frac{\pi x - 2}{\cos\frac{1}{x}}$

53

1) Montrer que $\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$.

2) En déduire $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$ puis $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{x}$.

54 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite non constante de réels. Pour tout entier n, on pose $u_n = \sin(a_n)$.

Existe-t-il (a_n) telle que (u_n) converge vers $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$?

55

1) Soit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_n = \dfrac{2n^2+\cos n}{3n^2+5}$.

Montrer que (u_n) converge et préciser sa limite.

2) Soit la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $v_n = \dfrac{\cos n - 2n}{\sqrt{n}}$.

Montrer que (v_n) converge et préciser sa limite.

Étude de fonctions

56 **Vrai ou faux ?**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\cos x$ et représentée par $\mathscr{C}_f$ dans un repère d'origine O.

Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse.

1) f est 2π-périodique.
2) $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à O.
3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - xf'(x) = x^2 \sin x$.
4) La tangente $\mathscr{C}_f$ en O a pour équation $y = x$.

57 ► MÉTHODE 3 p. 92

Soit f la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$f(x) = 2x + \sin 2x.$$

1) Étudier la parité de f. Interpréter graphiquement.
2) a) Démontrer que, pour tout $x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$:
$$f'(x) = 2(1 + \cos 2x).$$
b) Étudier les variations de f sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.
3) À l'aide de 1, dresser le tableau de variation de f.

58 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos x - \sin x.$$

1) Calculer $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.
2) Calculer $f'(x)$.
3) En déduire les variations de f.

59 Soit les fonctions f et g définies sur $[0 ; 2\pi]$ par :

$$f(x) = \cos 2x \cos x \text{ et } g(x) = \sin 2x \sin x.$$

1) Montrer que $f(x) - g(x) = \cos 3x$.
2) Résoudre l'équation $\cos 3x > 0$ sur $[0 ; 2\pi]$.
3) Étudier les positions relatives des courbes représentatives des fonctions f et g sur $[0 ; 2\,\pi]$.

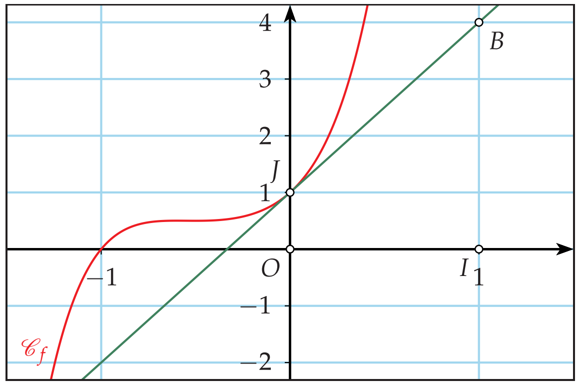
60 Étudier sur $[-\pi ; \pi]$ les variations de la fonction :

$$f : \theta \mapsto \sin(2\theta + \pi/6) - \theta.$$

61 Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = (ax+1)(2x^2 + x + 1)^2.$$

Dans le repère $(O ; I ; J)$ ci-dessous, on a représenté la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f et la droite qui passe par J et $B(1 ; 4)$.



1) a) Justifier que la courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point J.
b) Déterminer le coefficient directeur de (JB).
c) Démontrer que, pour tout réel x :
$$f'(x) = \left[10ax^2 + (3a+8)x + a + 2\right](2x^2 + x + 1).$$
d) On admet que (JB) est tangente à $\mathscr{C}_f$ au point J. Déterminer alors la valeur de a.
2) Montrer que $f'(x) = (10x^2 + 11x + 3)(2x^2 + x + 1)$.
3) Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$.

62 Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x}.$$

1) Déterminer le domaine de définition de f.
2) Montrer que f est périodique.
3) Montrer que f n'est ni paire ni impaire.
4) Calculer $f'(x)$. En déduire le sens de variation de f sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}\right[$.

63 Soit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \text{ et } g(x) = f(x) - \frac{x^4}{24}.$$

1) a) Dériver deux fois f et en déduire que $f(x) \geqslant 0$ pour tout réel x.
b) Dériver quatre fois g et en déduire que $g(x) \leqslant 0$ pour tout réel x.
c) En déduire un encadrement de $\cos x$.
2) a) Déterminer la précision $\varepsilon(x)$ de l'encadrement.
b) Étudier la fonction ε.
En déduire à quelle condition sur x il est pertinent d'utiliser cet encadrement.
3) Application : encadrer $\cos\frac{\pi}{5}$ et estimer sa précision.

64 Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,\pi]$ par :

$$f(x) = \cos x(1 + \sin x)$$

et représentée par $\mathscr{C}$ dans un repère.

1) Vérifier que f est 2π-périodique et que f n'est ni paire ni impaire.
2) Justifier que f est dérivable et montrer que :

$$f'(x) = (1 + \sin x)(1 - 2\sin x).$$

3) a) Résoudre sur $[0\,;\,\pi]$ l'inéquation $2\sin x \leqslant 1$.
   b) En déduire le signe de $f'(x)$.
4) Dresser le tableau de variation de f.
5) Vérifier que pour tout réel x :

$$f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -f\left(\frac{\pi}{2} + x\right).$$

   Qu'en déduit-on pour la courbe $\mathscr{C}$?
6) Déterminer l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$.
7) Tracer $\mathcal{T}$ puis $\mathscr{C}$.

65

1) Soit f la fonction définie sur $[-1\,;\,3[$ par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{4(x+1)}{3-x}}$$

représentée par $\mathscr{C}_f$ dans un repère du plan.

   a) Montrer que la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 a pour équation :

$$x - y + 1 = 0.$$

   b) Dresser le tableau de variation de f.
   c) Étudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\mathcal{T}$.
2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$g(x) = \frac{1}{4}x^2(3-x)^3$$

représentée par $\mathscr{C}_g$ dans un repère du plan.

   a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$g'(x) = \frac{1}{4}x(6-5x)(x-3)^2.$$

   b) Déterminer les points de $\mathscr{C}_g$ où ses tangentes sont horizontales.
   c) Dresser le tableau de variation de f.
3) Soit la fonction définie par :

$$\begin{cases} h(x) = f(x) & \text{si } x \in [-1\,;\,1[\\ h(x) = g(x) & \text{si } x \in [1\,;\,+\infty[\end{cases}.$$

   La fonction h est-elle dérivable en 1 ?

66 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos x + \cos^2 x.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

1) Étudier la parité de la fonction f.
2) Étudier la périodicité de la fonction f.
3) Démontrer que f est :
   - strictement décroissante sur $\left[0\,;\,\frac{2\pi}{3}\right]$;
   - strictement croissante sur $\left[\frac{2\pi}{3}\,;\,\pi\right]$.
4) Démontrer que $\mathscr{C}_f$ admet des tangentes horizontales aux points d'abscisses 0, $\frac{2\pi}{3}$, π et $\frac{4\pi}{3}$.
5) Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant :

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$
$f(x)$								

6) Tracer $\mathscr{C}_f$.

67 Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,2\pi]$ par :

$$f(x) = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x.$$

1) Démontrer que $f'(x) = -\sin x(1 + 2\cos x)$.
2) Résoudre dans $[0\,;\,2\pi]$ l'équation $f'(x) = 0$.
3) a) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0\,;\,2\pi]$.
   b) En déduire les variations de f sur $[0\,;\,2\pi]$.
4) Tracer la courbe représentative de f sur $[0\,;\,2\pi]$.

68 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sqrt{3}\cos x - \sin x.$$

1) Démontrer que f est périodique de période 2π.
2) Démontrer que $f(x) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.
3) Démontrer que f est décroissante sur $\left[0\,;\,\frac{5\pi}{6}\right]$, croissante sur $\left[\frac{5\pi}{6}\,;\,\frac{11\pi}{6}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{11\pi}{6}\,;\,2\pi\right]$.
4) Dresser le tableau de variation de f sur $[0\,;\,2\pi]$.

69

Partie A

Soit la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$u(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1.$$

1) Calculer $u'(x)$ puis dresser le tableau de variation de la fonction u.
2) Démontrer que l'équation $u(x) = 0$ a une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que $1 < \alpha < 2$.
3) En déduire le signe de $u(x)$ selon les valeurs de x.
4) Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3}.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]-1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}.$$

1) Déterminer les limites de f en -1 et en $+\infty$.
2) Montrer que $f'(x) = \dfrac{u(x)}{(1+x^3)^2}$.
3) Dresser le tableau de variation de f sur $]-1\,;+\infty[$
4) En remarquant que $2\alpha^3 - 3\alpha^2 - 1 = 0$, montrer que $f(\alpha) = \dfrac{2(1-\alpha)}{3(1+\alpha^2)}$.

Partie C

Soit les fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}^*$ par :

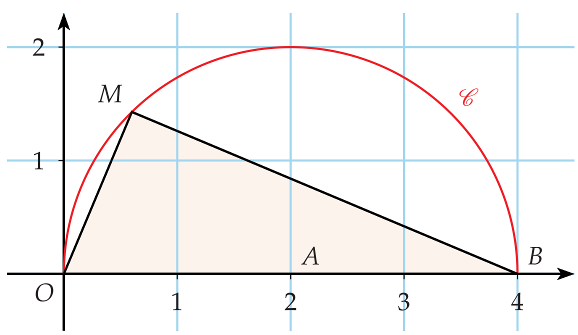
$$g(x) = x^2\left(1 - \frac{1}{x}\right) \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

1) Conjecturer avec une calculatrice les positions des courbes représentatives des fonctions g et h.
2) Montrer que $g(x) - h(x) = \dfrac{u(x)}{2x}$ puis, dresser un tableau de signes de $(g-h)(x)$ sur $\mathbb{R}^*$.
Le résultat est-il conforme à la conjecture ?

70 **Aire maximale** INFO

Soit la fonction f définie sur $[0\,;4]$ par :

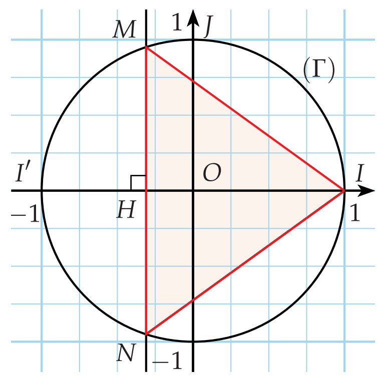
$$f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x}.$$



1) Ouvrir un logiciel de géométrie dynamique (garder toujours le repère orthonormé).
   a) Placer $O(0\,;0)$, $A(2\,;0)$ et $B(4\,;0)$.
   b) Tracer la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f.
   c) Placer un point M sur $\mathscr{C}$. Afficher la distance AM. Que constate-t-on lorsqu'on déplace M ?
   d) Comment semble évoluer y_M lorsque M parcourt $\mathscr{C}$ de O à B ?
   e) Construire le triangle MOB et afficher son aire. Déplacer M pour que cette aire soit maximale.
2) Démontrer que $\mathscr{C}$ est un demi-cercle de centre A de rayon 2.
3) Étudier les variations de f sur $[0\,;4]$.
4) On note $\mathcal{A}(x)$ l'aire du triangle MOB.
   a) Montrer que $\mathcal{A}(x) = 2f(x)$.
   b) Dresser le tableau de variation de la fonction $\mathcal{A}$. Préciser le maximum de $\mathcal{A}$ et la valeur pour laquelle il est atteint.

71 ***MIN* au max !**

Dans un repère orthonormé $(O\,;I\,,J)$, soit le cercle (Γ) de centre O et de rayon 1 et le point $I'(-1\,;0)$.
La perpendiculaire à la droite (II') passant par un point H sur $[II']$, distinct de I et I', coupe (Γ) en M et N.



Soit f la fonction définie sur $[-1\,;1]$ par :

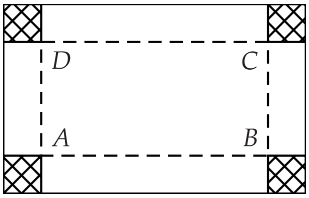
$$f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}.$$

1) Exprimer l'aire du triangle MIN en fonction de l'abscisse x du point H.
2) Étudier la dérivabilité de f en 1 et en -1.
3) Calculer $f'(x)$ pour $x \in]-1\,;1[$. Étudier son signe.
4) Dresser le tableau de variation de f.
5) Montrer que le triangle MIN d'aire maximale est équilatéral.

Problèmes concrets

72 Le carton plein

Avec un carton rectangulaire de 80 cm sur 50 cm, on fabrique une boîte en forme de pavé droit. Pour cela, on retire aux quatre coins du carton quatre carrés de côté x (en cm) puis on plie suivant $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.



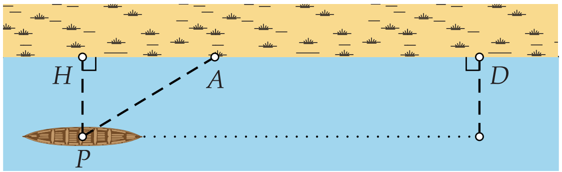
1) Pour quelles valeurs de x peut-on réaliser la boîte ?

2) Exprimer le volume $\mathcal{V}(x)$ en cm^3 de la boîte obtenue.

3) Étudier les variations de $\mathcal{V}$.
En déduire la valeur de x pour laquelle $\mathcal{V}$ est maximal et les dimensions de la boîte obtenue.

73 Le pêcheur met le turbo

Une pirogue, représentée par le point P ci-après, est à 3 kilomètres du point H le plus proche du rivage.
Les points D et A désignent deux autres points du rivage respectivement là où se rend le pêcheur et là où la pirogue accoste.



La pirogue file à une vitesse moyenne de 15 km·h^{-1} et une fois accosté, le pêcheur peut prendre un véhicule qui se déplace à une vitesse moyenne de 40 km·h^{-1}.
La distance HD fait 15 kilomètres.
On note x la distance HA en kilomètres.

1) Exprimer PA et AD en fonction de x.

2) On note $t(x)$ le temps en heures en fonction de x.

a) Justifier que $t(x) = \dfrac{1}{120}\left(8\sqrt{x^2+9} + 45 - 3x\right)$.

b) Calculer $t'(x)$.

c) Dresser le tableau de variation de t.

3) En déduire l'endroit où le pêcheur doit accoster pour qu'il atteigne sa destination au plus vite.

74 Jeter la pierre

Une pierre, jetée du haut d'une falaise, quitte la main du lanceur à 1,5 m de hauteur à l'endroit où il se situe.
t secondes après le lancer, l'altitude en mètres de la pierre $h(t)$ est donnée par la formule :

$$h(t) = 24 + 8t - 2t^2 \quad \text{où } t \in [0\,;\,6].$$

1) Déterminer la hauteur de la falaise.

2) Déterminer l'altitude maximale atteinte par la pierre.

3) Déterminer après combien de secondes la pierre frappe la surface de l'eau.

75 Moteur !

La puissance mécanique utile P_u d'un moteur s'exprime en fonction de l'intensité absorbée I par la relation :

$$P_u = -148 + 150I - 2I^2.$$

Montrer qu'il existe une intensité I donnant une puissance utile maximale et déterminer cette puissance.

76 Les feux de la rampe

Un théâtre veut bâtir une rampe conduisant d'un palier à un autre, plus haut de 1 dm. La norme impose que :

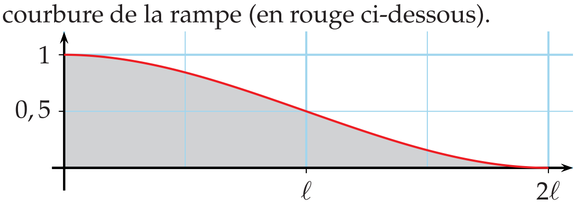
- la rampe ne doit pas être anguleuse ;
- la pente de la rampe ne doit pas excéder 10 %.

Soit 2ℓ la longueur au sol de la rampe où ℓ est en dm.

1) Vérifier que la norme entraîne les conditions :

- $h(0) = 1$
- $h(2\ell) = 0$
- $h'(0) = 0$
- $h'(2\ell) = 0$
- Pour tout $x \in [0\,;\,2\ell]$, $|h'(x)| \leqslant 0,1$

2) Une fonction $h : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ modélise la courbure de la rampe (en rouge ci-dessous).



3) Exprimer a, b, c et d en fonction de ℓ.

4) Le but est d'avoir une longueur de rampe minimale.

a) Exprimer $h'(x)$ en fonction de ℓ.

b) Calculer $h''(x)$ et étudier son signe.
En déduire que h' admet un minimum en ℓ.

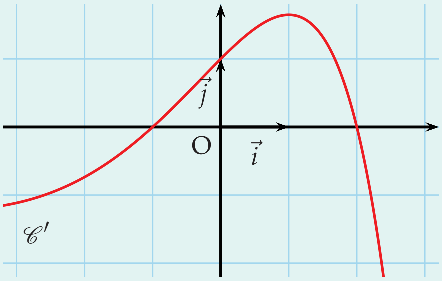
c) Appliquer la condition sur la pente maximale pour déterminer la longueur de rampe minimale.

5) Refaire le travail avec $h : x \mapsto a\cos(bx) + c$.
Quelle modélisation le théâtre va-t-il choisir ?

77 **D'après Bac (Métropole - juin 2012)**

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$.
Soit une fonction f dérivable sur $[-3\,;\,2]$ telle que :

- $f(0) = -1$;
- la dérivée f' de f est représentée par $\mathscr{C}'$ ci-dessous.

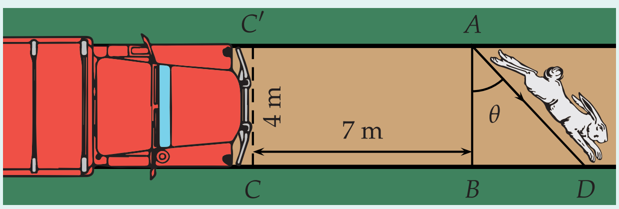


Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1) Pour tout réel x de l'intervalle $[-3, -1]$: $f'(x) \leqslant 0$.
2) La fonction f est croissante sur l'intervalle $[-1\,;\,2]$.
3) Pour tout réel x de l'intervalle $[-3\,;\,2]$: $f(x) \geqslant -1$.
4) La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 passe par le point de coordonnées $(1\,;0)$.

78 **D'après Bac (Nouvelle-Calédonie - déc. 2005)**

Un camion, occupant les 4 mètres de large d'un chemin rectiligne, arrive à la vitesse de 60 km·h^{-1} à proximité d'un lapin. Au moment où le camion n'est plus qu'à 7 mètres du lapin, celui-ci sursaute et traverse le chemin en ligne droite à 30 km·h^{-1}.
Sur le schéma ci-dessous : le segment $[CC']$ représente l'avant du camion; le lapin va du point A au point D avec un angle $\theta = \widehat{BAD}$ où $0 \leqslant \theta < \dfrac{\pi}{2}$ (en radians).



1) Déterminer les distances AD et CD en fonction de θ et les temps t_1 et t_2 mis par le lapin et le camion pour parcourir respectivement les distances AD et CD.
2) On pose $f(\theta) = \dfrac{7}{2} + \dfrac{2\sin\theta - 4}{\cos\theta}$.
Montrer que le lapin aura traversé la route avant le passage du camion si et seulement si $f(\theta) > 0$.
3) Conclure.

79 **D'après Bac (Métropole - sept. 2007)**

Les parties A et B portent sur un même thème, la dérivation, mais sont indépendantes.

Partie A **ROC**

On suppose connue la formule donnant la dérivée du produit de deux fonctions dérivables.
Soit n un entier naturel strictement supérieur à 1.
Dire si chacune des propositions P et Q énoncées ci-dessous est vraie ou fausse et justifier.

- P : « Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n$; alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f' donnée sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = nx^{n-1}$ ».
- Q : « Soit u une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f = u^n$; alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f' donnée par $f' = nu^{n-1}$ ».

Partie B

Soit g la fonction (qu'on ne cherchera pas à expliciter), définie sur $]-1\,;\,1[$ par :

$$\begin{cases} g(0) = 0 \\ g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases}$$

et h la fonction composée définie sur $]-\pi\,;\,0[$ par :

$$h(x) = g(\cos x).$$

1) Démontrer que pour tout $x \in]-\pi\,;\,0[$ on a $h'(x) = 1$, où h' désigne la dérivée de h.
2) Calculer $h\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$ puis donner l'expression de $h(x)$.

80 **D'après Bac**

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,2\pi]$ par :

$$f(x) = 1 + \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x.$$

1) **a)** Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f.
b) On rappelle la relation : $\sin 2a = 2\sin a \cos a$.
Montrer que, pour tout réel $x \in [0\,;\,2\pi]$:

$$f'(x) = -\sin x(1 + 2\cos x).$$

2) Résoudre dans l'intervalle $[0\,;\,2\pi]$, l'équation :

$$\sin x(1 + 2\cos x) = 0.$$

3) Dresser le tableau de signes de $f'(x)$ sur $[0\,;\,2\pi]$.
4) Déduire des questions **2** et **3** le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,2\pi]$.
Préciser les ordonnées des points dont l'abscisse x vérifie $f'(x) = 0$.

81 **D'après Bac (Métropole - septembre 2012)**

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variation est donné ci-dessous où a et b sont deux réels.

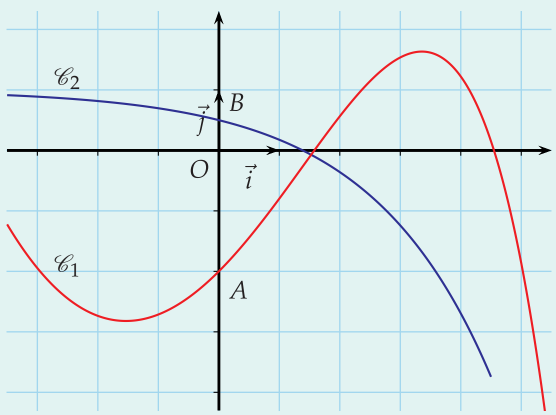
x	$-\infty$		a		$+\infty$
f			b		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	$-\infty$				$-\infty$

1) Déterminer le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.

2) Dans le repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$ ci-dessous, on a tracé deux courbes :

- une courbe $\mathscr{C}_1$ qui passe par $A(0\,;\,-2)$;
- une courbe $\mathscr{C}_2$ qui passe par $B\left(0\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$.

On sait que l'une de ces deux courbes représente la fonction dérivée f' de f et que l'autre représente une fonction F telle que $F' = f$ sur $\mathbb{R}$.



a) Indiquer laquelle de ces deux courbes est la courbe représentative de la fonction f. Justifier.

b) À l'aide de considérations graphiques sur $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$, prouver que $1 < a < 2$ et $b > 0$.

3) Dans cette question, on admet que la fonction f est telle que, pour tout réel x :

$$f(x) - 2f'(x) = x.$$

a) Déterminer une fonction affine g telle que pour tout réel x, $g(x) - 2g''(x) = x$.

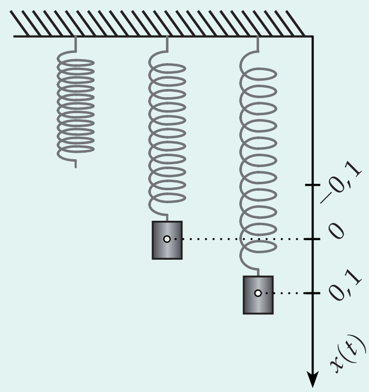
b) Démontrer que $(f-g)' = \dfrac{1}{2}(f-g)$.

82 **Un exercice qui a du ressort**

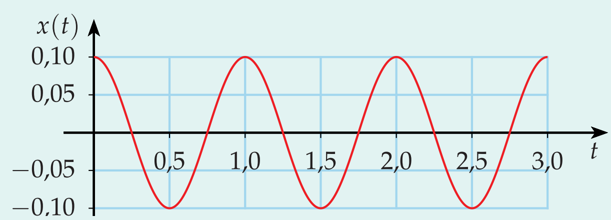
On étudie les oscillations (supposées non amorties) d'un pendule élastique vertical constitué d'un ressort à spires non jointives, de masse négligeable et de constante de raideur k, auquel on accroche un solide de masse $m = 0,1$ kg.

Le ressort s'allonge et un équilibre est atteint. Puis, on étire le ressort verticalement et on le lâche.

La position du centre d'inertie du solide est repérée par x (en mètres) en fonction du temps t (en secondes).



Un enregistrement de 3 secondes a donné la représentation graphique suivante :



1) Lire graphiquement $x(0)$ et $x'(0)$.

2) Pour $t \geqslant 0$, on définit la fonction x par :

$$x(t) = \alpha \sin(2\pi t + \varphi) \text{ avec } 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi.$$

a) Montrer que la fonction x est 1-périodique.

b) Déterminer α et φ.

3) L'équation que vérifie l'abscisse x du centre d'inertie du solide, appelée équation différentielle, s'écrit :

$$mx''(t) + kx(t) = 0.$$

Calculer la valeur exacte de la constante de raideur k du ressort.

4) Étudier le signe de $x'(t)$ sur $[0\,;\,1]$.

En déduire les variations de x sur $[0\,;\,1]$.

83

Partie A : Une auxiliaire rationnelle

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par :

$$f(x) = \frac{1-x^2}{2+x}.$$

1) Montrer qu'on peut écrire $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+2}$ avec a, b et c trois réels qu'on déterminera.

2) Étudier les variations de f et montrer que f a deux extremums locaux.

3) Dans un repère, soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f et le point $\Omega(-2\,;\,4)$.
Démontrer que $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à Ω.

Partie B : Une composée de sinus

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(t) = \frac{1-\sin^2 t}{2+\sin t}.$$

1) Pour tout réel t, montrer que $\varphi(\pi - t) = \varphi(t)$.
Expliquer alors pourquoi on peut restreindre l'étude des variations de φ à l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

2) **a)** Justifier que l'équation $\sin t = \sqrt{3} - 2$ a une unique solution (notée α) dans $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

b) En utilisant les résultats de la partie A, étudier les variations de φ sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\alpha\right]$ puis sur $\left[\alpha\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

c) Prouver que $\varphi'(t) = f'(\sin t)\cos t$.
Retrouver les valeurs pour lesquelles $\varphi'(t) = 0$.

d) Représenter graphiquement φ sur $\left[-\dfrac{3\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

84 Fonction définie par morceaux

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{si } x < 1 \\ -2 & \text{si } x = 1 \\ \sqrt{x-1} - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1) f est-elle : • continue en 1 ? • dérivable en 1 ?

2) Interpréter graphiquement les résultats précédents.

85 Ensemble de barycentres

Soit A, B et C trois points non alignés et α un réel dans l'intervalle $[-1\,;\,1]$.
On définit le point G_α par l'égalité vectorielle :

$$(\alpha^2+1)\overrightarrow{G_\alpha A} + \alpha\overrightarrow{G_\alpha B} - \alpha\overrightarrow{G_\alpha C} = \overrightarrow{0}.$$

1) Faire une figure et placer les points G_1 et G_{-1}.

2) **a)** Montrer que $\overrightarrow{AG_\alpha} = -\dfrac{\alpha}{\alpha^2+1}\overrightarrow{BC}$.

b) Soit f la fonction définie sur $[-1\,;\,1]$ par :

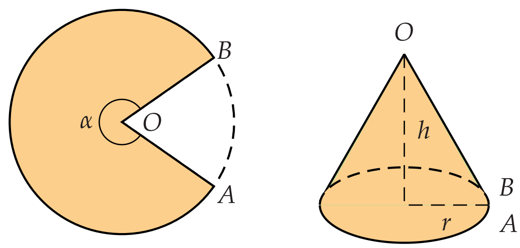
$$f(\alpha) = -\frac{\alpha}{\alpha^2+1}.$$

Dresser le tableau de variation de f.

c) En déduire l'ensemble des points G_α.

86 Optimiser le volume d'un cône

À partir d'un secteur angulaire $\widehat{AOB}$ de mesure α, on forme un cône en joignant les segments $[OA]$ et $[OB]$.
Le but est de déterminer quelle mesure en radians de l'angle α donne au cône son volume maximal.



1) Exprimer le rayon r et la hauteur h du cône en fonction de OA et α.

2) Prouver que le volume du cône en fonction de α est :

$$\mathcal{V}(\alpha) = \frac{OA^3}{24\pi^2}\alpha^2\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}.$$

3) **a)** Étudier les variations de $\mathcal{V}$ sur $]0\,;\,2\pi[$.

b) En déduire que $\mathcal{V}$ admet un maximum et répondre au problème posé.

87

1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\cos x - 1}{x} & \text{pour } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}.$$

Montrer que la fonction f est continue en 0.

2) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \lfloor x \rfloor \sin \pi x$$

où $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est la fonction partie entière.

a) Simplifier $g(x)$ selon les conditions suivantes :
• $x \in [-1\,;\,0[$ • $x \in [0\,;\,1[$ • $x \in [1\,;\,2[$

b) Justifier que la fonction g est continue en 0 et en 1.

c) Conjecturer l'ensemble de continuité de f.

d) Tracer la courbe représentative de cette fonction sur la calculatrice.

88

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{3\,(x-1)^3}{3x^2+1}.$$

représentée par $\mathscr{C}$ dans un repère.

1) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

2) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.

3) Dresser le tableau de variation de f.

4) Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

a) Montrer qu'il existe un triplet de réels $(a\,;\,b\,;\,c)$, que l'on déterminera, tel que pour tout réel x :

$$f(x) = ax + b + \frac{cx}{3x^2+1}.$$

b) Justifier que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$.

c) Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = ax + b$.

d) Que peut-on dire de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}$ lorsque $|x|$ augmente ?

Partie B

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{3\,(\sin x - 1)^3}{3\sin^2 x + 1}.$$

1) Vérifier que g est 2π-périodique.

2) **a)** Exprimer une relation entre f et g.

b) On admet que, si u et v sont deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, alors la fonction composée de v suivie de u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$[u(v(x))]' = v'(x) \times u'(v(x))\,.$$

En déduire une expression de $g'(x)$.

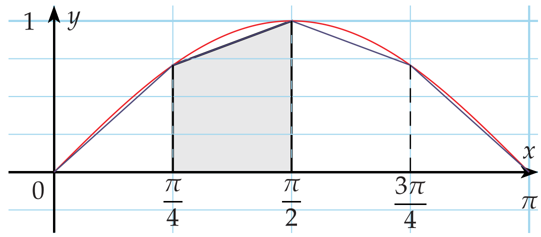
3) Dresser le tableau de variation de g sur $[-\pi\,;\,\pi]$.

89 **Arc de sinusoïde** ALGO

Le but est d'estimer la longueur ℓ de l'arc de la courbe représentative de la fonction sinus sur $[0\,;\,\pi]$.

Pour cela, on subdivise $[0\,;\,\pi]$ en $n \geqslant 2$ intervalles de longueurs $\dfrac{\pi}{n}$ et on approche la courbe par une ligne brisée qui relie dans l'ordre les points de coordonnées $\left(\dfrac{k\pi}{n}\,;\,\sin\dfrac{k\pi}{n}\right)$ pour $k \in \{0\,;\,1\,;\,2\,;\,\cdots\,;\,n\}$.

On note ℓ_n la longueur de la ligne brisée.



1) Calculer la valeur exacte de ℓ_2 et ℓ_3.

2) L'algorithme suivant, destiné à afficher en sortie la longueur ℓ_n en fonction de n, est incomplet.

```
1.  Variables
2.  i, n et L sont des nombres
3.  Traitement
4.  Lire n
5.  Affecter à L la valeur 0
6.  POUR i ALLANT DE 0 à n
7.      DÉBUT POUR
8.      L PREND LA VALEUR L + ▇▇▇
9.      FIN POUR
10. Afficher L
```

a) Compléter l'instruction manquante à la ligne 8.

b) Programmer cet algorithme sur AlgoBox.

c) Que vaut environ $\ell_{1\,000}$?

3) **a)** Modifier l'algorithme précédent pour approcher l'aire $\mathcal{A}_n$ du domaine délimité par l'arc et l'axe des abscisses (on pourra considérer des trapèzes comme celui qui est ombré sur la figure).

Vérifier que cette aire semble tendre vers 2 lorsque n tend vers $+\infty$.

b) On admet que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{A}_n = 2$.

En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{2}{\pi}$.

90

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$f(x) = (\cos x + 1)\sin x.$$

1) Démontrer que f' est définie sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ par :

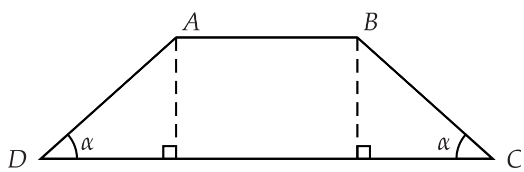
$$f'(x) = 2\cos^2 x + \cos x - 1.$$

2) Étudier le signe du trinôme $2X^2 + X - 1$.

3) En déduire le signe de $f'(x)$, puis les variations de f.

Partie B

$ABCD$ est un trapèze tel que $AD = AB = BC = 1$.
Déterminer la valeur de l'angle α pour laquelle l'aire du trapèze est maximale.



91

1) Soit g la fonction définie sur $[0\,;\,\pi]$ par :

$$g(x) = x\cos x - \sin x.$$

a) Étudier g et dresser son tableau de variation.

b) En déduire le signe de $g(x)$ sur $[0\,;\,\pi]$.

2) Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,\pi[$ par :

$$\begin{cases} f(0) & = & 1 \\ f(x) & = & \dfrac{\sin x}{x} \quad \text{pour } x \in]0\,;\,\pi] \end{cases}$$

Étudier les variations de f sur $]0\,;\,\pi]$.

3) Étudier la limite de f en 0.

4) Soit la fonction φ définie sur $[0\,;\,\pi]$ par :

$$\varphi(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}.$$

a) Calculer $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$ et $\varphi'''(x)$.

b) En déduire le signe de φ.

c) Prouver alors que, pour tout réel $x \in [0\,;\,\pi]$:

$$0 \leqslant x - \sin x \leqslant \frac{x^3}{6}.$$

5) Prouver que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.

6) Construire la courbe représentative de f dans un repère orthonormé *(on prendra 3 cm pour unité).*

92 Soit deux suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définies par :

$$u_n = \sin\frac{1}{n^2} + \sin\frac{2}{n^2} + \cdots + \sin\frac{n}{n^2};$$
$$v_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}.$$

1) Démontrer que la suite (v_n) converge vers $\frac{1}{2}$.

2) a) Soit les trois fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto x - \sin x$$
$$g : x \mapsto -1 + \frac{x^2}{2} + \cos x$$
$$h : x \mapsto -x + \frac{x^3}{6} + \sin x$$

Démontrer que ces fonctions sont à valeurs positives ou nulles sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

b) Justifier que pour tout $n \geqslant 1$:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 \leqslant n^4.$$

Déduire du **2a** l'inégalité :

$$v_n - \frac{1}{6n^2} \leqslant u_n \leqslant v_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

c) Démontrer que la suite (u_n) est convergente . Déterminer sa limite.

93 Soit la fonction f définie sur $[0\,;\,\pi]$ par :

$$f(x) = \cos 3x \cos^3 x.$$

1) a) Montrer que $f'(x) = -3\cos^2 x \sin 4x$.

b) Dresser le tableau de signes de la fonction f'.

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

2) a) Montrer que, pour tout réels x et y :

$$2\cos x\cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y).$$

b) Montrer que, quel que soit le réel $x \in [0\,;\,\pi]$:

$$f(x) = \frac{1}{8}\cos 6x + \frac{3}{8}\cos 4x + \frac{3}{8}\cos 2x + \frac{1}{8}.$$

94

PARTIE A

On rappelle les formules trigonométriques suivantes :

- $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$.
- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.

1) Déterminer une valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\sin \frac{\pi}{8}$.

2) En déduire une valeur exacte de $\cos \frac{3\pi}{8}$.

3) Montrer que $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$.

PARTIE B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sin^3 x \cos 3x.$$

1) Montrer qu'on peut restreindre l'étude de f à l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.

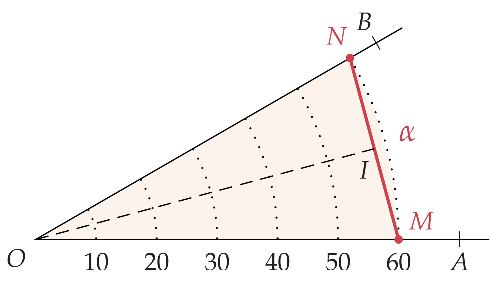
2) Étudier les variations de f sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.
Dresser le tableau de variation complet de f.
On admettra que : $f\left(\frac{3\pi}{8}\right) = -\frac{3+2\sqrt{2}}{8}$.

3) Résoudre sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ l'équation $f(x) = 0$.

4) Représenter f sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ dans un repère.

95 **Approximation d'un angle**

Soit un angle géométrique $\widehat{AOB}$ mesuré en degrés, le point M sur $[OA)$ et le point N sur $[OB)$ tels que $OM = ON = 60$ mm et le point I milieu de $[MN]$.



1) Montrer que $\sin\left(\frac{\pi\alpha}{360}\right) = \frac{MN}{120}$ où MN est en mm.

2) Soit f la fonction définie sur $I = \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$f(x) = x - \sin x.$$

a) Étudier les variations de f sur I.

b) En déduire que, pour $x \in I$, $f(x) \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2} - 1\right]$.

c) Expliquer pourquoi, pour $x \in I$, on peut écrire $\sin x \approx x$ en commettant une erreur inférieure à 1.

3) En déduire qu'en mesurant MN en millimètres, on obtient une approximation de α en degrés.

4) Soit g la fonction qui à α associe MN.
À l'aide de la formule d'Al-Kashi, exprimer $g(\alpha)$.

5) Soit la fonction $\delta : \alpha \mapsto g(\alpha) - \alpha$.
À l'aide de la calculatrice, représenter graphiquement la fonction δ. Que peut-on en conclure ?

96

1) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 2x - \sqrt{1+x^2}.$$

a) Étudier les variations de la fonction g.

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α que l'on déterminera.

c) En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.

2) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2\sqrt{1+x^2} - x$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal. On note $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ les droites d'équations respectives $y = x$ et $y = -3x$.

a) Étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) Montrer que, pour tout réel x :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{1+x^2}}.$$

c) En déduire le tableau de variation de f.

d) Montrer que la droite $(\mathscr{D}) : y = x$ est asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$ c'est-à-dire que $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x] = 0$.

e) Montrer de la même façon que la droite $(\mathscr{D}')$ est asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}$ en $-\infty$.

f) Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport aux deux droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$.

g) Tracer la courbe $\mathscr{C}$ ainsi que les droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$.

97

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x}} + 1.$$

1) Montrer que $g'(x) = \dfrac{3x^2 - 1}{2x\sqrt{x}}$.
En déduire le signe de $g'(x)$.

2) Déterminer la limite de g en 0.

3) Donner le tableau de variation de g (on ne demande pas la limite de g en $+\infty$). En déduire le signe de $g(x)$ pour $x \in]0\,;\,+\infty[$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x - \frac{1}{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}$$

et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1) a) Déterminer la limite de f en 0.
Interpréter graphiquement le résultat.

b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2) Montrer que, pour tout x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x\sqrt{x}}.$$

En déduire le signe de $f'(x)$ puis le tableau de variation de f.

3) Montrer que l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution x_0, comprise dans l'intervalle $[4\,;5]$.
À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de x_0.

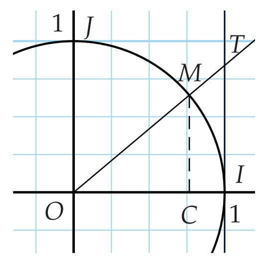
4) a) Calculer la limite de $f(x) - x$ lorsque x tend vers $+\infty$.
Interpréter graphiquement ce résultat.

b) Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite d'équation $y = x$.

c) Déterminer une équation de la tangente $(\mathcal{T})$ à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 4.

98 Dérivée de cos et sin

Dans un repère orthonormé $(O\,;\,I,\,J)$, on considère un point M sur le cercle trigonométrique de centre O tel que $\left(\overrightarrow{OI}\,;\,\overrightarrow{OM}\right) = x$ avec $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.
On définit aussi C le projeté orthogonal de M sur (OI) et T l'intersection de (OM) et de la perpendiculaire à (OI) passant par I.



1) Exprimer en fonction de x les aires du secteur angulaire du cercle trigonométrique d'angle $\widehat{MOI}$ et des triangles MOI et TOI.

2) En déduire que, pour tout $x \in \left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$:

- $\sin x < x < \tan x$
- $\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1$

3) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x}$. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x}$.

4) Montrer que pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,0\right[\cup \left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$:

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{1+\cos x}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2.$$

En déduire $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$ puis $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x}$.

5) Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ fixé, calculer $\cos' x_0$ et $\sin' x_0$ (on pourra utiliser les formules trigonométriques de duplication et les limites obtenues précédemment).

99 Polynômes en cosinus et linéarisation

On rappelle que :

- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

1) a) Justifier les égalités suivantes : $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ et $\sin 2x = 2\cos x \sin x$.

b) En déduire les égalités suivantes : $\cos 3x = f(\cos x)$ avec $f(x) = 4x^3 - 3x$.

c) Déterminer de la même façon $\cos 4x$ sous forme d'un polynôme de degré 4 en $\cos x$.

2) En trigonométrie, linéariser une puissance de $\cos x$, c'est l'écrire comme somme de termes du type $\alpha \cos \beta x$. *Par exemple :* $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}\cos 2x + \dfrac{1}{2}$.
En s'aidant des résultats précédents, linéariser $\cos^3 x$ et $\cos^4 x$.

100 **Racine carrée, cubique et cosinus**

Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;\,1]$ par :

$$f(x) = x\sqrt{1-x}.$$

1) **a)** Étudier la dérivabilité de f en 1.
Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Montrer que f est dérivable sur $]-\infty\,;\,1[$ et que :

$$f'(x) = \frac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}.$$

c) Dresser le tableau de variation de f.

d) Représenter graphiquement la fonction f.

2) **a)** Montrer que l'équation $f(x) = -\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$ admet une unique solution négative.

b) Montrer que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$ admet deux solutions exactement dans $[0\,;\,1]$.

c) Soit α_1, α_2 et α_3 les solutions dans l'ordre croissant vues précédemment. Justifier que :

- $-\dfrac{1}{3} < \alpha_1 < 0$
- $0 < \alpha_2 < \dfrac{2}{3} < \alpha_3 < 1$

d) Donner une valeur approchée de α_1 à 10^{-3} près.

3) **a)** On pose $u = \dfrac{3}{2}\left(x - \dfrac{1}{3}\right)$.

Montrer que l'équation (E) : $\left|x\sqrt{1-x}\right| = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$ équivaut à l'équation (E') : $8u^3 - 6u - 1 = 0$.

b) On pose $u_i = \dfrac{3}{2}\left(\alpha_i - \dfrac{1}{3}\right)$ pour $i \in \{1\,;\,2\,;\,3\}$.
Montrer qu'il existe un unique réel θ_i dans $[0\,;\,\pi]$ tel que $u_i = \cos\theta_i$.

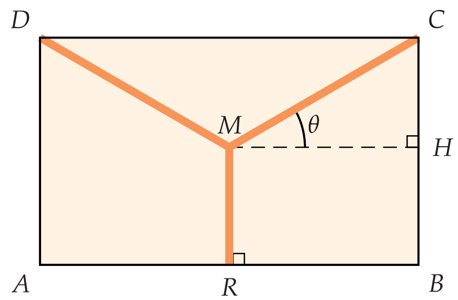
c) Prouver que, pour tout réel θ réel :

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta.$$

d) Déduire des questions précédentes que l'équation (E') équivaut à l'équation $\cos 3\theta = \dfrac{1}{2}$.
Résoudre cette équation dans $[0\,;\,\pi]$ et en déduire les valeurs exactes de α_1, α_2 et α_3.

101 **Le collecteur est dans les tuyaux** INFO

Mario doit installer un collecteur d'eaux pluviales sur la façade d'une maison.
On a représenté cette façade ci-dessous par le rectangle $ABCD$. L'eau de pluie, retenue par une gouttière $[CD]$, passe par deux tuyaux obliques $[CM]$ et $[DM]$ puis par un tuyau vertical $[MR]$ pour finir dans un réservoir R.
R est le milieu de $[AB]$; $AB = 10$ m et $BC = 6$ m.
Soit H le projeté orthogonal de M sur (BC), θ la mesure en radians de l'angle $\widehat{CMH}$ et $\ell = MC + MD + MR$.
Les trois tuyaux seront en cuivre, métal plutôt coûteux. Le but est donc de trouver la position du point M qui minimise la longueur totale ℓ de ces tuyaux.



Partie A : Conjecture sur logiciel

1) Avec un logiciel de géométrie dynamique, faire une figure. On pourra d'abord placer les points $A(0\,;\,0)$ et $C(10\,;\,6)$.

2) Afficher les valeurs de θ et de ℓ.
Faire alors varier la position du point M.

3) Conjecturer la valeur de θ qui minimise ℓ.

Partie B : Preuve du système optimal

1) **a)** Exprimer MC puis CH en fonction de θ.

b) En déduire MR en fonction de θ.

2) Soit ℓ la fonction qui, à tout angle $\theta \in \left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$, associe la longueur totale ℓ des trois tuyaux.

a) Expliciter $\ell(\theta)$.

b) Montrer que, pour $\theta \in \left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$, on a :

$$\ell'(\theta) = \frac{5(2\sin\theta - 1)}{\cos^2\theta}.$$

c) En déduire que la fonction ℓ admet un minimum θ_0.
Donner la valeur exacte de θ_0 en radians

d) Donner la valeur exacte de $\ell(\theta_0)$, puis une valeur arrondie au centimètre.

3) Faire un schéma du système optimal.

À la fin de ce chapitre, je dois être capable de :

- Calculer les dérivées des fonctions $\sqrt{u}$ et u^n
- Calculer la dérivée d'une fonction $x \mapsto u(ax+b)$
- Connaître la dérivée des fonctions sin et cos
- Connaître quelques propriétés de sin et cos, notamment parité et périodicité
- Connaître les représentations graphiques de sin et cos

QCM d'auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

Pour chaque question, plusieurs réponses sont proposées. Déterminer celles qui sont correctes.

Soit f la fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2+5x-10}{x-2}$.

102 f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ et, pour tout réel $x \neq 2$, on a :

(a) $f'(x) = 2x+5$ (b) $f'(x) = \dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2}$ (c) $f'(x) = \dfrac{3x^2+6x-20}{(x-2)^2}$ (d) $f'(x) = 1 - \dfrac{4}{(x-2)^2}$

103 La tangente au point d'abscisse 0 à la courbe représentative de la fonction f a pour équation réduite :

(a) $y = 5$ (b) $y = -5$ (c) $y = 5x+5$ (d) $y = -5x+5$

104 La fonction f est strictement croissante sur :

(a) $[0\,;\,4]$ (b) $]-\infty\,;\,0]$ et $[4\,;\,+\infty[$ (c) $[0\,;\,2[$ et $]2\,;\,4[$ (d) $[-2{,}5\,;\,+\infty[$

105 Sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, la fonction f admet :

(a) aucun extremum local
(b) un minimum local et un maximum local
(c) deux minimums locaux
(d) deux maximums locaux

Chacune des fonctions f suivantes est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Que vaut $f'(x)$?

106 f est la fonction $x \mapsto \left(3x^4-2\right)^7$.

(a) $7\left(3x^4-2\right)^6$ (b) $12x^3\left(3x^4-2\right)^6$ (c) $84x^3\left(3x^4-2\right)^6$ (d) $84x^4\left(3x^4-2\right)^6$

107 f est la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$.

(a) 1 (b) $2x\sqrt{x^2+1}$ (c) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ (d) $\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$

108 f est la fonction $x \mapsto \dfrac{4}{(x^4+4)^4}$.

(a) $-\dfrac{16x^3}{(x^4+4)^5}$ (b) $\dfrac{16x^3}{(x^4+4)^5}$ (c) $-\dfrac{64x^3}{(x^4+4)^5}$ (d) $-\dfrac{64x^3}{(x^4+4)^3}$

109 f est la fonction $x \mapsto 4\sin(5+3x)$.

(a) $20\sin(5+3x)$ (b) $20\cos(5+3x)$ (c) $12\cos(5+3x)$ (d) $-12\cos(5+3x)$

110 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3(1-2x)^2$ et représentée par $\mathscr{C}$ dans un repère. Alors :

(a) $f'(x) = x^2(2x-1)(2x-3)$

(b) 0 est un maximum de f

(c) 0 est un minimum de f

(d) $\mathscr{C}$ a trois tangentes horizontales

111 La fonction définie précédemment est la dérivée de la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)$ égal à :

(a) $-\dfrac{2x^6}{3} + \dfrac{x^4}{4}$ (b) $\dfrac{2x^6}{3} - \dfrac{4x^5}{5} + \dfrac{x^4}{4}$ (c) $\dfrac{x^6}{3} - \dfrac{4x^5}{5} + \dfrac{x^4}{4}$ (d) $4x^6 - 4x^5 + x^4$

112 Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ pour tout $x \neq k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. Alors :

(a) f est paire (b) f est impaire (c) f est π-périodique (d) f est 2π-périodique

113 Pour tout réel x, on a l'égalité :

(a) $\sin(4\pi - x) = -\sin x$ (b) $\cos(3\pi - x) = -\cos x$ (c) $\cos(2x + \pi) = \cos 2x$ (d) $\dfrac{\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)} = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

114 Pour tout réel θ, l'expression $\cos\left(\theta + \dfrac{3\pi}{2}\right) + \sin\left(\theta - \dfrac{3\pi}{2}\right)$ est égale à :

(a) $\cos\theta + \sin\theta$ (b) $\cos\theta - \sin\theta$ (c) $-\cos\theta + \sin\theta$ (d) $-\cos\theta - \sin\theta$

115 L'ensemble des solutions de l'équation $\sin 3x = \dfrac{1}{2}$ sur $]-\pi\,;\,\pi]$ est :

(a) $\left\{-\dfrac{11\pi}{18}\,;\,\dfrac{\pi}{18}\,;\,\dfrac{13\pi}{18}\right\}$

(b) $\left\{-\dfrac{11\pi}{12}\,;\,-\dfrac{5\pi}{12}\,;\,\dfrac{\pi}{12}\,;\,\dfrac{7\pi}{12}\right\}$

(c) $\left\{-\dfrac{5\pi}{9}\,;\,-\dfrac{4\pi}{9}\,;\,\dfrac{\pi}{9}\,;\,\dfrac{2\pi}{9}\,;\,\dfrac{8\pi}{9}\right\}$

(d) $\left\{-\dfrac{11\pi}{18}\,;\,-\dfrac{7\pi}{18}\,;\,\dfrac{\pi}{18}\,;\,\dfrac{5\pi}{18}\,;\,\dfrac{13\pi}{18}\,;\,\dfrac{17\pi}{18}\right\}$

116 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{3}\sin 3x - \sin x$. Alors :

(a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -4\cos x \sin^2 x$

(b) f est strictement décroissante sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$

(c) f est strictement décroissante sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\,0\right]$

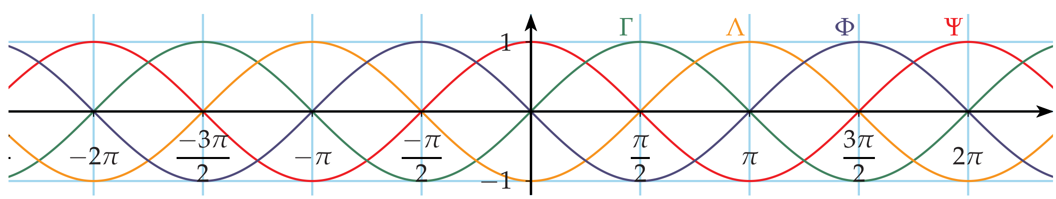
(d) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f\left(\dfrac{\pi}{2} - k\pi\right) = f\left(k\pi - \dfrac{\pi}{2}\right)$

117 Parmi les limites suivantes, quelles sont celles qui sont exactes ?

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = 0$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} x \sin\dfrac{1}{x} = 1$ (c) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\cos x = +\infty$ (d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

118 Ci-dessous, on a représenté les fonctions cos, sin, $-$ cos et $-$ sin. Leurs courbes respectives sont :

(a) Ψ, Γ, Φ et Λ (b) Ψ, Γ, Λ et Φ (c) Γ, Ψ, Λ et Φ (d) Λ, Φ, Ψ et Γ



TP 1 Pour un mouvement sans à-coup

Dans le langage courant, un **à-coup** désigne une discontinuité de mouvement provoquant des secousses. En mécanique, un à-coup se traduit par une brusque variation du vecteur accélération non consécutive à un choc (par exemple en voiture, lorsque le conducteur ne réduit pas progressivement la pression sur les freins avant de s'arrêter). On définit le vecteur à-coup (*jerk* aux États-Unis et *jolt* en Grande-Bretagne) comme la dérivée du vecteur accélération par rapport au temps (soit la dérivée troisième par rapport au temps du vecteur position).
L'à-coup, de symbole j, s'exprime en mètre par seconde cube ($\mathrm{m{\cdot}s^{-3}}$). Les physiciens notent :

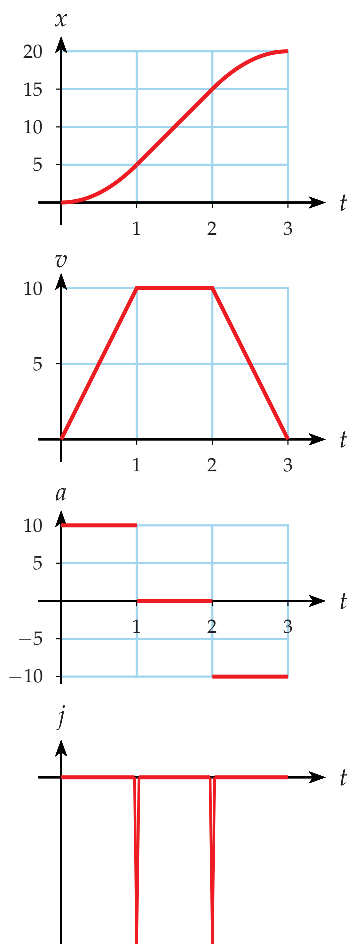
$$\vec{j} = \frac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{v}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^3\vec{x}}{\mathrm{d}t^3}$$

où $\vec{a}$ est le vecteur accélération, $\vec{v}$ le vecteur vitesse, $\vec{x}$ le vecteur position et t le temps.

Dans un système mécanique, plus l'à-coup est grand, plus l'accélération et donc la force varie brusquement. Cela propage des vibrations qui entraîne des dégradations et des bruits. Ainsi, il est impératif de limiter l'à-coup lors de la conception de la cinématique d'une machine.

A Loi trapézoïdale en vitesse

Considérons un mécanisme qui amène un solide d'une position $x=0$ à une position $x=20$ dans un mouvement rectiligne.
Divisons le mouvement en trois étapes de même durée (1 s) : une accélération uniforme de $10\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ jusqu'à la vitesse de $10\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ puis, une vitesse uniforme de $10\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ et enfin, une décélération uniforme de $10\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ jusqu'à l'arrêt.



1) Vérifier que les données du mouvement se traduisent par :

$$\begin{cases} a(t) = 10 & \text{pour } 0 \leqslant t < 1 \\ v(t) = 10 & \text{pour } 1 \leqslant t < 2 \\ a(t) = -10 & \text{pour } 2 \leqslant t \leqslant 3 \end{cases}.$$

2) En déduire que la position x est la fonction définie par :

$$x(t) = \begin{cases} 5t^2 & \text{pour } 0 \leqslant t < 1 \\ 10t - 5 & \text{pour } 1 \leqslant t < 2 \\ -5(t^2 - 6t + 5) & \text{pour } 2 \leqslant t \leqslant 3 \end{cases}.$$

3) Discuter de la continuité et de la dérivabilité en 1 et en 2 des fonctions position x, vitesse v, accélération a et à-coup j.

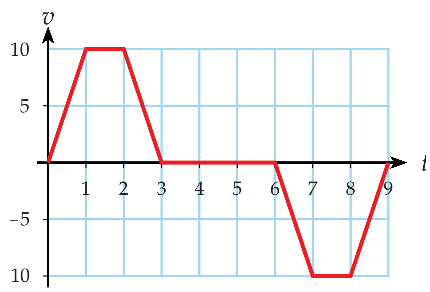
Avec une telle cinématique, on voit que l'accélération est une fonction en escalier, non continue en 1 et en 2 donc non dérivable en 1 et en 2. Aux deux transitions du mouvement, l'à-coup est donc infini ce qui est inacceptable.

B Loi trapézoïdale en accélération

Pour avoir un à-coup fini à coup sûr, il faut donc définir une loi de mouvement à partir d'une accélération continue. Par exemple, dans la conception d'une came (pièce mécanique qui transforme un mouvement circulaire en un mouvement de translation), la continuité de sa courbure assure une accélération radiale continue.
Un bon choix de loi de mouvement est en général le compromis d'une vitesse modérée (pour limiter les frottements et les dépenses d'énergie), d'une accélération modérée (pour limiter les efforts des actionneurs et la puissance nécessaire) et, bien sûr, d'un à-coup modéré.

Considérons un mécanisme qui amène un solide d'une position x=0 à une position x=120 dans un mouvement rectiligne divisé en trois étapes de même durée (3 s) : accélération positive, vitesse uniforme et accélération négative. Mais nous décomposons aussi les deux accélérations en trois étapes de même durée (1 s) et leur faisons suivre une loi trapézoïdale.

$$a(t) = \begin{cases} 10t & \text{pour } 0 \leqslant t < 1 \\ 10 & \text{pour } 1 \leqslant t < 2 \\ -10t + 30 & \text{pour } 2 \leqslant t < 3 \\ 0 & \text{pour } 3 \leqslant t < 6 \\ -10t + 60 & \text{pour } 6 \leqslant t < 7 \\ -10 & \text{pour } 7 \leqslant t < 8 \\ 10t - 90 & \text{pour } 8 \leqslant t \leqslant 9 \end{cases}.$$



1) Déterminer la fonction à-coup j et la représenter.
À combien limite-t-on l'à-coup maximal en valeur absolue ?

2) Déterminer la fonction vitesse v en considérant qu'elle est continue et que $v(0) = v(9) = 0$.
Quelle est la vitesse de croisière lors de la deuxième phase entre 3 s et 6 s ?

3) Déterminer la fonction position x en considérant qu'elle est continue et que $x(0) = 0$.
À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, représenter la fonction position.

TP 2 Encore des à-coups

Les sinusoïdes ayant deux tangentes horizontales par période, on peut envisager de s'en servir pour définir une vitesse continue qui suit une loi en cosinus à l'accélération et à la décélération et qui reste constante entre ces deux phases.
Considérons un mécanisme qui amène un solide d'une position x=0 à une position x=120 dans un mouvement rectiligne divisé en trois étapes de même durée (3 s) dont la vitesse est :

$$v(t) = \begin{cases} \dfrac{v_0}{2}(1 - \cos \pi t) & \text{pour } 0 \leqslant t < 3 \\ v_0 & \text{pour } 3 \leqslant t < 6 \\ \dfrac{v_0}{2}(1 + \cos \pi t) & \text{pour } 6 \leqslant t < 9 \end{cases}.$$

1) Vérifier que la fonction position x est : $x(t) = \begin{cases} \dfrac{v_0}{2}\left(t - \dfrac{1}{\pi}\sin \pi t\right) + k_1 & \text{pour } 0 \leqslant t < 3 \\ v_0 t + k_2 & \text{pour } 3 \leqslant t < 6 \\ \dfrac{v_0}{2}\left(t + \dfrac{1}{\pi}\sin \pi t\right) + k_3 & \text{pour } 6 \leqslant t < 9 \end{cases}.$

2) a) En exprimant les conditions initiale et finale, déterminer k_1 et k_3 en fonction de v_0.

b) En exprimant la continuité en 3, déterminer k_2 en fonction de v_0.

c) En exprimant la continuité en 6, déterminer la vitesse v_0.

3) Déterminer la fonction accélération a. Quelle est l'accélération maximale en valeur absolue ?

4) Déterminer la fonction à-coup j. Quel est l'à-coup maximal en valeur absolue ?

5) Finalement, entre cette loi et la loi trapézoïdale en accélération vue dans le TP précédent, laquelle serait la plus favorable ?

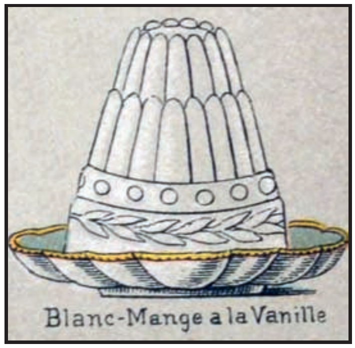
Récréation, énigmes

Continue partout, dérivable nulle part

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) croyait qu'une fonction continue était toujours dérivable sauf éventuellement en quelques points isolés. Mais vers 1830, Bernard Bolzano exhiba le premier cas de fonction continue partout mais nulle part dérivable. En 1872, Karl Weierstrass publia une famille de fonctions du même genre.

En 1903, Teiji Takagi a décrit une courbe fractale appelée **courbe du blancmange**, surnommée ainsi pour sa ressemblance à l'entremets du même nom, représentant la fonction blanc définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\text{blanc}(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \left| 2^k x - \left\lfloor 2^k x + \frac{1}{2} \right\rfloor \right|.$$



$\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière par défaut (*floor*, « plancher ») de x.
La fonction blanc est définie et continue sur $\mathbb{R}$, périodique de période 1 mais elle n'est dérivable en aucun point.

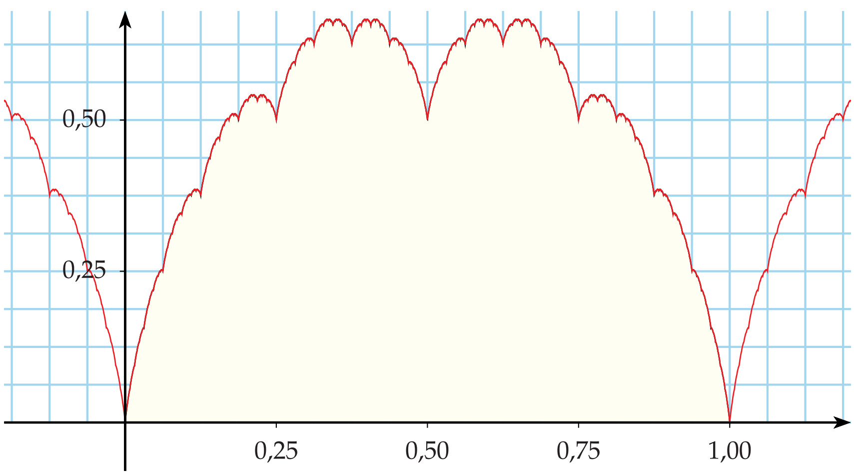
1) À quoi calculer $\left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$ revient-il plus simplement en pratique ?

2) a) Ouvrir un logiciel de géométrie dynamique et créer un curseur entier k.

b) Représenter la fonction f_k définie par $f_k(x) = \frac{1}{2^k} \left| 2^k x - \left\lfloor 2^k x + \frac{1}{2} \right\rfloor \right|$.

c) Faire varier le curseur k. Comment peut-on désigner les courbes obtenues ?

d) Trouver un moyen d'ajouter les fonctions f_k pour k variant de 0 jusqu'à 10 afin d'obtenir une courbe qui approche la courbe du blancmange.



ANALYSE 4

Fonction exponentielle

Connaissances nécessaires à ce chapitre

- Calculer avec les puissances
- Déterminer une limite de fonction
- Étudier la continuité et la dérivabilité d'une fonction
- Calculer la dérivée d'une fonction
- Étudier les variations d'une fonction
- Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

Auto-évaluation

1 Soit un réel a non nul et deux entiers n et p.
Écrire sous forme d'une puissance de a.

1) 1 2) $\sqrt{a^{2n}}$ 3) a 4) $\frac{1}{a}$ 5) $a^n a^p$ 6) $\frac{1}{a^n}$ 7) $(a^n)^p$ 8) $\frac{a^n}{a^p}$

2
1) Écrire sous la forme $2^n \times 3^p$ où $n \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{Z}$.
a) $\dfrac{8^5 \times 12^{-2}}{18^{-3} \times 9}$ b) $\dfrac{(2^2)^{-2} \times (3^3)^{-3}}{(6^6)^{-6}}$
2) Écrire sous la forme $x^2 y^3$ où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.
a) $2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7^3$ b) $1\,125 \div 1\,372$

3 On fait fructifier 5 000 € au taux annuel de 2,5 %.
1) Quel est le capital au bout de 10 ans ? n ans ?
2) À partir de combien d'années sera-t-il doublé ?

4 Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(3) = -4$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 0$.
Que peut-on dire de la fonction f ?

5 Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^n}{\sqrt{x}}$ pour un entier $n \geqslant 1$.

6 Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(a+h)^3 - a^3}{h}$.
En déduire une équation de la tangente à la courbe représentative de $x \mapsto x^3$ au point d'abscisse a.

7 Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f : h \mapsto \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h}.$$

1) Montrer que $f(h) = \dfrac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}$.
2) Calculer $\lim\limits_{h \to 0} f(h)$ pour : • $a > 0$ • $a = 0$
3) Conclure sur la dérivabilité de $x \mapsto \sqrt{x}$.

8 Déterminer les tangentes horizontales à la courbe représentative de $f : x \mapsto (x+1)^2(2x-3)^3$.

9 Soit $f : x \mapsto -\dfrac{1}{4x}$ et $g : x \mapsto \sqrt{x + \dfrac{3}{4}}$ définies sur $\left]-\dfrac{3}{4} ; -\dfrac{1}{4}\right[$ représentées par $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ dans un repère.
1) Étudier les variations de f et g.
2) Démontrer que $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont tangentes au point de coordonnées $\left(-\dfrac{1}{2} ; \dfrac{1}{2}\right)$.

10 Soit l'équation $\dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^2}{2} + x + 1 = 0$.
1) Démontrer qu'elle a une unique solution dans $\mathbb{R}$.
2) Déterminer l'arrondi au millième de cette solution.

Voir solutions p. 419

Activités d'approche

ACTIVITÉ 1 Virus informatique

INFO ALGO

À l'instant $t = 0$, un système informatique est attaqué par un virus qui occupe une mémoire de 1 ko (kilo-octet). Par la suite, à chaque instant, le virus se propage et sa mémoire croît.
On note $f(t)$ la mémoire (en ko) occupée par le virus à l'instant t (en secondes).

Partie A : Étude de cas discrets

1) On suppose d'abord que la mémoire du virus augmente de 100 % chaque seconde.

a) Justifier que chaque seconde, il y a duplication de la mémoire.

b) Quelle progression suit $f(t)$ seconde après seconde ?

c) Les unités Mo (mégaoctet), Go (gigaoctet) et To (téraoctet) vérifient :

- 1 Mo = 1 024 ko
- 1 Go = 1 024 Mo
- 1 To = 1 024 Go

Au bout de combien de temps la mémoire occupée par le virus atteindra-t-elle 1 To ?

2) On suppose maintenant que la mémoire du virus augmente de 10 % chaque 0,1 s.
On s'aide d'un tableur pour calculer les mémoires successives.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	t	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,1
2	f(t)	1											
3	f(t+0,1)												
4	[f(t+0,1)-f(t)]/0,1												

a) Dans la cellule C2, quelle formule doit-on écrire et recopier jusqu'à la cellule M2 ?

b) Dans la cellule B3, quelle formule doit-on écrire et recopier jusqu'à la cellule L3 ?

c) Dans la cellule B4, quelle formule doit-on écrire et recopier jusqu'à la cellule L4 ?
Que représentent les nombres de la ligne 4 d'après l'étiquette écrite en cellule A4 ?

d) Que remarque-t-on en comparant les lignes 2 et 4 ? Expliquer pourquoi.

Partie B : Étude du cas continu

On considère que la mémoire occupée par le virus augmente de h % toutes les h centièmes de seconde pour $h \neq 0$ mais proche de 0 autant qu'on veut.

1) a) On pose $\Delta t = \dfrac{h}{100}$. Démontrer que $\dfrac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = f(t)$.

b) En déduire que, pour tout $t \geqslant 0$, $f'(t) = f(t)$.

> Il semblerait qu'il existe une fonction f définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ telle que :
> $$f(0) = 1 \text{ et } f' = f.$$

2) On considère l'algorithme ci-après.

a) Expliquer à quoi sert cet algorithme.

b) Programmer cet algorithme sur un ordinateur ou une calculatrice et le faire tourner avec les valeurs suivantes :
- $\mathtt{h} = 10$
- $\mathtt{h} = 1$
- $\mathtt{h} = 0,1$
- $\mathtt{h} = 0,01$

c) Vérifier que les valeurs trouvées approchent de mieux en mieux un nombre que la calculatrice fournit ainsi : repérer e^x au-dessus de la touche ln et faire e^1.

```
VARIABLES
e, t, h SONT_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
LIRE h
t PREND_LA_VALEUR 0
e PREND_LA_VALEUR 1
TANT_QUE (t<1) FAIRE
    e PREND_LA_VALEUR e*(1+h/100)
    t PREND_LA_VALEUR t+h/100
AFFICHER e
FIN_ALGORITHME
```

Le nombre **e** est une constante mathématique appelée **nombre d'Euler** ou **constante de Néper** d'après Leonhard Euler et John Napier. Euler a démontré que e est **irrationnel** (on ne peut pas l'écrire sous la forme d'une fraction) et Charles Hermite a prouvé que e est **transcendant** (comme π, il n'est racine d'aucun polynôme non nul à coefficients entiers).

ACTIVITÉ 2 Vers une nouvelle fonction

INFO

On admet qu'il existe une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
Appliquons la **méthode d'Euler** pour approcher la courbe représentative de f sur $[0\,;\,1]$.

Partie A : Une construction « géométrique »

1) Traduire que f est dérivable en tout $x_0 \in \mathbb{R}$ avec la définition du nombre dérivé de f en x_0 et en déduire que $f' = f$.

2) En déduire $f(x_0 + h) \approx f(x_0)(1 + h)$.

Ainsi, la fonction $h \mapsto f(x_0)(1 + h)$ est une fonction affine qui approche f au voisinage de x_0 et on peut même démontrer que c'est la **meilleure approximation affine** de la fonction f au voisinage de x_0. On va s'en servir pour la suite.

Soit n un entier naturel non nul et x_k le réel défini pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$ par :

$$x_0 = 0 \text{ et } x_{k+1} = x_k + \frac{1}{n}.$$

On subdivise ainsi l'intervalle $[0\,;\,1]$ en n intervalles réguliers de longueur $\frac{1}{n}$.

3) Combien y a-t-il de nombres x_k et quel type de progression suivent-ils ?
En déduire une expression de x_k en fonction de k et n.

4) Dans cette question, on traite le cas particulier où $n = 10$.On note $y_k = f(x_k)$.

a) En utilisant la meilleure approximation affine au voisinage de x_k, montrer que :

$$f(x_{k+1}) = y_{k+1} \approx 1,1 y_k.$$

b) Quel type de progression suivent (approximativement) les nombres y_k ?

c) En déduire une expression de y_k en fonction de k.

5) Généralisons pour $n \geqslant 1$ quelconque. Montrer que, pour tout $k \in \{0; 1; \cdots; n\}$:

$$y_k \approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k.$$

Partie B : Des courbes qui se rapprochent

Dans cette partie, on utilise un logiciel de géométrie dynamique pour construire un nuage de $n+1$ points afin que lorsque n grandit, on approche de mieux en mieux la courbe représentative de la fonction f qui nous intéresse.

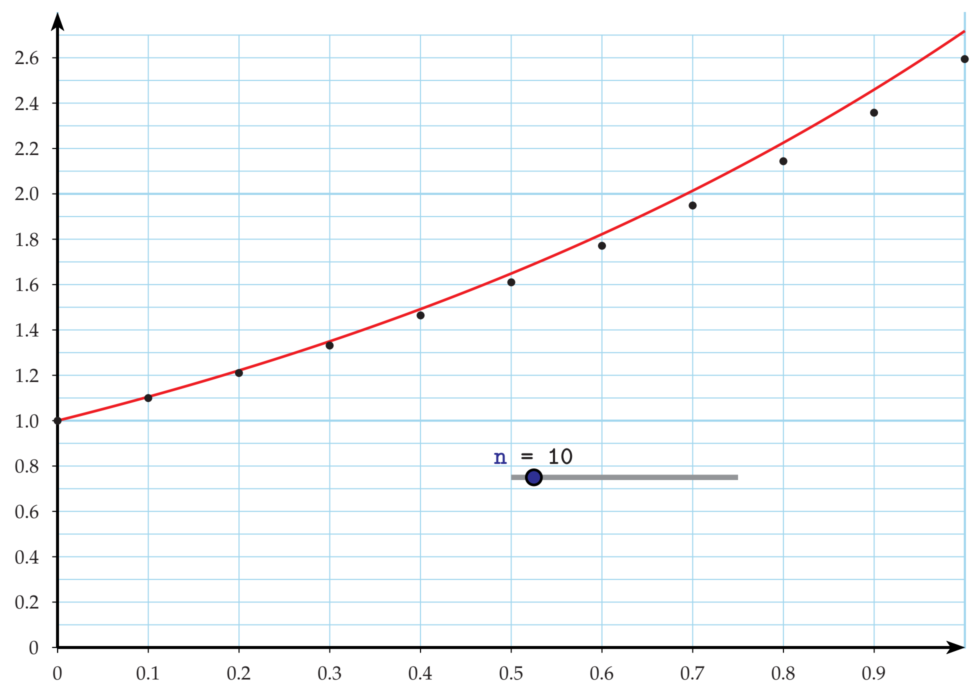
1) Ouvrir une fenêtre dans le logiciel. Créer un curseur entier n variant de 1 à 1 000.

2) Créer la liste XX des abscisses x_k telle que $\texttt{XX} = \left\{\frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n}{n}\right\}$.
Créer de façon analogue la liste YY des ordonnées y_k.

3) À partir des listes XX et YY, créer le nuage de points de coordonnées $(x_k\ ;\ y_k)$.

4) Augmenter la valeur du curseur n.

5) *On appelle « ajustement graphique » un traitement appliqué à un ensemble de points et destiné à obtenir, si cela est possible, l'équation d'une courbe qui passe au plus près de ces points. Par exemple, si des points semblent alignés, un ajustement linéaire va donner l'équation d'une droite qui approche au mieux ces points.*
Appliquer à l'aide du logiciel un ajustement exponentiel au nuage de points. On obtient une courbe d'équation $y = a\,\mathrm{e}^{bx}$. En variant la valeur du curseur n, que remarque-t-on ?



Nous avons posé le problème : existe-t-il une fonction f vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$?
$f' = f$ est une **équation différentielle**. L'inconnue n'est plus un nombre mais une fonction dont la dérivée apparaît aussi dans l'équation. $f(0) = 1$ est une **condition initiale**.
Nous avons conjecturé que ce problème ou cette équation différentielle admet une solution : la **fonction exponentielle**. Son existence sera admise mais son unicité sera prouvée.

1. Définition de la fonction exponentielle

LEMME [1]

S'il existe une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$, alors elle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

PREUVE Supposons qu'il existe une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f(x)f(-x)$.
h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, on a : $h'(x) = f'(x)f(-x) + f(x)\left(-f'(-x)\right) = f(x)f(-x) - f(x)f(-x) = 0$.
La fonction h est donc constante et égale à $h(0) = f(0)f(0) = 1$.
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = f(x)f(-x) = 1$ ce qui montre que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

THÉORÈME

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

PREUVE On prouve ici seulement l'unicité (pour la preuve de l'existence : ► Ex. 91 p. 140).
Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
Supposons alors qu'il existe une autre fonction g telle que $g' = g$ et $g(0) = 1$.
Comme g ne s'annule pas d'après le lemme précédent, on peut poser $k(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.
k est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, on a : $k'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} = \dfrac{f(x)g(x) - f(x)g(x)}{g^2(x)} = 0$.
Donc la fonction k est constante et égale à $k(0) = \dfrac{f(0)}{g(0)} = \dfrac{1}{1} = 1$.
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $k(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ donc $f = g$ d'où l'unicité.

DÉFINITION

La fonction **exponentielle** est la fonction notée **exp** définie sur $\mathbb{R}$ par $\exp' = \exp$ et $\exp(0) = 1$.

2. Propriétés de la fonction exponentielle

THÉORÈME : Relation fonctionnelle

Pour tous réels x et y : $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.

PREUVE Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\exp(x+y)}{\exp(x)}$ définie sur $\mathbb{R}$ et y réel.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
On a $f'(x) = \dfrac{\exp(x+y)\exp(x) - \exp(x+y)\exp(x)}{(\exp(x))^2} = 0$ donc f est constante.
Ainsi, $f(x) = \dfrac{\exp(x+y)}{\exp(x)} = f(0) = \dfrac{\exp(y)}{\exp(0)} = \exp(y)$ d'où $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.

1. Un **lemme** est un résultat préliminaire ou intermédiaire qui intervient parfois dans la preuve d'un théorème lorsqu'elle est un peu longue.

■ PROPRIÉTÉ

Pour tous réels x et y et pour tout entier relatif n :

- $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$
- $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$
- $\exp(nx) = (\exp(x))^n$

PREUVE

- $1 = \exp(0) = \exp(x+(-x)) = \exp(x)\exp(-x)$ donc $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$.
- $\exp(x-y) = \exp(x+(-y)) = \exp(x)\exp(-y) = \exp(x) \times \dfrac{1}{\exp(y)} = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$.
- Pour $p \in \mathbb{N}$, on démontre par récurrence. Voici l'initialisation et l'hérédité :
  $\exp(0x) = \exp(0) = 1$ et $((\exp(x))^0 = 1$ puisque $\exp(x) \neq 0$.
  Supposons que pour un certain entier p donné, on ait $\exp(px) = (\exp(x))^p$. Alors :
  $\exp((p+1)x) = \exp(px+x) = \exp(px)\exp(x) = (\exp(x))^p \exp(x) = (\exp(x))^{p+1}$.
  Et si $-p \in \mathbb{N}$, alors $(\exp(x))^p = (\exp(-x))^{-p} = \exp(-p(-x)) = \exp(px)$.

Exemple $(\exp(1) - \exp(-1))^2 = (\exp(1))^2 - 2\exp(1)\exp(-1) + (\exp(-1))^2$
$= \exp(1\times 2) - 2\exp(1-1) + \exp(-1\times 2) = \exp(2) - 2\exp(0) + \exp(-2) = \exp(2) - 2 + \exp(-2)$.

3. Étude de la fonction exponentielle

A. Signe et variations

■ PROPRIÉTÉ

Sur $\mathbb{R}$, la fonction exponentielle est :

- continue
- strictement positive
- strictement croissante

PREUVE

- Par définition, la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc elle est continue sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{2}\right) = \exp\left(\dfrac{x}{2}\right) \times \exp\left(\dfrac{x}{2}\right)$ d'après la relation fonctionnelle.
  Ainsi, $\exp(x) = \left(\exp\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)^2$ et comme $\exp(x) \neq 0$, alors $\exp(x) > 0$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\exp(x))' = \exp(x) > 0$. Donc, $x \mapsto \exp(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

B. Limites en $\pm\infty$

■ PROPRIÉTÉ

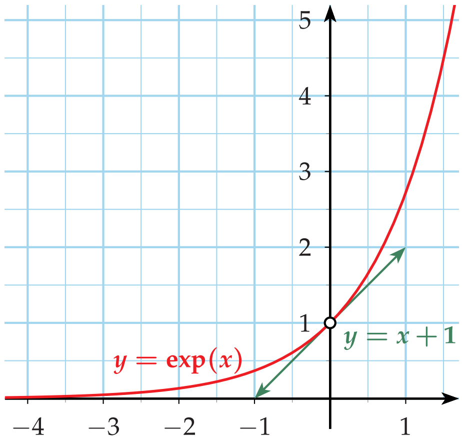
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$

PREUVE

- La fonction $f : x \mapsto \exp(x) - x - 1$ est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et $f'(x) = \exp(x) - 1$.
  Or, la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc : $x \geqslant 0 \Rightarrow \exp(x) \geqslant 1$.
  Ainsi, $f'(x) \geqslant 0$ donc f est croissante et minorée par $f(0) = \exp(0) - 0 - 1 = 0$.
  D'où, $f(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \exp(x) - x - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \exp(x) \geqslant 1 + x$.
  Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} (1+x) = +\infty$ donc, d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$.
- En posant $X = -x$, on a $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp(x) = \lim\limits_{X \to +\infty} \exp(-X) = \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{1}{\exp(X)} = 0$.

C. Tableau de variation et courbe représentative

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
exp	$0 \nearrow +\infty$



Remarques :

- La droite d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) est asymptote à la courbe représentative en $-\infty$.
- La droite d'équation $y = x + 1$ est tangente à la courbe représentative au point d'abscisse 0.

D. Une nouvelle notation

DÉFINITION

L'image de 1 par la fonction exp est notée **e**. Ainsi $\exp(1) = \mathrm{e}$.

Remarques :

- e est appelé nombre d'Euler ou constante de Néper. Comme π, c'est un nombre irrationnel et transcendant. Sa valeur approchée est : $\mathrm{e} \approx 2{,}718\,281\,828$.
- Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\exp(n) = \exp(1 \times n) = (\exp(1))^n = \mathrm{e}^n$.
  On étend cette relation aux réels et on peut alors écrire, pour tout réel x : $\boxed{\exp(x) = \mathrm{e}^x}$.

On peut ainsi réécrire avec une nouvelle notation tout ce qu'on a vu précédemment.
La fonction exponentielle est la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ définie sur $\mathbb{R}$.
$\mathrm{e}^0 = 1$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x > 0$. De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$.
Les autres propriétés écrites ci-après sont analogues aux propriétés des puissances.

PROPRIÉTÉ

Pour tous réels x et y et pour tout entier relatif n :

- $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^y$
- $\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$
- $\mathrm{e}^{x-y} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}$
- $\mathrm{e}^{nx} = (\mathrm{e}^x)^n$

Exemple Le calcul donné dans l'exemple précédent (p. 120) s'effectue bien plus simplement :
$(\exp(1) - \exp(-1))^2 = \left(\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1}\right)^2 = \mathrm{e}^2 - 2\,\mathrm{e}\,\mathrm{e}^{-1} + (\mathrm{e}^{-1})^2 = \mathrm{e}^2 - 2\,\mathrm{e}^{1-1} + \mathrm{e}^{-2} = \mathrm{e}^2 - 2 + \mathrm{e}^{-2}$.

E. Équations et inéquations

PROPRIÉTÉ

Pour tous réels x et y :

- $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^y \Leftrightarrow x = y$
- $\mathrm{e}^x < \mathrm{e}^y \Leftrightarrow x < y$

PREUVE Ces propriétés sont des conséquences directes de la continuité et de la stricte croissance de $x \mapsto \mathrm{e}^x$. Ainsi, $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^y \Leftrightarrow \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{-y} = 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x-y} = 1 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$.

Remarque : On a les équivalences analogues en remplaçant le symbole $<$ par $>$, $\leqslant$ ou $\geqslant$.

MÉTHODE 1 **Résoudre une équation ou une inéquation avec exponentielles** ► Ex. 13 p. 125

Pour résoudre une équation d'inconnue x réel comportant des exponentielles :

1) On détermine l'ensemble des valeurs qu'on peut donner à x.

2) On essaye selon le cas de se ramener à :

- Une équation de la forme $e^{u(x)} = e^{v(x)}$ où u et v sont deux fonctions.
  Alors, $e^{u(x)} = e^{v(x)} \Leftrightarrow u(x) = v(x)$ et, éventuellement, $u(x) = v(x) \Leftrightarrow u(x) - v(x) = 0$.
- Une équation qu'on sait résoudre après avoir effectué un changement de variable.

La méthode est analogue pour résoudre une inéquation.

Exercice d'application Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions des équations et inéquations.

1) $e^{x^2+2x-3} = 1$ 2) $2e^{2x} - e^x - 1 = 0$ 3) $e^{\sqrt{3x-5}} < e$ 4) $\dfrac{e^{2x+1}}{e^{x-4}} \geqslant e^{x^2-1}$

Correction Dans les cas 1, 2 et 4, x peut prendre toute valeur réelle, donc on résout dans $\mathbb{R}$.

1) $e^{x^2+2x-3} = 1 \Leftrightarrow e^{x^2+2x-3} = e^0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-1) = 0$.
Donc, $\mathcal{S} = \{-3 ; 1\}$.

2) $2e^{2x} - e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2(e^x)^2 - e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2X^2 - X - 1 = 0$ en posant $X = e^x$.
$2X^2 - X - 1 = 0$ pour $X = -\dfrac{1}{2}$ ou $X = 1$. D'où, $e^x = -\dfrac{1}{2}$ (impossible) ou $e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.
Finalement, l'équation $2e^{2x} - e^x - 1 = 0$ n'a que 0 pour solution. Donc, $\mathcal{S} = \{0\}$.

3) Il faut que x soit tel que $3x - 5 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant \dfrac{5}{3}$ donc on résout dans $\left[\dfrac{5}{3} ; +\infty\right[$.
$e^{\sqrt{3x-5}} < e^1 \Leftrightarrow \sqrt{3x-5} < 1 \Leftrightarrow 0 \leqslant 3x - 5 < 1 \Leftrightarrow \dfrac{5}{3} \leqslant x < 2$. Donc, $\mathcal{S} = \left[\dfrac{5}{3} ; 2\right[$.

4) $\dfrac{e^{2x+1}}{e^{x-4}} \geqslant e^{x^2-1} \Leftrightarrow e^{2x+1-x+4} \geqslant e^{x^2-1} \Leftrightarrow e^{x+5} \geqslant e^{x^2-1} \Leftrightarrow x + 5 \geqslant x^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 \leqslant 0$.
Or, $x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$. Ainsi, $x^2 - x - 6 \leqslant 0$ si $-2 \leqslant x \leqslant 3$. Donc, $\mathcal{S} = [-2 ; 3]$.

F. D'autres limites

PROPRIÉTÉ

- $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$
- $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} x e^x = 0$
- $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

PREUVE

1) Soit la fonction $f : x \mapsto e^x - \dfrac{x^2}{2}$ sur $[0 ; +\infty[$. On a $f'(x) = e^x - x$ et $f''(x) = e^x - 1$.
Or, $x \geqslant 0 \Leftrightarrow e^x \geqslant e^0 \Leftrightarrow e^x \geqslant 1 \Leftrightarrow e^x - 1 \geqslant 0$ donc $f''(x) \geqslant 0$.
Ainsi, f' est croissante et minorée par $f'(0) = 1$. Donc, $f'(x) \geqslant 0$.
Ainsi, f est croissante et minorée par $f(0) = 1$. Donc, $f(x) \geqslant 0$ soit $e^x - \dfrac{x^2}{2} \geqslant 0$.
D'où, pour $x > 0$, $\dfrac{e^x}{x} \geqslant \dfrac{x}{2}$. Or, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$ donc, par comparaison, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

2) Par inverse de la limite précédente, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$.
Donc, $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} x e^x = \lim_{x \to +\infty} -x e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} -\frac{x}{e^x} = 0$ d'après ce qui précède.

3) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$ est égale au nombre dérivée de $x \mapsto e^x$ en 0 soit $e^0 = 1$.

REMARQUE : On généralise pour tout $n \in \mathbb{N}$:
- $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$
- $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$

MÉTHODE 2 Déterminer une limite de fonction avec exponentielles

► Ex. 19 p. 125

Lorsque une limite de fonction comportant des exponentielles est *a priori* indéterminée (formes « $\frac{0}{0}$ », « $\frac{\infty}{\infty}$ », « $(+\infty)+(-\infty)$ » ou « $0\times\infty$ »), on essaye, selon le cas, de transformer l'écriture ou de changer de variable.

Exercice d'application Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{2x}-x\,e^{x}\right)$ 2) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\left(\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+2}{e^{\frac{1}{x}}+1}\right)$ 3) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+2}{e^{\frac{1}{x}}+1}\right)$

Correction

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,e^{x}=+\infty$. Ainsi, par différence, la limite est indéterminée.

Le terme e^{2x} étant prépondérant, on le met en facteur : $e^{2x}-x\,e^{x}=e^{2x}\left(1-\dfrac{x}{e^{x}}\right)$.

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}}{x}=+\infty$. Donc, par inverse, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^{x}}=0$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{x}{e^{x}}\right)=1$.

Finalement, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x}\left(1-\dfrac{x}{e^{x}}\right)=+\infty$.

2) Posons $X=\dfrac{1}{x}$. Alors $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} X=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\dfrac{1}{x}=-\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\left(\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+2}{e^{\frac{1}{x}}+1}\right)=\lim\limits_{X\to-\infty}\left(\dfrac{e^{X}+2}{e^{X}+1}\right)$.

Or, $\lim\limits_{X\to-\infty} e^{X}=0$ donc, par quotient, $\lim\limits_{X\to-\infty}\left(\dfrac{e^{X}+2}{e^{X}+1}\right)=2$.

3) Posons $X=\dfrac{1}{x}$. Alors $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} X=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{1}{x}=+\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+2}{e^{\frac{1}{x}}+1}\right)=\lim\limits_{X\to+\infty}\left(\dfrac{e^{X}+2}{e^{X}+1}\right)$.

Or, $\lim\limits_{X\to+\infty} e^{X}=+\infty$ donc, par quotient, la limite est indéterminée.

Le terme e^{X} étant prépondérant, on multiplie par e^{-X} numérateur et dénominateur :

$\dfrac{e^{X}+2}{e^{X}+1}=\dfrac{1+2\,e^{-X}}{1+e^{-X}}$. Or, $\lim\limits_{X\to+\infty} e^{-X}=0$ donc, par quotient, $\lim\limits_{X\to+\infty}\left(\dfrac{1+2\,e^{-X}}{1+e^{-X}}\right)=1$.

4. Fonction composée e^{u}

PROPRIÉTÉ (admise)

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

La fonction e^{u}, composée de u suivie de $x\mapsto e^{x}$, est dérivable sur I et on a $(e^{u})'=u'\,e^{u}$.

Exemple Soit la fonction $f : x\mapsto e^{\sqrt{x}}$ définie sur $\mathbb{R}^{+}$.

La fonction racine carrée est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ donc la fonction f, composée de racine carrée suivie d'exponentielle, est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et on a $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\times e^{\sqrt{x}}=\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$.

Remarque : e^{u} varie comme u. Par exemple, si u est strictement décroissante sur I, alors pour tous a et b dans I : $a<b\Rightarrow u(a)>u(b)$. Or, exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc $u(a)>u(b)\Rightarrow e^{u(a)}>e^{u(b)}$. Ainsi, e^{u} est strictement décroissante sur I.

Exemple $x\mapsto -x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ donc $x\mapsto e^{-x}$ aussi.

S'entraîner

Activités mentales

Pour les exercices 1 à 4, déterminer si chaque proposition est vraie ou fausse.

1 Soit f la fonction exponentielle et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1) Pour tout x réel, l'image de x par f est $\mathrm{e}(x)$.
2) Pour tous a et b réels, $\left(\mathrm{e}^a\right)^b = \mathrm{e}^{a^b}$.
3) Pour tous a et b réels , $\mathrm{e}^{a-b} = \dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}$.
4) Pour tout x réel, $f'(x) = \mathrm{e}^{x-1}$.
5) Pour tout x réel, $f(-x)f(x) = 1$.
6) La droite $\mathcal{T}$ d'équation $y = x$ est tangente à $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 0.
7) La droite $\mathcal{T}'$ d'équation $y = \mathrm{e}\,x$ est tangente à $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 1.
8) L'axe des ordonnées est asymptote à $\mathscr{C}$ en $-\infty$.

2 x désigne un réel quelconque.

1) $\mathrm{e}^3 \times \mathrm{e}^5 = \mathrm{e}^8$
2) $\dfrac{\mathrm{e}^x}{2} = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$
3) $\mathrm{e}^{-2} < 1$
4) $\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x} = \mathrm{e}^2$

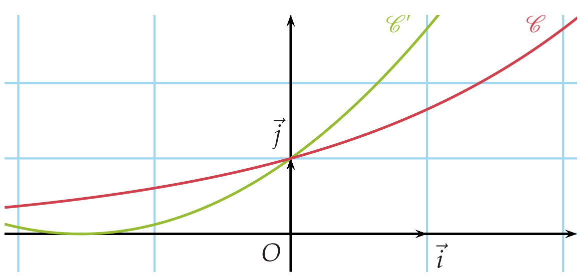
3

1) Pour tout x réel, $\mathrm{e}^x > 0 \Rightarrow \mathrm{e}^{-x} < 0$.
2) Sur $\mathbb{R}$, $-2x\,\mathrm{e}^{-x+1} \geqslant 0$ pour $x \in]-\infty\,;\,0]$.
3) La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-3x+1}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.
4) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 0$.

4 Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1}$.

1) Pour tout x réel, $f(x) + f(-x) = 0$.
2) Pour tout x réel, $f(x) = \dfrac{2}{\mathrm{e}^{-x} + 1} - 1$.
3) Pour tout x réel, $f'(x) = \dfrac{2\,\mathrm{e}^{2x}}{\left(\mathrm{e}^x + 1\right)^2}$.
4) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

5 Justifier qu'aucune des courbes représentées ci-dessous n'est celle d'une fonction f définie par $f(0) = 1$ et $f'(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.



Pour les exercices 6 et 7, trouver la bonne réponse ($\mathscr{C}$ désigne la courbe représentative de f dans un repère).

6 Soit la fontion $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x} - x - 1$ définie sur $\mathbb{R}$.

a) $f'(x) = \mathrm{e}^{-x} - 1$.
b) f admet un minimum.
c) L'équation $f(x) = 0$ a une unique solution.
d) $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale.

7 Soit la fontion $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$ définie sur $\mathbb{R}$.

a) $f'(x) - xf(x) = 0$.
b) f admet un maximum.
c) L'équation $f(x) = 1$ a deux solutions distinctes.
d) $\mathscr{C}$ admet une asymptote verticale.

Calculs algébriques

8 Simplifier les expressions suivantes :

1) $\exp(3)\exp(5)$
2) $\exp(-2)\exp(4)$
3) $\dfrac{1}{\exp(-5)}$
4) $\left(\exp(5)\right)^3$

9 Simplifier les expressions suivantes :

1) $\mathrm{e}^3\,\mathrm{e}^4$
2) $\mathrm{e}^4\,\mathrm{e}^{-4}$
3) $\dfrac{\mathrm{e}^5\,\mathrm{e}^{-3}}{\mathrm{e}^{-2}}$
4) $\left(\mathrm{e}^4\right)^3 \mathrm{e}^4$
5) $\left(\mathrm{e}^3\right)^{-2} \mathrm{e}^5$
6) $\dfrac{\mathrm{e} - \sqrt{\mathrm{e}}}{\sqrt{\mathrm{e}} - 1}$

10 Simplifier les expressions suivantes :

1) $\left(\mathrm{e}^5 - \mathrm{e}^4\right)^2 - \left(\mathrm{e}^5 + \mathrm{e}^4\right)^2$
2) $\left(\mathrm{e}^2 + \mathrm{e}^{-2}\right)\left(\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-2}\right)$
3) $\dfrac{\mathrm{e}^3 - \mathrm{e}^{-3}}{\mathrm{e}^3 + \mathrm{e}^{-3}}$
4) $\sqrt{\left(\mathrm{e}^2 + 1\right)^2 - \left(\mathrm{e}^2 - 1\right)^2}$
5) $\mathrm{e}\,\mathrm{e}^{2x+1}$
6) $\mathrm{e}^{3-2x}\,\mathrm{e}^{x+5}$
7) $\left(\mathrm{e}^{5x}\right)^2$
8) $\mathrm{e}^{9x} - 2\left(\mathrm{e}^{3x}\right)^3$

11 Simplifier les expressions suivantes :

1) $\mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{-x}$
2) $\mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{-x+1}$
3) $\mathrm{e}\,\mathrm{e}^{-x}$
4) $\left(\mathrm{e}^{-x}\right)^2$
5) $\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right)$
6) $\left(\mathrm{e}^x\right)^5\left(\mathrm{e}^{-2x}\right)^2$
7) $\dfrac{\left(\mathrm{e}^x\right)^3}{\mathrm{e}^{2x}}$
8) $\sqrt{\mathrm{e}^{-2x}}$
9) $\dfrac{\mathrm{e}^{-4x}\,\mathrm{e}}{\left(\mathrm{e}^{-x}\right)^2}$

12 Simplifier les expressions suivantes :

1) $\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right)^2 - \left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right)^2$
2) $\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right)^2 - \mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^{-x}\right)$
3) $\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right)\left(\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x + 1\right)$
4) $\left(\mathrm{e}^{3x}\right)^2 + \left(\mathrm{e}^{-3x}\right)^2 - \left(\mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^{-3x}\right)^2$
5) $\left(\mathrm{e}^{3x}\right)^2 - \mathrm{e}^{2x}\left(\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-2}\right)^2$

Équations - Inéquations

13 ► MÉTHODE 1 p. 122

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

1) $\exp(x) = \mathrm{e}$
2) $\exp(-x) = 1$
3) $\exp(2x-1) = \mathrm{e}$
4) $\mathrm{e}^{x^2+x} = 1$
5) $\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x} = 0$
6) $\mathrm{e}^{x^2+5} = \left(\mathrm{e}^{x+2}\right)^2$
7) $\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x} = 0$
8) $\mathrm{e}^{3x+1} = \mathrm{e}^{-2x+3}$
9) $\mathrm{e}^{2x} - 1 = 0$
10) $x\,\mathrm{e}^{2x} - 2\,\mathrm{e}^{2x} = 0$

14 Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

1) $\exp(x) < \mathrm{e}$
2) $\exp(-x) \geqslant 1$
3) $\mathrm{e}^{2x-1} > \mathrm{e}^{x}$
4) $\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x} < 2$
5) $\mathrm{e}^{x} < 1$
6) $\mathrm{e}^{-x} > 0$
7) $\mathrm{e}^{-x} > 1$
8) $\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x} > 0$
9) $\mathrm{e}^{2x} - 1 \geqslant 0$
10) $x\,\mathrm{e}^{-x} - 3\,\mathrm{e}^{-x} < 0$

15

1) Déterminer les racines du polynôme :
$$P(X) = X^2 + 4X - 5.$$
2) En déduire les solutions de l'équation $\mathrm{e}^{2x} + 4\,\mathrm{e}^{x} = 5$.
3) Résoudre les équations suivantes :
   a) $\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{x} - 2 = 0$
   b) $\mathrm{e}^{2x+1} + \mathrm{e}^{x+1} - 2\,\mathrm{e} = 0$
   c) $\mathrm{e}^{x} - 2\,\mathrm{e}^{-x} + 1 = 0$

16 Résoudre sur $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $\dfrac{\mathrm{e}^{x}+3}{\mathrm{e}^{x}-1} > 0$
2) $-\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} + 2 > 0$
3) $\mathrm{e}^{2x} + 2\,\mathrm{e}^{x} - 3 \geqslant 0$
4) $\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{x} - 2 < 0$

17 Résoudre dans $\mathbb{R}$.

1) $\mathrm{e}^{x^2+2} = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}}$
2) $2\,\mathrm{e}^{2x} + 5\,\mathrm{e}^{x} + 3 = 0$
3) $\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x} > \sqrt{\mathrm{e}} + \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$
4) $\mathrm{e}^{x^2} + 1 \leqslant 2$

18 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\dfrac{\mathrm{e}^{1-2x} + \mathrm{e}^{2x-1}}{\mathrm{e} + \mathrm{e}^{-1}} = 1$.

Calculs de limites

19 ► MÉTHODE 2 p. 123

Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x}$
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x}$
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}}$
4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x+1}$
5) $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{2x+1}$
6) $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x^2+1}$
7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$
8) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$
9) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$

20 Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{e}^{-x}$
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x}(x-1)$
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{x}+1}{\mathrm{e}^{-x}-1}$
4) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-3x}}{3x-1}$
5) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\mathrm{e}^{-x}+3x+1\right)$
6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\mathrm{e}^{-2x}-\mathrm{e}^{-x}\right)$

21 **Avec un changement de variable**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par :
$$f(x) = \frac{2}{x-1}\,\mathrm{e}^{\frac{x+1}{x-1}}.$$

1) On pose $X = \dfrac{2}{x-1}$. Montrer que $f(x) = \mathrm{e}\,X\,\mathrm{e}^{X}$.
2) En déduire $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)$.

22 Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x+1)\,\mathrm{e}^{x}$
2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{\mathrm{e}^{x}}$
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\mathrm{e}^{2x}-3\,\mathrm{e}^{x}+1\right)$
4) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\mathrm{e}^{2x}-3\,\mathrm{e}^{x}+1\right)$
5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{x}-1}{\mathrm{e}^{x}+1}$
6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x+1}\times\mathrm{e}^{1-x}$

23 Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{x}$
2) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x}}{x}$
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1\right)$
4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\,\mathrm{e}^{-x}}{x^2+1}$
5) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\mathrm{e}^{\frac{3}{x}}-1\right)$
6) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1\right)$
7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{x-1}{x+1}}$
8) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2-2\dfrac{x-1}{\mathrm{e}^{1-x}}\right)$

24 Les questions sont indépendantes.

1) Soit la suite (u_n) définie pour $n \geqslant 1$ par :
$$u_n = 1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} + \mathrm{e}^{\frac{2}{n}} + \cdots + \mathrm{e}^{\frac{n-1}{n}}.$$
Déterminer la limite de la suite (u_n).
2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(x^2+x\right)$$
Déterminer les limites en $-\infty$ de la fonction f.
3) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :
$$g(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^{x}-1}.$$
La limite de g en 0 est-elle finie ?
4) Étudier les asymptotes à la courbe représentative de la fonction h définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par :
$$h(x) = \frac{x\,\mathrm{e}^{-x}+1}{x+1}.$$

Dérivées

25 Soit f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer $f'(x)$.

1) $f(x) = \mathrm{e}^{-5x+2}$ **2)** $f(x) = \mathrm{e}^{3x^2-x}$ **3)** $f(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+1}}$

26 Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la donnée de $f(x)$. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Déterminer une expression de $f'(x)$.

1) $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$
2) $f(x) = \dfrac{x}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$
3) $f(x) = \mathrm{e}^{x^2+x}$
4) $f(x) = x\,\mathrm{e}^{x+1}$
5) $f(x) = \mathrm{e}^{x^2+1}$
6) $f(x) = \left(x^2+1\right)\mathrm{e}^{3x+1}$
7) $f(x) = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-2x}}{\mathrm{e}^{x}}$
8) $f(x) = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{2x}}$

27 Vérifier le tableau suivant après avoir déterminé les domaines de définition et dérivabilité de f.

$f(x)$	$f'(x)$
$3x\,\mathrm{e}^{5x^2+3}$	$\left(30x^2+3\right)\mathrm{e}^{5x^2+3}$
$\dfrac{\mathrm{e}^{2-x^2}}{2x}$	$-\dfrac{(2x^2+1)\,\mathrm{e}^{2-x^2}}{2x^2}$
$\mathrm{e}^{x\sqrt{x}}$	$\dfrac{3}{2}\sqrt{x}\,\mathrm{e}^{x\sqrt{x}}$
$\mathrm{e}^{\frac{2x}{2-x}}$	$\dfrac{4}{(x-2)^2}\,\mathrm{e}^{\frac{2x}{2-x}}$

28 INFO

Un logiciel de calcul formel a donné :

```
1 f(x):=e^(2x^3-3x^2+4)
      x -> exp(2*x^3-3*x^2+4)
2 df:=derive(f)
      x -> exp(2*x^3-3*x^2+4)*(2*3*x^2-3*2*x)
3 factoriser(df)
      x -> 6*x*(x-1)*exp(2*x^3-3*x^2+4)
```

Traduire ce qu'on a voulu faire et le vérifier.

29 Soit la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{\frac{x-1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ a \text{ réel} & \text{si } x = 0 \end{cases}$.
La fonction f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

30 Soit la fonction $g : t \mapsto t^n\,\mathrm{e}^{-t}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que $g'(t) = \mathrm{e}^{-t}(n-t)t^{n-1}$.

2) $g^{(k)}$ désigne la fonction dérivée k-ième de g.
Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{t}\,g^{(k)}$ est une fonction polynôme de degré n.

Méli-Mélo

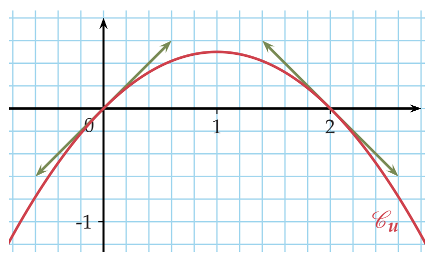
31 **VRAI/FAUX**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan.
Étudier l'exactitude de chaque proposition. Justifier

1) f est décroissante sur $]-\infty\,;\,0]$.
2) f est croissante sur $[1\,;\,+\infty[$.
3) L'axe des abscisses est une asymptote de $\mathscr{C}$.
4) L'axe des ordonnées est une asymptote de $\mathscr{C}$.
5) $\mathscr{C}$ admet une tangente d'équation $y = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
6) $\mathscr{C}$ admet une tangente d'équation $y = x$.
7) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.
8) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

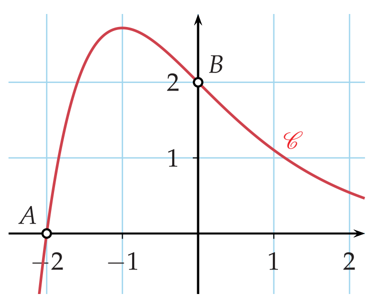
32 Soit u une fonction polynôme de degré 2 et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{u(x)}$. On a représenté dans le repère ci-dessous $\mathscr{C}_u$ et deux tangentes à $\mathscr{C}_u$.
Les réponses seront données à l'aide du graphique.

1) Peut-on affirmer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions ?
2) Déterminer $f(0)$ et $f'(0)$.
3) Donner le tableau de variation de la fonction f.



33 Une courbe $\mathscr{C}$ qui passe par les points $A(-2\,;\,0)$ et $B(0\,;\,2)$ représente une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (ax+b)\,\mathrm{e}^{-x} \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont des réels.}$$



1) À l'aide du graphique, déterminer a et b en justifiant.
2) En déduire le tableau de variation de f.

34 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^0\,\mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^1\,\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^2\,\mathrm{e}^{1x} + \mathrm{e}^3\,\mathrm{e}^{0x}.$$

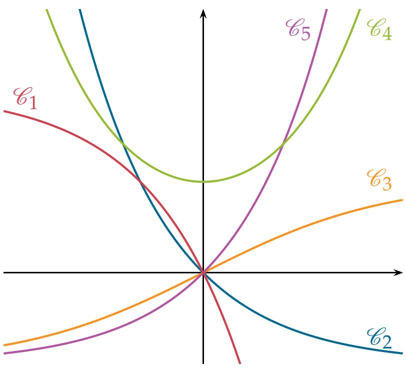
1) Montrer que $f(x) = (\mathrm{e}^x - \mathrm{e})^2(\mathrm{e}^x + \mathrm{e})$.
2) Résoudre l’inéquation $f(x) > 0$.
3) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

35 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes.

1) $\begin{cases} \mathrm{e}^{x-1} + \mathrm{e}^y = 2 \\ \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{y+1} = 0 \end{cases}$ **3)** $\begin{cases} \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y = 2 \\ x + y = 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} \mathrm{e}^{x+2} + 2\,\mathrm{e}^{y-3} = 3 \\ \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^y = \mathrm{e} \end{cases}$ **4)** $\begin{cases} xy = 3 \\ \mathrm{e}^{x+1}\,\mathrm{e}^{y+1} = 1 \end{cases}$

36 Dans un même repère, on considère cinq courbes représentant cinq fonctions a, b, c, d et f définies sur $\mathbb{R}$.



Les droites d’équation $y = -1$ et $y = 1$ sont asymptotes en $+\infty$ respectivement à $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$. De plus, on sait que :

- $a(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x} - 1$
- $b(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1}$
- $c(x) = \mathrm{e}^x - 1$
- $d(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$
- $f(x) = 2\,(1 - \mathrm{e}^x)$

Associer à chaque fonction sa courbe en justifiant.

37 Déterminer les limites de f aux bornes de I puis calculer $f'(x)$ (on admet que f est dérivable sur I).

1) $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{2x+3}{x-2}}$ $\quad I =]2\,;\,+\infty[$
2) $f(x) = x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ $\quad I =]0\,;\,+\infty[$
3) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{x+2}$ $\quad I = \mathbb{R}$
4) $f(x) = \dfrac{2\,\mathrm{e}^x - 3\,\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$ $\quad I = \mathbb{R}$
5) $f(x) = \left(x^2 - 4\right)\mathrm{e}^{x-2}$ $\quad I = \mathbb{R}$
6) $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{4}{2x-1}}$ $\quad I = \left]\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$

38 Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
Déterminer $f'(x)$, puis les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

1) $f(x) = \mathrm{e}^{4x+1}$ **4)** $f(x) = \mathrm{e}^x \sin x$
2) $f(x) = \mathrm{e}^x + x^2 + 1$ **5)** $f(x) = \dfrac{3x + 1 - \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}$
3) $f(x) = 5\,\mathrm{e}^x + 5x\,\mathrm{e}^x$ **6)** $f(x) = \mathrm{e}^{-x} + x^{-1}$

39 Même consigne que l’exercice précédent.

1) $f(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$ **4)** $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{3x^2+5x-3}}{\mathrm{e}^x + 1}$
2) $f(x) = (\mathrm{e}^x)^2 + \mathrm{e}^{-x}$ **5)** $f(x) = \mathrm{e}^{5x^3+7x+4}$
3) $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ **6)** $f(x) = (x+1)\,\mathrm{e}^{-x+1}$

40 ALGO

Le but est de déterminer un encadrement d’amplitude donnée de la solution de l’équation (E) : $\mathrm{e}^x = 2$.

1) Démontrer que (E) a une unique solution $\alpha \in [0\,;\,1]$.
2) À partir de l’intervalle $[0\,;\,1]$, on procède par **dichotomie** pour réduire plusieurs fois de moitié la longueur de cet intervalle.
Quel est l’encadrement de α après le premier pas :
$$0 \leqslant \alpha \leqslant 0{,}5 \quad \text{ou} \quad 0{,}5 \leqslant \alpha \leqslant 1\,?$$
3) On a traduit le processus par l’algorithme suivant où les variables `a`, `b`, `c` et `p` sont des nombres.

```
a PREND_LA_VALEUR 0
b PREND_LA_VALEUR 1
p PREND_LA_VALEUR b - a
TANT_QUE p > 0.1
    c prend la valeur (a + b) / 2
    SI ___ ALORS a PREND_LA_VALEUR c
    SINON ___ PREND_LA_VALEUR ___
    p PREND_LA_VALEUR ___
Fin TANT_QUE
AFFICHER ___
```

Compléter l’algorithme pour qu’il donne les bornes d’un encadrement de α d’amplitude inférieure à 0,1.
4) Modifier l’algorithme afin que l’utilisateur puisse définir au départ l’amplitude souhaitée.
5) Programmer l’algorithme afin d’encadrer α avec une amplitude inférieure à 10^{-5}.
Combien de tours de la boucle `TANT_QUE` y a-t-il eu ?

Ultérieurement, on étudiera la fonction logarithme népérien notée ln et on verra que :
$$\mathrm{e}^\alpha = 2 \Leftrightarrow \alpha = \ln 2.$$

41 ALGO

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Le but est de trouver le plus petit entier n tel que $u_n \geqslant 5$.

1) Déterminer u_1, u_2 et u_3.

2) Dans l'algorithme suivant, u et n sont des nombres. Le compléter pour qu'il affiche u_{20}.

```
u PREND_LA_VALEUR 1
POUR n ALLANT_DE ... A ...
    u PREND_LA_VALEUR u + ...
Fin POUR
AFFICHER u
```

3) Exprimer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de n.
En déduire les variations de la suite (u_n).

4) Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^x - x - 1.$$

a) Déterminer les variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$.

b) En déduire que, pour $n \geqslant 1$, $\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} \geqslant \dfrac{n+1}{n}$.

5) Montrer que, pour $n \geqslant 1$, on a $\mathrm{e}^{u_n} \geqslant n+1$.

6) En déduire la limite de la suite (u_n).

7) Compléter l'algorithme suivant pour qu'il affiche la valeur de n répondant à l'objectif.

```
u PREND_LA_VALEUR 1
n PREND_LA_VALEUR 1
TANT_QUE (u ...) FAIRE
    n PREND_LA_VALEUR n + 1
    u PREND_LA_VALEUR u + ...
Fin TANT_QUE
AFFICHER n
```

Démonstrations guidées ROC

42 On suppose connus les résultats suivants :

- $\mathrm{e}^0 = 1$;
- $\mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^y = \mathrm{e}^{x+y}$ pour tous x et y réels.

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\mathrm{e}^x)^n = \mathrm{e}^{nx}$.

43 On admet que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.

Démontrer que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x} = 0$.

44 On rappelle les résultats suivants :

- La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa fonction dérivée.
- $\mathrm{e}^0 = 1$ et, pour tout réel x, on a $\mathrm{e}^x > x$;
- Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$ et deux fonctions φ et ψ définies sur $[A\,;\,+\infty[$ telles que, pour tout $x \geqslant A$, $\psi(x) \leqslant \varphi(x)$.
Si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \psi(x) = +\infty$, alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$.

1) Soit la fonction $g : x \mapsto \mathrm{e}^x - \dfrac{x^2}{2}$ définie sur $[0\,;\,+\infty[$.
Montrer que pour tout x de $[0\,;\,+\infty[$, $g(x) \geqslant 0$.

2) En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$

45 Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

1) La fonction exponentielle est l'unique fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\begin{cases} g'(x) = g(x) \\ g(0) = 1 \end{cases}$.

Démontrer que $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = 1$.

2) Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

Études de fonctions

46 Étudier la fonction f définie par $f(x)$ (ses variations, ses limites aux bornes de son ensemble de définition et les asymptotes à sa courbe représentative $\mathscr{C}$).

1) $f(x) = \mathrm{e}^{3x+5}$

2) $f(x) = \mathrm{e}^{5x^2}$

3) $f(x) = \mathrm{e}^{3(x+1)^2-12}$

4) $f(x) = \mathrm{e}^{-2x^2+5x+3}$

5) $f(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{1-x}}$

6) $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{2x-3}{x}}$

47 Dresser le tableau de variation de f sur I.

1) $f : t \mapsto 4{,}4 + 0{,}12t\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{60}}$ $\quad I = [0\,;\,120]$

2) $f : t \mapsto (300 - 10t)\,\mathrm{e}^{-0{,}5t}$ $\quad I = [0\,;\,7]$

3) $f : t \mapsto 1 + 0{,}5t - \mathrm{e}^{0{,}5t}$ $\quad I = [0\,;\,5]$

4) $f : t \mapsto 8t\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} + 2$ $\quad I = [0\,;\,10]$

48 On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^x - 1}.$$

Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

2) Établir le tableau de variation de la fonction f.

3) Préciser les différentes asymptotes de $\mathscr{C}_f$.

49 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{9}{2}\,\mathrm{e}^{-2x} - 3\,\mathrm{e}^{-3x}.$$

Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère.

1) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$f(x) = 3\,\mathrm{e}^{-2x}\left(\frac{3}{2} - \mathrm{e}^{-x}\right).$$

2) Déterminer la limite de f en $+\infty$ puis en $-\infty$.

3) Étudier les variations de la fonction f.

4) **a)** Déterminer les coordonnées du point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des ordonnées.

b) Justifier que $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en un seul point. Donner ses coordonnées à 10^{-2} près.

50 Soit la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{4\,\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x} + 7}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f.

1) Vérifier que, pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{4}{1 + 7\,\mathrm{e}^{-x}}$.

2) **a)** Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet deux asymptotes dont on précisera les équations.

b) Démontrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c) Démontrer que pour tout réel x, $0 < f(x) < 4$.

51 Soit f et g les fonctions définies sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = -2\,\mathrm{e}^{-x^2} - x + 3 \ \text{ et } \ g(x) = x\,\mathrm{e}^{-x^2} - \frac{1}{4}.$$

1) **a)** Démontrer que g admet un maximum en $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions α et β (avec $\alpha < \beta$) dans $[0\,;\,2]$.

c) Dresser le tableau de signes de $g(x)$.

2) **a)** Déterminer le réel $k > 0$ tel que $f'(x) = kg(x)$.

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

c) Montrer que $f(\alpha) = -\dfrac{1}{2\alpha} - \alpha + 3$.

52

1) Soit la fonction $g : x \mapsto x\,\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{x} + 1$ définie sur $\mathbb{R}$.

a) Déterminer la fonction dérivée g' de la fonction g.

b) Étudier le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$.

c) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geqslant 0$.

2) Soit la fonction $f : x \mapsto x\,\mathrm{e}^{x} - 2\,\mathrm{e}^{x} + x$ définie sur $\mathbb{R}$.

a) Déterminer la limite de f en $-\infty$, puis en $+\infty$.

b) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = g(x)$.

c) En déduire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

53 Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = \mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}.$$

1) **a)** Étudier la parité de f.

b) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

c) Déterminer les variations de f.

2) Reprendre la question **1** avec la fonction g.

3) Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer $(f(a))^2 - (g(a))^2$.

4) Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Exprimer $f(a)g(b) + g(a)f(b)$ en fonction de $g(a+b)$.

54 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x+1)\,\mathrm{e}^{-x} - x + 1.$$

1) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

2) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer f'.

3) Déterminer les limites de f' en $+\infty$ et $-\infty$.

4) Étudier les variations de f' puis démontrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$. Donner un encadrement de α à 10^{-2}.

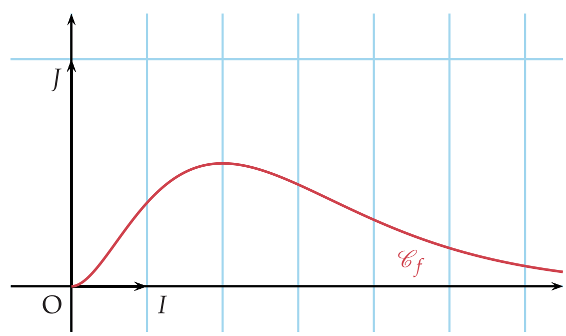
5) En déduire le signe de f' puis les variations de f.

6) Calculer la limite en $+\infty$ de $f(x) - (-x+1)$.
En déduire une interprétation graphique.

55 Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = x^2\,\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les représentations graphiques des fonctions f et g dans le plan muni d'un repère $(O\,;\,I,\,J)$.



1) D'après le graphique, quelles semblent être les variations de la fonction f et sa limite en $+\infty$?

2) Valider ces conjectures à l'aide d'une démonstration.

3) Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\mathscr{C}_g$.

56 Soit f la fonction définie pour tout $x \in [0\,;\,1]$ par :

$$f(x) = 2x - 2\,e^{-x} + e^{-1}.$$

1) Dresser le tableau de variation de f sur $[0\,;\,1]$.

2) Démontrer que la fonction f s'annule une fois et une seule sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ en un réel α.
Donner la valeur de α arrondie au centième.

57 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + \frac{4}{1+e^x}.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\mathbb{R}$ d'unité graphique 2 cm.

1) Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de la fonction f.

2) a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$f'(x) = \left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right)^2.$$

b) En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
Dresser alors le tableau de variation de f.

3) a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$.
Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}$.

b) Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}'$.

c) Tracer les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ et la courbe $\mathscr{C}$.

58 Soit l'expression $f(x) = \dfrac{2\,e^{2x} - e^x}{e^{2x} - e^x + 1}$.

1) Justifier qu'on peut définir une fonction f sur $\mathbb{R}$.

2) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

3) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :
$$f'(x) = -\frac{e^x\left(e^{2x} - 4\,e^x + 1\right)}{\left(e^{2x} - e^x + 1\right)^2}.$$

59

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(2x^3 - 4x^2\right)e^{-x}.$$

a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que :
$$f'(x) = 2x\left(-x^2 + 5x - 4\right)e^{-x}.$$

c) Dresser le tableau de variation de f.

d) Représenter f dans un repère orthonormal.

2) Soit la fonction $g : x \mapsto f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ définie sur $]0\,;\,+\infty[$.

a) Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$,

b) Déduire des questions précédentes le tableau de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

60 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (ax+b)\,e^{-x} + 1$$

telle que sa courbe représentative $\mathscr{C}$ passe par les points $A(0\,;\,4)$ et $B(-1{,}5\,;\,1)$ dans un repère du plan.

1) Déterminer une expression de $f(x)$.

2) Déterminer la limite de f en $-\infty$.

3) a) Montrer que pour tout réel x :
$$f(x) = 2\frac{x}{e^x} + \frac{3}{e^x} + 1.$$

b) Déterminer alors la limite de f en $+\infty$.

c) En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ a une asymptote $\mathscr{D}$.
Donner une équation de $\mathscr{D}$.

d) Démontrer que $\mathscr{D}$ coupe $\mathscr{C}$ au point B.

e) Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}$.

4) Démontrer que, pour tout réel x :
$$f'(x) = (-2x-1)\,e^{-x}.$$

5) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
En déduire le tableau de variation de f.

6) Déterminer une équation de la droite $\mathcal{T}$ tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A.

61 Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1}\,e^{\frac{1}{x}}$$

et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1) Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2) Soit U la fonction définie par $U(x) = \dfrac{e^x}{1-x}$.

a) Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\,;\,1\}$, le taux de variation de U entre 0 et $\dfrac{1}{x}$ est $f(x) - x$.

b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x)$.

62 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x}{e^x - x}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère orthogonal $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$.

1) a) Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) Interpréter graphiquement ces résultats.

2) a) Calculer la dérivée de f.

b) Étudier le sens de variation de f.

3) a) Déterminer une équation de la tangente $(\mathcal{T})$ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

b) Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $(\mathcal{T})$.

4) Tracer la droite $(\mathcal{T})$, les asymptotes et la courbe $\mathscr{C}$.

63 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + 1 - \frac{2\,e^x}{e^x + 1}.$$

1) Démontrer que f est une fonction impaire, c'est-à-dire que, pour tout x réel, $f(-x) = -f(x)$.
Comment serait alors représentée f dans un repère ?

2) Déterminer la limite de f en $-\infty$.

3) **a)** Démontrer que, pour tout x réel :

$$f(x) = x + 1 - \frac{2}{1 + e^{-x}}.$$

b) En déduire la limite de f en $+\infty$.

4) **a)** Démontrer que, pour tout x réel :

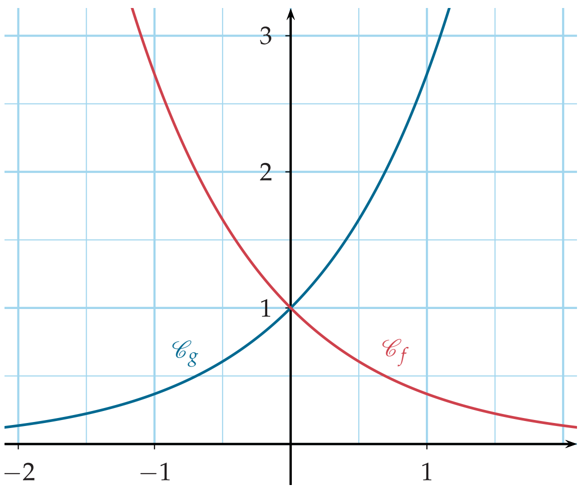
$$f'(x) = \frac{e^{2x} + 1}{(e^x + 1)^2}.$$

b) En déduire le tableau de variation de f.

64 Soit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x \quad \text{et} \quad g(x) = e^{-x}$$

représentées par les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ci-dessous.



1) Démontrer que si m est le coefficient directeur d'une droite $(\mathscr{D})$ du plan alors le vecteur de coordonnées $(1\,;\,m)$ est un vecteur directeur de cette droite.

2) Déterminer, pour tout x réel, $f'(x)$ et $g'(x)$.

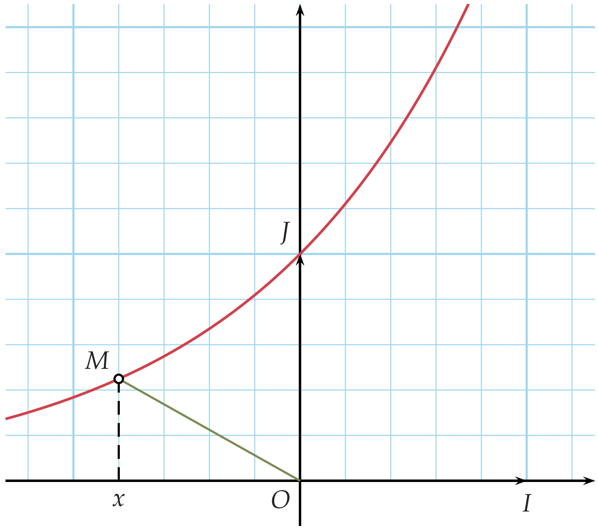
3) On note $(\mathcal{T}_a)$ et (Δ_a) les tangentes respectives à $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse a.

a) Démontrer que les tangentes à $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 0 sont perpendiculaires.

b) Généraliser le résultat précédent à un point d'abscisse a quelconque.

65 INFO

Soit la courbe représentative de la fonction exponentielle dans un repère orthonormé $(O,\ I,\ J)$ et un point mobile M d'abscisse x sur cette courbe.



Le but est de déterminer la position du point M pour que la distance OM soit minimale.

1) Conjecturer la valeur de x qui minimise OM.

2) Déterminer la distance OM en fonction de x.

3) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x^2 + e^{2x}.$$

On admet que g est dérivable deux fois. On note g' la dérivée première de g et g'' sa dérivée seconde.

a) Déterminer $g'(x)$ et $g''(x)$.

b) Étudier le signe de $g''(x)$.
En déduire les variations de g'.

c) Démontrer que g' ne s'annule qu'une seule fois sur $\mathbb{R}$ en un réel noté α.

d) En déduire les variations de g.

e) Déterminer un encadrement de α à 10^{-1} près.

f) Quel est le lien entre OM et $g(x)$?

g) Conclure. Est-ce cohérent avec la conjecture du **1** ?

h) Justifier que $\alpha + e^{2\alpha} = 0$.

4) Dans cette question, on utilise un logiciel de géométrie dynamique.

a) Placer le point M d'abscisse α sur la courbe .

b) Tracer le segment $[OM]$ et la tangente $(\mathcal{T})$ à la courbe en M.

c) Émettre une conjecture concernant $(\mathcal{T})$ et (OM) ?

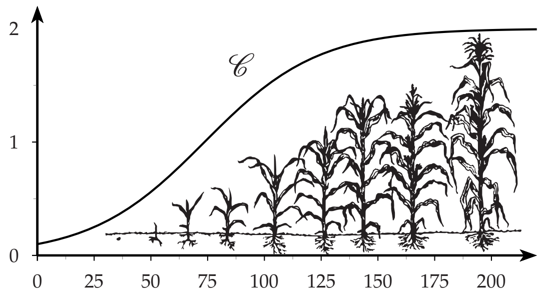
d) Déterminer un vecteur directeur de $(\mathcal{T})$ et (OM).

e) Démontrer la conjecture du **4c**.

Petits problèmes

66 Croissance du maïs

On a représenté ci-dessous la hauteur (en mètres) d'un plant de maïs en fonction du temps (en jours).



On modélise cette croissance par une fonction du type :

$$h : t \mapsto \frac{a}{1 + b\,\mathrm{e}^{-0{,}04t}}.$$

où a et b sont des constantes réelles positives, t est le temps (en jours) et $h(t)$ la hauteur (en mètres) du plant. On sait que le plant mis en terre mesurait 0,1 m et que sa hauteur plafonnera à 2 m.

Déterminer les constantes a et b afin que la fonction h corresponde à la croissance du plant de maïs étudié.

67 Taux d'alcoolémie

Soit la fonction définie sur l'intervalle $I = [0\,;\,4]$ par :

$$f(t) = 3t\,\mathrm{e}^{-1{,}25t}.$$

1) Justifier que f est dérivable sur I.

2) Montrer que $f'(t) = 3(1 - 1{,}25t)\,\mathrm{e}^{-1{,}25t}$.

3) Établir le tableau de variation de f sur I.

4) Faire un tableau de valeurs de $f(x)$ arrondies à 0,01 près avec un pas de 0,25.

5) Représenter f dans un repère orthogonal (prendre l'unité à 3 cm en abscisses et à 10 cm en ordonnées).

6) On admet que $f(t)$ modélise le taux d'alcoolémie (en grammes par litre de sang) en fonction du temps t (en heures) d'un homme de 70 kg après absorption de deux verres d'alcool à l'instant $t = 0$.
Le taux maximum toléré est 0,5 g/L.

a) Cet homme est-il en infraction avec la loi s'il conduit un véhicule juste après l'absorption ?

b) Déterminer graphiquement son taux d'alcoolémie maximum et l'instant où il a lieu.

c) Déterminer graphiquement l'intervalle de temps pendant lequel il ne doit pas conduire.

68 Distibution Maxwell-Boltzmann

Les molécules d'un gaz enfermé dans un récipient à la température T sont animées d'une vitesse de v centimètres par seconde.

Cet état d'équilibre est caractérisé par la fonction de distribution de vitesse de Maxwell-Boltzmann F définie par la formule :

$$F(v) = cv^2\,\mathrm{e}^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

où c et k sont des constantes positives, T est la température en °K (degrés Kelvin), m la masse d'une molécule.

Quelle est la valeur maximale de F ?

69 Croissance de von Bertalanffy

La fonction de croissance de von Bertalanffy donne approximativement la masse $W(t)$ (en kilogrammes) à l'âge t (en années) des éléphantes africaines.

Son expression est :

$$W(t) = 2\,600\left(1 - 0{,}51\,\mathrm{e}^{-0{,}075t}\right)^3.$$

1) On rappelle que $W'(t)$ est le taux de croissance à l'instant t.
Évaluer la masse et le taux de croissance d'un nouveau-né.

2) Calculer et interpréter $\lim\limits_{t \to +\infty} W(t)$.

70 Chute libre

À l'instant $t = 0$, un parachutiste de 80 kg saute d'une altitude de 2 500 mètres avec une vitesse verticale de 1 mètre par seconde.

La distance en mètres d que parcourt le parachutiste pendant t secondes est donnée par la formule :

$$d(t) = 60t + C(\mathrm{e}^{-t} - 1)$$

où C est une constante qui dépend de la vitesse initiale.

La vitesse instantanée est donnée par $v(t) = d'(t)$.

1) Déterminer la valeur de C.

2) Déterminer une expression de $v(t)$.

3) Quelle est la vitesse limite du parachutiste ?

4) Le parachute doit être impérativement ouvert à plus de 500 m d'altitude.
Déterminer le temps maximum δ (à 0,1 seconde près) pendant lequel le parachutiste peut voler librement.

5) Que représente $d''(t)$? Que vaut $d''(\delta)$? Interpréter.

Dans les exercices **71** et **72**, ch désigne la fonction **cosinus hyperbolique** définie par $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

71 *Gateway Arch*

Situé à Saint-Louis dans le Missouri aux États-Unis, le *Gateway Arch* est un monument qui rend hommage aux pionniers partis à la conquête de l'Ouest. Il a été imaginé en 1947 par l'architecte finno-américain Eero Saarinen avec l'aide de l'ingénieur germano-américain Hannskarl Bandel et construit entre 1963 et 1965.

La courbe centrale de l'arche a la forme d'une chaînette aplatie d'équation :

$$y = 693{,}8597 - 68{,}7672\,\mathrm{ch}(0{,}010033x)$$

où x et y sont mesurés en pieds dans un repère orthonormé centré au sol à l'aplomb du sommet.

1) Déterminer, en mètres, la hauteur de l'arche et la distance entre ses deux pieds (1 ft $= 0{,}3048$ m).
2) L'*Arche de la Défense* à Paris mesure 110 m de haut, 108 m de long et 112 m de large.
   Pourrait-on en faire une réplique centrée sous l'arche de Saint-Louis ?

72 La hauteur h par rapport au sol d'un câble électrique suspendu entre deux poteaux de même hauteur s'obtient en résolvant l'équation différentielle :

$$h''(x) = k\sqrt{1 + (h'(x))^2}$$

où k est une constante qui dépend de la densité et de la tension du câble et x est une distance horizontale en mètres mesurée depuis une origine située au sol à l'aplomb du point le plus bas du câble.

1) Vérifiez que $h : x \mapsto \dfrac{1}{k}\mathrm{ch}(kx)$ est solution de cette équation différentielle.
2) Quelle est la hauteur minimale du câble si $k = 0{,}05$?
3) Quelle est la hauteur des poteaux s'ils sont distants de 30 m et que $k = 0{,}05$?

73 Modèle de Verhulst

En 1920, Pearl et Reed ont modélisé l'évolution de la population des États-Unis avec une fonction P, basée sur le modèle de Verhulst, définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$P(t) = \frac{m}{1 + \lambda\,e^{-amt}}$$

où $P(t)$ est en millions d'individus, t en dizaines d'années et les paramètres sont :

$$a = 1{,}58 \times 10^{-3}, \quad \lambda = 49{,}2 \quad \text{et} \quad m = 197{,}273.$$

On considère enfin que l'année 1790 correspond à $t = 0$.

1) a) Étudier les variations de P.
   b) Déterminer la limite de P quand t tend vers $+\infty$.
   c) D'après ce modèle, quand la population atteindra-t-elle son seuil maximal au million près ?
2) Le tableau suivant donne le recensement réel de la population américaine pour la période 1790-1910.

Année	Pop.		
1790	3,929	1850	23,192
1800	5,308	1860	31,443
1810	7,240	1870	38,558
1820	9,638	1880	50,156
1830	12,866	1890	62,948
1840	17,069	1900	75,995
		1910	91,972

   Avec un logiciel de géométrie dynamique, on veut vérifier la concordance des données réelles avec le modèle.
   a) Représenter la fonction P.
   b) Placer les points $A(0\,;\,3{,}929)$, $B(10\,;\,5{,}308)$, etc.
   c) Le modèle est-il satisfaisant ?
3) On intègre des données plus récentes :

Année	Pop.		
1930	123,077	1970	205,052
1950	152,271	1990	249,623
		2010	309,350

   a) Placer les cinq points correspondants.
   Le modèle est-il encore valable ?

74 **D'après Bac (Antilles-Guyane - 2009)**

À la sortie d'un four industriel, un objet refroidit au cours du temps. Sa température en degrés Celsius (°C) à l'instant t en heures est donnée par la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(t) = a\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} + b \text{ et } f'(t) + \frac{1}{2}f(t) = 10.$$

où a et b sont deux réels.

1) Déterminer $f(t)$ pour $t \geqslant 0$, sachant qu'initialement, la température de l'objet est 220 °C.

2) **a)** Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}^+$.

b) Étudier la limite de f en $+\infty$.
Quelle interprétation peut-on en donner ?

3) Déterminer le moment à la minute près où la température de l'objet est 50 °C.

4) Soit la suite $(d_n)_{n\geqslant 0}$ où $d_n = f(n) - f(n+1)$ est l'abaissement de température de l'objet entre l'heure n et l'heure $n+1$.

a) Calculer d_0, d_1 et d_2 au dixième près.

b) Quelle est la limite de d_n quand n tend vers $+\infty$?

c) Démontrer que (d_n) est décroissante.

d) Déterminer la plus petite valeur de l'entier n à partir de laquelle l'abaissement de température est inférieur à 5 °C.

75 **D'après Bac (Asie - 2010)**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}.$$

1) **a)** Déterminer la limite de f quand x tend vers 0.

b) Déterminer la limite de f quand x tend vers $+\infty$.

c) Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f dans un repère orthonormé ?

2) **a)** Démontrer que, f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et :

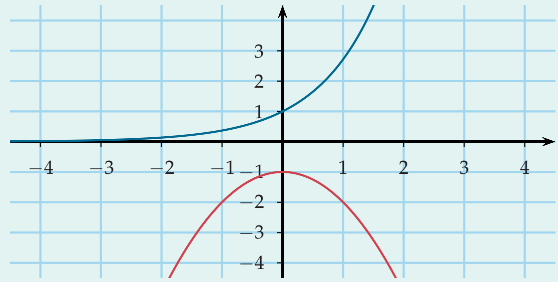
$$f'(x) = -\frac{1}{x^4}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}(2x+1).$$

b) Déterminer le signe de f' et en déduire le tableau de variation de f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

c) Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
Déterminer la valeur approchée de α arrondie au centième.

76 **D'après Bac (Centres Étrangers - 2010)**

Soit deux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ d'équations respectives $y = \mathrm{e}^x$ et $y = -x^2 - 1$ dans un repère orthogonal.



Le but de cet exercice est de prouver qu'il existe une unique tangente $(\mathcal{T})$ commune à ces deux courbes.

1) Déterminer graphiquement l'abscisse du point de contact de cette tangente avec $\mathscr{C}_1$, puis avec $\mathscr{C}_2$.

2) Soit a et b deux réels, A le point d'abscisse a de $\mathscr{C}_1$ et B le point d'abscisse b de $\mathscr{C}_2$.

a) Déterminer une équation de :

- la tangente $(\mathcal{T}_A)$ à $\mathscr{C}_1$ au point A.
- la tangente $(\mathcal{T}_B)$ à $\mathscr{C}_2$ au point B.

b) En déduire que $(\mathcal{T}_A)$ et $(\mathcal{T}_B)$ sont confondues si, et seulement si, a et b sont solutions du système :

$$(\mathrm{S}) \quad \left\{\begin{array}{lll} \mathrm{e}^a & = & -2b \\ \mathrm{e}^a - a\,\mathrm{e}^a & = & b^2 - 1 \end{array}\right. .$$

c) Montrer que le système (S) équivaut au système :

$$(\mathrm{S}') \quad \left\{\begin{array}{lll} \mathrm{e}^a & = & -2b \\ \mathrm{e}^{2a} + 4(a\,\mathrm{e}^a - \mathrm{e}^a - 1) & = & 0 \end{array}\right. .$$

3) Le but de cette question est de prouver qu'il existe un unique réel solution de l'équation :

$$(\mathrm{E}) \quad \mathrm{e}^{2x} + 4(x\,\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x - 1) = 0.$$

a) Montrer que pour tout x appartenant à $]-\infty\,;\,0[$:

$$\mathrm{e}^{2x} - 4 < 0 \text{ et } 4\,\mathrm{e}^x(x-1) < 0.$$

b) En déduire que l'équation (E) n'a pas de solution dans l'intervalle $]-\infty\,;\,0[$.

c) Montrer que f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{2x} + 4\,(x\,\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x - 1)$$

est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

d) Démontrer que l'équation (E) admet une solution unique a dans l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de a.

4) On prend pour A le point d'abscisse a.
Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-1} du réel b pour lequel $(\mathcal{T}_A)$ et $(\mathcal{T}_B)$ sont confondues.

77 **D'après Bac (Centres Étrangers - 2007)**

Le but de cet exercice est de montrer que l'équation :

$$\text{(E)}\quad e^x = \frac{1}{x}$$

admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ et de construire une suite qui converge vers elle.

Partie A : Existence et unicité de la solution

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - e^{-x}.$$

1) Démonter que x est solution de l'équation (E) si, et seulement si, $f(x) = 0$.

2) a) Étudier le sens de variations de f sur $\mathbb{R}$.

b) En déduire que l'équation (E) possède une unique solution sur $\mathbb{R}$. On la note α.

c) Démontrer que $\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1$.

d) Étudier le signe de f sur l'intervalle $[0\,;\,\alpha]$.

Partie B : Deuxième approche

On note g la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par :

$$g(x) = \frac{1+x}{1+e^x}.$$

1) Démontrer l'équivalence :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = x.$$

2) En déduire que α est l'unique solution de $g(x) = x$.

3) Calculer $g'(x)$ et en déduire que la fonction g est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,\alpha]$.

Partie C : Approximation de α

Soit la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}.$$

1) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha.$$

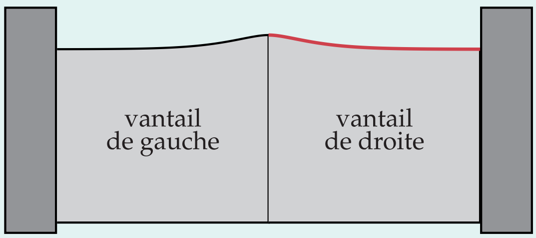
2) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3) On note ℓ la limite de la suite (u_n).
Justifier que $g(\ell) = \ell$. En déduire la valeur de ℓ.

4) À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de α arrondie à la sixième décimale.

78 **D'après Bac (Amérique du Sud - 2014)** ALGO

On veut réaliser le portail schématisé ci-dessous. Chaque vantail mesure 2 mètres de large.



Partie A : Modélisation du bord supérieur

On modélise le bord supérieur du vantail de droite (en rouge) avec une fonction f définie sur $[0\,;2]$ par :

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{4}\right)e^{-4x} + b \quad \text{où } b \text{ est un réel.}$$

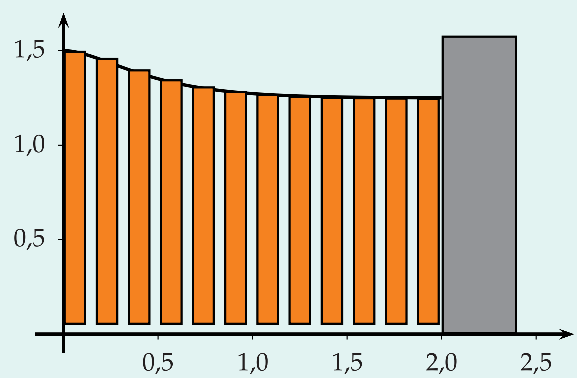
1) a) Calculer $f'(x)$, pour tout réel $x \in [0\,;\,2]$.

b) En déduire le sens de variation de f sur $[0\,;2]$.

2) On souhaite que la hauteur maximale du portail soit égale à 1,5 m.
Démontrer que b doit être alors égal à $\frac{5}{4}$.

Partie B : Utilisation d'un algorithme

On désire réaliser un portail de même forme mais avec des planches rectangulaires de largeur 0,12 m, espacées de 0,05 m. Pour le vantail de droite, le coin supérieur gauche de chaque planche est situé sur le bord haut du vantail (voir ci-dessous) et le bas de chaque planche à 0,05 m de hauteur.
On numérote les planches depuis 0 à gauche.



La distance entre le bas du portail et le sol est 0,05 m.

1) Donner l'aire de la planche numéro k.
2) Compléter l'algorithme suivant pour qu'il calcule la somme des aires des planches du vantail de droite.

```
Variables
X et S sont des réels
Initialisation
Affecter à S et X la valeur 0
Traitement
Tant Que X + 0,17 < ...
    S prend la valeur S + ...
    X prend la valeur X + 0,17
Fin de Tant Que
Afficher S
```

79 D'après Bac (Asie - 2014)

CALC

On modélise une chaîne, suspendue entre deux points d'accroche de même hauteur, par la courbe représentative d'une fonction g définie sur $[-1\,;\,1]$ par :

$$g(x) = \frac{1}{2a}\left(\mathrm{e}^{ax} + \mathrm{e}^{-ax}\right).$$

où a est un paramètre réel strictement positif.

Pour que cette chaîne ait une tension minimale aux extrémités, il faut que le réel a soit une solution strictement positive de l'équation :

$$(x-1)\,\mathrm{e}^{2x} - 1 - x = 0.$$

Dans la suite, on définit sur $[0\,;\,+\infty[$ la fonction f par $f(x) = (x-1)\mathrm{e}^{2x} - 1 - x$ pour tout réel $x \geqslant 0$.

1) Déterminer la fonction dérivée de la fonction f. Vérifier que $f'(0) = -2$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$.
2) On note f'' la fonction dérivée de f'. Vérifier que, pour tout réel $x \geqslant 0$, $f''(x) = 4x\mathrm{e}^{2x}$.
3) Montrer que, sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ la fonction f' s'annule pour une unique valeur, notée x_0.
4) a) Déterminer le sens de variation de f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, puis montrer que $f(x)$ est négatif pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,x_0]$.
   b) Calculer $f(2)$. En déduire que sur $[0\,;\,+\infty[$, la fonction f s'annule pour une valeur unique notée a.
   c) Déterminer à l'aide de la calculatrice la valeur de a arrondie au centième.

80 D'après Bac (Nouvelle-Calédonie - 2013)

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^x + \frac{1}{x}.$$

1) a) Soit la fonction g définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :
$$g(x) = x^2\,\mathrm{e}^x - 1.$$
   Étudier le sens de variation de la fonction g.
   b) Démontrer qu'il existe un unique réel $a \geqslant 0$ tel que $g(a) = 0$.
   Démontrer que $a \in [0,703\,;\,0,704[$.
   c) Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0\,;\,+\infty[$.
2) a) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
   b) Justifier que f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.
   Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.
   c) En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation sur $]0\,;\,+\infty[$.
   d) Démontrer que $m = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a}$ est le minimum de f.
   e) Justifier que $3,43 < m < 3,45$.

81 D'après Bac (Pondichéry - 2014)

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Dans un repère orthogonal, on note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f et $\mathscr{C}'$ celle de sa dérivée f'.

Le point $A(0\,;\,2)$ appartient à $\mathscr{C}$; le point $B(0\,;\,1)$ à $\mathscr{C}'$.

1) Dans le repère ci-dessous, on a tracé $\mathscr{C}$ et trois courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ dont l'une est $\mathscr{C}'$. Laquelle ?

2) Déterminer l'équation réduite de la droite Δ tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en A.
3) On sait que pour tout réel x, $f(x) = \mathrm{e}^{-x} + ax + b$ où a et b sont deux nombres réels.
   a) Déterminer b.   b) Prouver que $a = 2$.
4) Calculer $f'(x)$. Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ n'a qu'une solution (on la note α).
5) Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
6) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

82 **Un gros *BOUM* !**

Soit la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$f : x \mapsto \frac{4}{\mathrm{e}^x + 1}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'origine O.

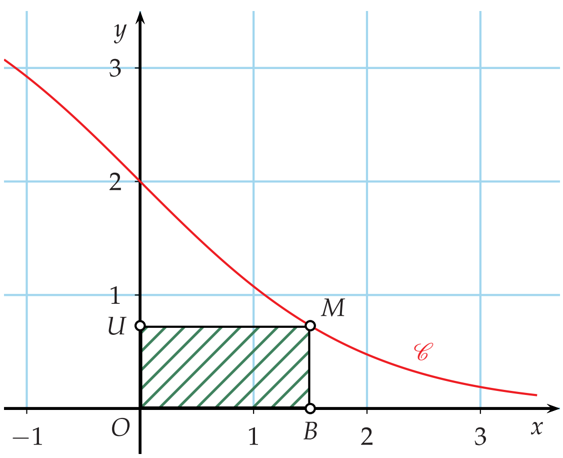
Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \mathrm{e}^x - x\,\mathrm{e}^x + 1.$$

1) Étudier les variations de g.
2) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.
3) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ n'a qu'une seule solution α.
   Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.
4) Démontrer que $\mathrm{e}^{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.
5) Étudier le signe de $g(x)$.

Partie B



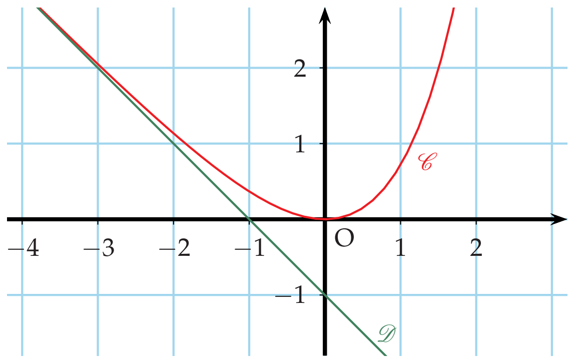
Soit M un point de $\mathscr{C}$ et les projetés B et U de M, respectivement sur l'axe des abscisses et des ordonnées.

1) Soit $\mathcal{A}$ la fonction qui, à tout $x \in \mathbb{R}^+$, associe l'aire du rectangle $BOUM$.
   a) Déterminer $\mathcal{A}(x)$.
   b) Démontrer que $\mathcal{A}'(x)$ est du signe de $g(x)$.
   c) En déduire les variations de $\mathcal{A}$.
2) Montrer que l'aire du rectangle $BOUM$ est maximale lorsque M a pour abscisse α.
   Déterminer un encadrement de cette aire maximale déduit de celui de α obtenu à la question 3 partie A .
3) Démontrer que la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse α est parallèle à la droite (BU).

83 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^x - x - 1,$$

Dans un repère orthonormé, on a tracé sa courbe représentative $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = -x - 1$.



1) a) Soit $a \in \mathbb{R}$. Écrire, en fonction de a, une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathscr{C}$ au point M d'abscisse a.
   b) Cette tangente $\mathcal{T}$ coupe la droite $\mathscr{D}$ au point N d'abscisse b. Vérifier que $b - a = -1$.
   c) En déduire une méthode de construction de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathscr{C}$ au point M d'abscisse 1,5.
2) a) Déterminer graphiquement le signe de f.
   b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   - $\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} \geqslant 1 + \dfrac{1}{n}$
   - $\mathrm{e}^{\frac{-1}{n+1}} \geqslant 1 - \dfrac{1}{n+1}$

   c) Démontrer alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   $$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e} \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$
   d) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

84 Soit deux fonctions f_0 et f_1 définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_0(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1 + \mathrm{e}^x} \quad \text{et} \quad f_1(x) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^x}$$

dont les courbes représentatives dans un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ sont respectivement Γ_0 et Γ_1.

1) Déterminer la limite de f_0 en $-\infty$, puis en $+\infty$.
2) Calculer la dérivée de f_0 et étudier sa monotonie.
3) Montrer que le point $I\left(0\,;\dfrac{1}{2}\right)$ est centre de symétrie de la courbe Γ_0.
4) Déterminer une équation de la tangente en I à Γ_0.
5) Montrer que, pour tout réel x, $f_1(-x) = f_0(x)$.
6) Par quelle transformation simple Γ_1 est-elle une image de Γ_0 ? Construire Γ_0 et Γ_1.

85 Courbes de Gauss

Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$ et la fonction g_k définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_k(x) = \mathrm{e}^{-kx^2}.$$

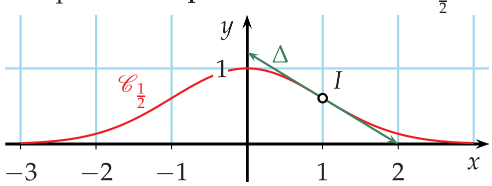
On appelle **courbe de Gauss** la courbe représentative de g_k dans un repère orthogonal et on la note $\mathscr{C}_k$.

1) Démontrer que g_k est **paire** c'est-à-dire que, pour tout réel x, $g_k(-x) = g_k(x)$.
Qu'en déduit-on pour $\mathscr{C}_k$?

2) Soit a et b deux réels strictement positifs.
Démontrer que : $a \leqslant b \Rightarrow g_a \geqslant g_b$.

3) a) Déterminer g_k'', la dérivée seconde de g_k.
b) Résoudre l'équation $g_k''(x) = 0$.

4) Dans cette question, on s'intéresse au cas où $k = \dfrac{1}{2}$.
a) Déterminer $\alpha > 0$ tel que $g_k''(\alpha) = 0$.
b) Déterminer une équation de la tangente Δ à $\mathscr{C}_{\frac{1}{2}}$ au point I d'abscisse 1.
c) Justifier que Δ est de part et d'autre de $\mathscr{C}_{\frac{1}{2}}$ au niveau du point I.
On dit que I est un **point d'inflexion** de $\mathscr{C}_{\frac{1}{2}}$.



5) Démontrer que toute courbe de Gauss admet deux points d'inflexion d'abscisses solutions de l'équation $g_k''(x) = 0$.

6) Démontrer que tous les points d'inflexion des courbes de Gauss sont alignés.

86 Désintégration atomique

Le nombre d'atomes d'une source radioactive tend à diminuer dans le temps. On note N, la fonction qui, à chaque instant t, associe le nombre de noyaux $N(t)$.
En observant ce phénomène sur un laps de temps Δt, on a établi que le nombre d'atomes varie de $\Delta N(t)$ selon la formule suivante :

$$\frac{\Delta N(t)}{N(t)} = -\lambda \Delta t$$

où λ est une constante dépendant uniquement du type de noyaux observés.

1) a) La durée de demi-vie du radon 220 est de 56 s.
Déterminer une valeur approchée de la constante λ dans le cas du radon 220.
b) Un échantillon de 238 g contient environ $6,02 \times 10^{23}$ noyaux d'uranium.
Déterminer le temps d'attente pour que la quantité observée pèse :
- 119 g
- 59 g

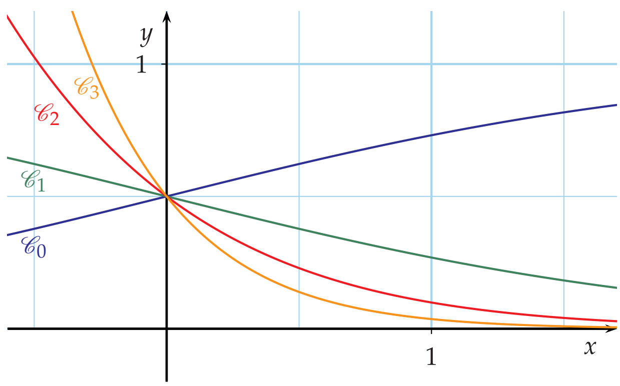
2) a) Démontrer que $\dfrac{\Delta N(t)}{\Delta t} = -\lambda N(t)$.
b) On suppose que N est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$.
Démontrer que $N'(t) = -\lambda N(t)$.

87

On note f_n avec $n \in \mathbb{N}$, la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1 + \mathrm{e}^{-x}}.$$

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthogonal $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j})$. Les courbes $\mathscr{C}_0$, $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ sont représentées ci-dessous :



1) Démontrer que, pour tout entier naturel n, les courbes $\mathscr{C}_n$ sont concourantes.

2) a) Étudier le sens de variation de f_0.
b) Préciser les limites de la fonction f_0 en $-\infty$ et $+\infty$.
Interpréter graphiquement ces limites.
c) Dresser le tableau de variation de f_0 sur $\mathbb{R}$.

3) a) Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_0(x) = f_1(-x)$.
b) En déduire les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et $+\infty$, ainsi que son sens de variation.
c) Interpréter géométriquement le résultat obtenu au 3a pour les courbes $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$.

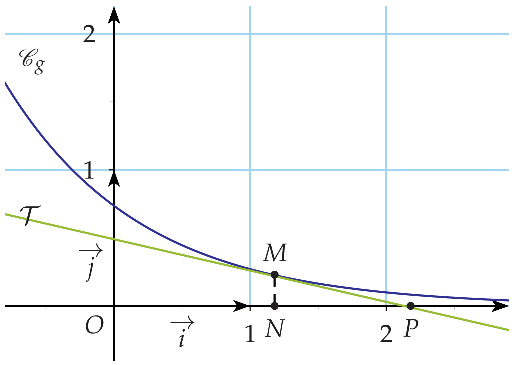
4) a) Vérifier que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ et pour tout réel x, on a :

$$f_n(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^{nx} + \mathrm{e}^{(n-1)x}}.$$

b) Étudier les limites de f_n en $-\infty$ et en $+\infty$.
c) Calculer la dérivée $f_n'(x)$ et dresser le tableau de variation de la fonction f_n sur $\mathbb{R}$.

88 Soit $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$ et g une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
On note respectivement $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leur courbe représentative dans un repère orthonormée $\left(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j}\right)$.

1) Soit a un réel. Démontrer que la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse a coupe l'axe des abscisses au point H d'abscisse $a-1$.
2) Soit B le projeté orthogonal de A sur l'axe des abscisses. Démontrer que $\overrightarrow{HB} = \vec{i}$
3) Soit m un réel, M le point de $\mathscr{C}_g$ d'abscisse m, N son projeté orthogonal sur l'axe des abscisses et P le point d'intersection de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathscr{C}_g$ au point M avec l'axe des abscisses.



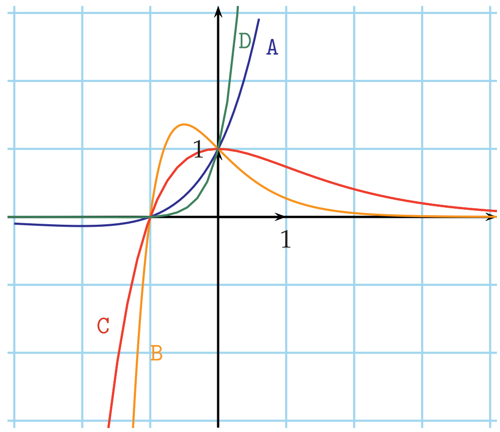
4) Prouver que P a pour coordonnées $\left(m - \dfrac{g(m)}{g'(m)}\,;\,0\right)$.
5) Existe-t-il une fonction g vérifiant $g(0) = 2$ et $\overrightarrow{NP} = \vec{i}$?

89 Soit f_k, avec $k \in \mathbb{Z}$, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = (x+1)\,\mathrm{e}^{kx}$$

et représentée par $\mathscr{C}_k$ dans un repère orthonormé.

1) a) Étudier les variations de la fonction f_{-1} et les limites en $+\infty$ et $-\infty$.
   b) Dresser un tableau de variation complet de f_{-1}.
2) a) Quelle est la nature de la fonction f_0 ?
   b) Déterminer les points d'intersection de $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$.
   Vérifier que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, ils sont sur $\mathscr{C}_k$.
3) Étudier le signe de $g(x) = (x+1)\,(\mathrm{e}^x - 1)$.
   En déduire, pour k entier relatif donné, les positions relatives de $\mathscr{C}_k$ et $\mathscr{C}_{k+1}$.
4) Calculer $f_k'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
   En déduire le sens de variation de f_k suivant les valeurs de k.
5) Dans le repère suivant, quatre courbes A, B, C et D représentent quatre fonctions f_k distinctes où k est parmi les entiers -3, -1, 1 et 2.
   Identifier les courbes correspondant à ces valeurs en justifiant la réponse.



90 **Fonctions hyperboliques**

Les **fonctions hyperboliques** sont les fonctions cosinus, sinus et tangente hyperboliques notées respectivement ch, sh et th définies sur $\mathbb{R}$ par :

- $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$
- $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$
- $\mathrm{th} = \dfrac{\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}}$

1) Déterminer leurs dérivées en fonction de ch et sh.
2) Montrer que ch est à valeurs dans $[1\,;\,+\infty[$ et th est à valeurs dans $]-1\,;\,1[$.
3) Calculer $\mathrm{th}(x)$ en fonction de :
   a) e^x et e^{-x} b) e^{2x} c) e^{-2x}
4) Montrer que :
   a) $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$
   b) $\mathrm{ch}(x+y) = \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{sh}(y)$
   c) $\mathrm{sh}(x+y) = \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(y) + \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(y)$
   d) $\mathrm{th}(x+y) = \dfrac{\mathrm{th}(x) + \mathrm{th}(y)}{1 + \mathrm{th}(x)\,\mathrm{th}(y)}$
5) On pose $t = \mathrm{th}\left(\dfrac{x}{2}\right)$.
   Montrer que $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{1+t^2}{1-t^2}$ et $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{2t}{1-t^2}$.
6) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $5\,\mathrm{ch}(x) - 4\,\mathrm{sh}(x) = 3$.
   Donner la ou les solution(s) à 10^{-3} près.
7) Dériver la fonction $x \mapsto \dfrac{2\sin(x)\,\mathrm{sh}(x)}{(\mathrm{sh}(x) + \sin(x))^2}$.
8) Soit $y \in \mathbb{R}$. Comparer $\mathrm{sh}(y)$ et y.
9) a) Montrer que $\mathrm{sh}(2x) = 2\,\mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(x)$.
   b) Étudier alors la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{th}(x)}{x}$.

91 **Démontrer l'existence de la fonction exp**

La fonction exponentielle a été définie comme l'unique fonction f vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$.
Ayant admis l'existence d'une telle fonction (voir page 117), nous avons prouvé l'unicité.
Dans cet exercice, on se propose de prouver l'existence.

PARTIE A

Soit x un réel et n_0 un entier naturel tel que $n_0 > |x|$.
On définit à partir du rang n_0, les suites $(u_n(x))$ et $(v_n(x))$ telles que :

$$u_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \text{ et } v_n(x) = \left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n} = \frac{1}{u_n(-x)}$$

1) Démontrer de deux façons différentes que, pour tout entier naturel n et tout réel a supérieur à -1 :

$$(1+a)^n \geqslant 1+na \quad \textbf{Inégalité de Bernoulli}$$

2) a) En remarquant que :

$$\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \left(1+\frac{x}{n}\right)\left(\frac{1+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1}.$$

et en transformant le facteur de droite afin d'appliquer l'inégalité de Bernoulli, démontrer que, pour tout n supérieur ou égal à n_0 :

$$u_n(x) \leqslant u_{n+1}(x).$$

b) En déduire que la suite $(u_n(x))_{n\geqslant n_0}$ est croissante puis que la suite $(v_n(x))_{n\geqslant n_0}$ est décroissante.

c) Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à n_0, on a les deux encadrements :

- $1 - \dfrac{x^2}{n} \leqslant u_n(x)u_n(-x) \leqslant 1$;
- $0 \leqslant v_n(x) - u_n(x) \leqslant \dfrac{x^2}{n}v_n(x)$.

d) Déduire des questions précédentes que les suites $(u_n(x))_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n(x))_{n\geqslant n_0}$ convergent vers la même limite qu'on notera $f(x)$.
Ainsi, on a : $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$.

PARTIE B

1) Soit la fonction $f : x \mapsto f(x)$ définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit x et h deux réels.

a) Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$\left(1+\frac{x+h}{n}\right)^n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1+\frac{h}{n\left(1+\frac{x}{n}\right)}\right)^n.$$

b) En appliquant l'inégalité de Bernoulli, démontrer que, pour tout entier naturel n tel que $n > |x|$ et $x+n > 1$, si $|h| < 1$, alors :

$$f(x+h) > (1+h)f(x).$$

c) En remplaçant h par $-h$ puis x par $x+h$ dans l'inégalité précédente, démontrer que :

$$(1-h)f(x+h) < f(x).$$

d) Déduire des résultats précédents un encadrement pour $h \in]-1\,;\,0[\cup]0\,;\,1[$ du quotient :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

e) En déduire que la fonction f est dérivable en x et déterminer le nombre dérivé de f en x.

2) Démontrer que f vérifie $f' = f$ et $f(0) = 1$.
Conclure.

92 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$.

1) a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b) Établir que, pour tout nombre réel x non nul :

$$f(x) = x\left(1+\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right).$$

En déduire la limite de f en $+\infty$.

2) Justifier que $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\mathrm{e}^x-1}$.
En déduire que f est continue en 0.

3) a) Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x \geqslant x+1$ et que l'égalité n'a lieu que pour $x = 0$.

b) Déterminer $g(x)$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x\,g(x)}{(\mathrm{e}^x-1)^2}.$$

c) Donner le tableau des variations de f.

4) Soient x un nombre réel non nul et les points $M(x\,;\,f(x))$ et $M'(-x\,;\,f(-x))$ de la courbe $\mathscr{C}$.

a) Établir que $f(-x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x-1}$, puis déterminer le coefficient directeur de la droite (MM').

b) On admet que la fonction f est dérivable en 0.
Que suggère alors le résultat précédent ?

Je teste mes connaissances

À la fin de ce chapitre, je dois être capable de :

Démontrer que :

- une fonction f telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$ est unique
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$

Transformer une écriture en utilisant :

- la relation fonctionnelle et d'autres propriétés

Résoudre :

- une équation ou une inéquation à base d'exponentielles

Faire le lien entre :

- le nombre dérivé de $x \mapsto \mathrm{e}^x$ en 0 et $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^h - 1}{h}$

Connaître et exploiter :

- la stricte croissance et la courbe d'exponentielle
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x\,\mathrm{e}^x = 0$

Étudier des fonctions de type e^u :

- notamment avec $u(x) = -kx$ ou $u(x) = -kx^2$ $(k > 0)$

QCM d'auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

Pour chaque question, plusieurs réponses sont proposées. Déterminer celles qui sont correctes.

93 L'ensemble des solutions de l'équation $\mathrm{e}^x = 0$ est :

(a) $\{0\}$ (b) $-\infty$ (c) $\{1\}$ (d) $\varnothing$

94 La courbe représentative de la fonction exponentielle admet :

(a) une tangente horizontale
(b) une asymptote horizontale
(c) une tangente d'équation $y = x$
(d) une asymptote verticale

95 Soit la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$. Alors, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

(a) $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$ (b) $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}$ (c) $f'(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$ (d) $f'(x) = -\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$

96 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'expression $1 - \dfrac{\mathrm{e}^{-x} - 1}{\mathrm{e}^{-x} + 1}$ est égale à :

(a) $\dfrac{2}{\mathrm{e}^{-x} + 1}$ (b) $\dfrac{2\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$ (c) 2 (d) $\dfrac{2\,\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x} + 1}$

97 L'équation $\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e} = 0$:

(a) a pour solution $\dfrac{1}{2}$ (b) n'a pas de solution (c) équivaut à $\mathrm{e}^{1-2x} = 1$ (d) équivaut à $\mathrm{e}^x = \sqrt{\mathrm{e}}$

98 L'ensemble des solutions de l'inéquation $(\mathrm{e}^x - 1)(1 - x) \geqslant 0$ est :

(a) $]-\infty\,;\,1]$ (b) $[0\,;\,1]$ (c) $[0\,;\,+\infty[$ (d) $]-1\,;\,0] \cup [1\,;\,+\infty[$

99 Soit la fonction $f : x \mapsto x\,\mathrm{e}^{2x} - 1$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors, $f'(x)$ est égal à :

(a) e^{2x} (b) $2\,\mathrm{e}^{2x}$ (c) $(1 - 2x)\,\mathrm{e}^{2x}$ (d) $(2x + 1)\,\mathrm{e}^{2x}$

100 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x(x - 1) + x^2$.

(a) f est positive sur $]0\,;\,+\infty[$
(b) f est négative sur $]0\,;\,1[$
(c) f est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$
(d) f admet un minimum en 0

101 Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = -f$ et $f(0) = 1$. Il est possible que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

(a) $f(x) = 0$ (b) $f(x) = \mathrm{e}^x$ (c) $f(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$ (d) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$

102 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$.

(a) Il existe un réel x tel que $f(x) \geqslant 2$

(b) Pour tout réel x, $f(x) \geqslant 2$

(c) Il existe un réel x tel que $f(x) < 2$

(d) Pour tout réel x, $f(x) < 2$

103 Soit a et b deux réels.

(a) Pour tous réels a et b, $\mathrm{e}^{a+b} = \sqrt{\mathrm{e}^{2a}\,\mathrm{e}^{2b}}$

(b) Pour tous réels a et b, $2\,\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^{2a} + \mathrm{e}^{2b}$

(c) Il existe deux réels a et b tels $2\,\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^{2a} + \mathrm{e}^{2b}$

(d) Il existe deux réels a et b tels $2\,\mathrm{e}^{a+b} > \mathrm{e}^{2a} + \mathrm{e}^{2b}$

104 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$.

(a) Pour tout réel x, $f(x)f(-x) \leqslant 0$

(b) Pour tout réel x, $f(x) \leqslant 1$

(c) Pour tout réel x, $f'(x) + f(x) = \mathrm{e}^{-x}$

(d) f vérifie $f' + f = 0$

105 Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \mathrm{e}^{-x} - x + 4$ représenté par $\mathscr{C}$ dans un repère.

(a) h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = \mathrm{e}^{-x} - 1$

(b) h admet un minimum

(c) $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale

(d) L'équation $h(x) = 5$ a une unique solution

106 Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x - 2$. On pose $X = \mathrm{e}^x$.

(a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow (\mathrm{e}^x + 2)(\mathrm{e}^x - 1) = 0$

(b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow X^2 + X - 2 = 0$

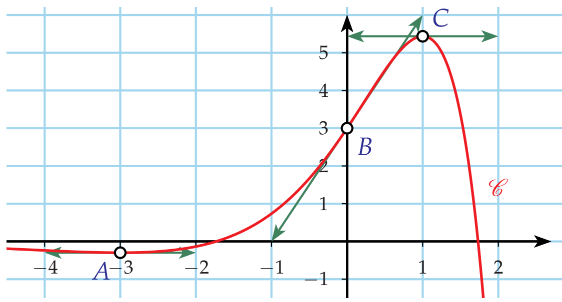
(c) $f(x) = 0$ pour $x = 1$

(d) 0 a deux antécédents par f

Soit la fonction définie sur $]-\infty\,;\,2]$ par :

$$f(x) = (k - x^2)\,\mathrm{e}^x \text{ avec } k \text{ réel.}$$

Dans le repère ci-contre, on a tracé sa courbe représentative $\mathscr{C}$ ainsi que trois tangentes à $\mathscr{C}$ aux points A, B et C.



107 Quelle est la valeur de k ?

(a) $k = -3$ (b) $k = -\mathrm{e}$ (c) $k = \mathrm{e}$ (d) $k = 3$

108 Les images par f et par f' sont-elles exactes ?

(a) $f'(-3) = 0$ (b) $f'(0) = \dfrac{1}{3}$ (c) $f\left(-\sqrt{3}\right) = 0$ (d) $f(1) = 2\,\mathrm{e}$

109 La droite d'équation :

(a) $3x - y + 3 = 0$ est tangente à $\mathscr{C}$ en B

(b) $y = 2\,\mathrm{e}$ est tangente à $\mathscr{C}$ en C

(c) $y = 0$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$

(d) $x = 2$ est asymptote à $\mathscr{C}$

TP 1 Datation au carbone 14

ALGO INFO

Nous allons étudier l'évolution dans le temps de deux échantillons de matières radioactives. Pour cela, on considère le nombre de désintégrations par unité de temps noté A_t et appelé **activité**. Elle s'exprime en Becquerel (de symbole Bq).

Le **radiocarbone** ou **carbone 14** (de symbole ^{14}C) est un isotope du carbone qui a été découvert en 1940 par Martin Kamen et Samuel Ruben. Mais c'est Willard Frank Libby, en 1946, qui établit les bases théoriques et pratiques de la radiochronologie.

Lorsque les neutrons cosmiques rencontrent l'azote présent dans l'air, une réaction se produit : $^{1}_{0}\mathrm{n} + ^{14}_{7}\mathrm{N} \to ^{14}_{6}\mathrm{C} + ^{1}_{1}\mathrm{H}$.

Puis, ^{14}C réagit avec l'oxygène pour produire du gaz carbonique qui se disperse dans l'atmosphère et, est en partie absorbé par les végétaux lors de la photosynthèse. Enfin, la chaîne alimentaire propage ^{14}C dans toute la biosphère.

Dans tout organisme vivant, le rapport $^{14}C/C$ est constant[2]. Mais, une fois mort, le nombre de noyaux de ^{14}C diminue suivant le processus de décroissance radioactive tel qu'au bout d'une durée caractéristique appelée **demi-vie**, il n'en reste que la moitié.

Soit N_t le nombre d'atomes de ^{14}C restants à l'instant t exprimé en années. Ainsi :

$$N_t = N_0\,\mathrm{e}^{-0{,}000\,123\,8t}.$$

1) Déterminer le pourcentage d'atomes de ^{14}C perdus au bout de 2 000 ans.

2) À l'aide du logiciel AlgoBox, réaliser un algorithme qui calcule la demi-vie de ^{14}C.

3) a) À l'aide d'un tableur, réaliser un tableau composé de deux colonnes :
- Dans la première colonne, inscrire les valeurs de t de 0 jusqu'à 4 000 avec un pas de 10.
- Dans la deuxième colonne, entrer une formule qui calcule le pourcentage d'atomes restant à l'instant t.

b) Dans une grotte, on a trouvé puis analysé des fragments d'os qui ne contiennent plus que 70 % de leur teneur en carbone.
À l'aide de la question précédente, déterminer l'âge de ces os à 10 ans près.

c) En juillet 2015, dans une grotte voisine de la première, on a retrouvé des fragments de bois qui, après analyse, a perdu 40 % de sa teneur en carbone.
Déterminer, à 10 ans près, l'année de coupe de ce bois.

4) On estime que, pour un organisme mort il y a plus de 35 000 ans, la plus grande partie des noyaux de ^{14}C ont été désintégrés et que le comptage ne peut donc plus se pratiquer.
Contrôler cette affirmation par un calcul.

2. En première approximation, ayant été prouvé que le bombardement de neutrons cosmiques a fluctué par le passé et que le bombardement nucléaire au XXe siècle entraînera des résultats aberrants chez les archéologues du futur !

TP 2 Scintigraphie osseuse

INFO

Lors d'une **scintigraphie osseuse**, un produit légèrement radioactif est injecté à un patient. Ce produit se fixe alors sur les zones à haute activité métabolique osseuse et un scintillomètre enregistre son activité. On peut ainsi diagnostiquer et suivre les cancers de l'os.

À l'instant $t = 0$, on injecte à un patient une dose de méthylène diphosphonate (MDP) étroitement couplée à un isotope, émetteur de rayon gamma, le technétium 99 (de symbole ^{99}Tc), ayant une activité de 555 mégabecquerels (MBq). La réalisation des clichés scintigraphiques débute deux heures après l'injection, le temps que ^{99}Tc soit fixé.

On note $f(t)$ l'activité, en MBq de l'isotope au cours du temps t exprimé en heures.

La fonction f est solution d'une équation différentielle du type $f' = -\lambda f$ où λ est la constante de désintégration du ^{99}Tc. On a alors :

$$f(t) = f(0)\,\mathrm{e}^{-\lambda t} \text{ et } f(0) = 1{,}7 \times 10^{13} \text{ et } f(1) = 1{,}51457 \times 10^{13}.$$

1) À l'aide d'un logiciel de calcul formel, déterminer une valeur approchée à 10^{-5} près de λ.

2) Modifier l'algorithme conçu au **2** du TP1 afin de déterminer la demi-vie du ^{99}Tc.

3) Que peut-on supposer concernant la préparation de cet isotope avant une scintigraphie ?

4) Que peut-on en déduire concernant l'exposition du patient aux radiations ?

5) À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, tracer la courbe représentative de f.

6) On suppose que l'examen a débuté à 14 h. Déterminer à l'aide du graphique précédent :
- l'heure à partir de laquelle l'activité du ^{99}Tc n'est plus que de 63 % de l'activité initiale ;
- le pourcentage de ^{99}Tc présent chez le patient au bout de 24 h.

TP 3 Approximations polynomiales

INFO ALGO

On sait que $g_1(x) = x + 1$ est la meilleure approximation affine de la fonction exponentielle au voisinage de 0. On dit aussi que c'est une **approximation polynomiale d'ordre 1**.

Le but de ce TP est de chercher des approximations polynomiales d'ordre $n \geqslant 2$, c'est-à-dire des polynômes $g_n(x)$ de degré n qui approchent au mieux e^x au voisinage de 0. À la fin, nous nous en servirons pour encadrer précisément le nombre d'Euler e.

A Approximation polynomiale d'ordre 2

Soit $f(x) = \mathrm{e}^x$ et $g_2(x) = ax^2 + bx + c$.

1) Étant donné que $f(0) = f'(0) = f''(0) = 1$, considérer qu'il en va de même pour g_2 et déterminer les réels a, b et c.

2) On souhaite conjecturer que $g_2(x)$ est le polynôme de degré 2 qui approche le mieux $f(x)$ au voisinage de 0.

a) À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, tracer la courbe représentative de f.

b) Créer un curseur h variant de 0 à 1 avec un pas de 0,1.

c) Créer les points $I(0\,;\,1)$, $A(-h\,;\,f(-h))$ et $B(h\,;\,f(h))$.

d) Appliquer un **ajustement polynomial** aux points I, A et B pour obtenir un polynôme de degré 2 dont la courbe représentative passe au mieux par ces trois points.

e) Réduire le curseur h et éventuellement aussi son pas pour améliorer la précision.

f) Le polynôme d'ajustement fourni correspond-il à celui trouver à la question **1** ?

B Approximation polynomiale d'ordre 3

INFO

Soit $f(x) = \mathrm{e}^x$ et $g_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

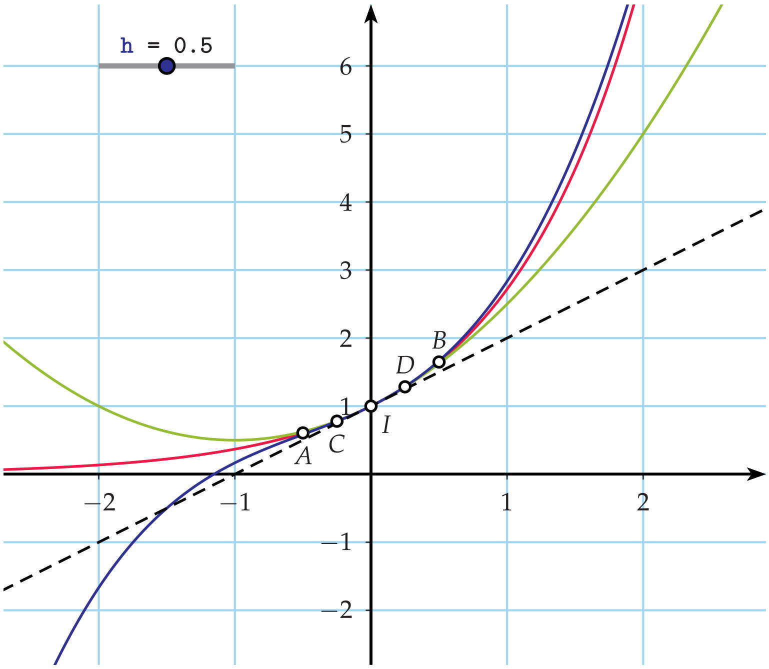
1) Adopter la même considération que précédemment et déterminer les réels a, b, c et d.

2) Pour conjecturer que $g_3(x)$ est le polynôme de degré 3 qui approche le mieux $f(x)$ au voisinage de 0, on va le comparer à un ajustement polynomial de degré 3 obtenu avec 5 points.

a) Créer les points C et D sur la courbe représentative de f d'abscisses respectives $-\dfrac{h}{2}$ et $\dfrac{h}{2}$.

b) Appliquer un ajustement polynomial aux points I, A, B, C, D et pour un degré égal à 3.

c) Réduire le curseur h et vérifier le résultat précédent.



C Généralisation

> La factorielle d'un entier naturel n est le produit des nombres entiers strictement positifs, inférieurs ou égaux à n. Cette opération est notée avec un point d'exclamation :
> $$n! = \prod_{1 \leqslant k \leqslant n} k = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n.$$
> ce qui se lit soit « factorielle de n », soit « factorielle n » soit « n factorielle ».
> Cette notation a été introduite en 1808 par Christian Kramp.

Soit la fonction g_n définie par :

$$g_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

1) À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique :

- créer un curseur n entier variant de 0 à 10 ;
- créer une liste de terme général $\dfrac{x^k}{k!}$ pour k variant de 0 à n ;
- représenter graphiquement la somme des termes de cette liste.

Que représente-t-on ainsi sur le graphique ?

2) Faire varier n. Que peut-on conjecturer ?

3) Reproduire la procédure précédente avec la fonction $h_n(x) = g_n(x) + \dfrac{x^n}{n!}$.
Que pouvez-vous conjecturer ?

4) Dans cette question, on va démontrer la conjecture précédente pour le cas $x = 1$.
Soit un entier naturel $n \geqslant 2$ et deux fonctions a et b définies sur $[0\,;\,1]$ par :

$$a(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) \quad \text{et} \quad b(x) = a(x) + \mathrm{e}^{-x}\frac{x^n}{n!}.$$

a) Déterminer le sens de variation de a. En déduire que $a(1) < 1$.

b) Déterminer le sens de variation de b. En déduire que $b(1) > 1$.

c) En vous aidant des deux questions précédentes, démontrer l'encadrement suivant :

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} < \mathrm{e} < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!}.$$

d) Écrire un algorithme qui demande n en entrée et renvoie un encadrement de e.
Le programmer sous AlgoBox et le faire tourner pour $n = 7$.

Récréation, énigmes

Encore lui, encore e

En Terminale S, on découvre la fonction exponentielle ($x \mapsto \mathrm{e}^x$) avant la fonction logarithme népérien ($x \mapsto \ln x$) mais, historiquement, ce fut l'inverse. D'ailleurs, c'est en voulant inverser $\ln(b) = 1$, qu'Euler donne naissance à e en 1728 qu'il définit comme le nombre dont le logarithme est l'unité et qui se sert des tables de l'éditeur hollandais Adriaan Vlacq pour l'évaluer à $2{,}718\,281\,7$.
e apparaît officiellement pour la première fois en 1736 et entre définitivement dans le corpus mathématique en 1748, dans l'œuvre maîtresse d'Euler : *Introductio in analysin infinitorum*.

$$\mathrm{e} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{\cdots}}}}}}}}}$$

1) En 1737, Euler développa e en fractions continues (voir ci-dessus à droite).
Cette présentation n'étant pas commode, on liste seulement le premier terme de chaque étage :

$$\mathrm{e} = [2, \overbrace{1,2,1}, \overbrace{1,4,1}, \cdots, \overbrace{1,2k,1}, \cdots] = [2, \overline{1,2k,1}] \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Ceci a l'avantage de montrer la régularité du développement.

a) Vérifier qu'on obtient une valeur approchée de e d'autant plus précise qu'on « descend » les étages.

b) Écrire un algorithme qui calcule e avec ce développement à 10^{-7} près.
En combien d'étapes (tours de boucle) y parvient-il ?

2) Le nombre d'Euler peut être aussi définie par la série :

$$\mathrm{e} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{1\times 2\times 3} + \frac{1}{1\times 2\times 3\times 4} + \cdots$$

où $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)$.

Écrire un algorithme qui calcule e à 10^{-7} près avec cette série.
Fait-il mieux que l'algorithme précédent ?

ANALYSE

5

Logarithme népérien

Connaissances nécessaires à ce chapitre

- Connaître l'allure de la courbe de la fonction exponentielle
- Connaître les propriétés algébriques de la fonction exponentielle
- Résoudre des équations ou inéquations avec des exponentielles
- Savoir dériver les fonctions de référence et savoir utiliser les opérations sur les dérivées
- Savoir étudier des limites de fonctions à l'aide de règles opératoires ou par des théorèmes de comparaison
- Savoir utiliser le théorème des valeurs intermédiaires

Auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

1 Simplifier au maximum :

1) $e^2 \times e^5$

2) $e^{-4} \times e^3$

3) $\left(e^{-2}\right)^4 \times e^5$

4) $\dfrac{e^5}{e^{-1} \times e^4}$

2 Résoudre les équations suivantes :

1) $e^{x-2} = e^{6-x}$

2) $e^{3-x} = 1$

3) $e^x - e^{-x} = 0$

3 Dans chacun des cas suivants, calculer $f'(x)$ sur l'intervalle I.

1) $f(x) = e^{3x-7}$ sur $I = \mathbb{R}$

2) $f(x) = (1+x)e^{-x}$ sur $I = \mathbb{R}$

3) $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$ sur $I =]0; +\infty[$

4 Déterminer les limites suivantes.

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{1-2x}$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x+1}$

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{2x}+1}{e^x}$

5 Montrer que l'équation $e^{3x} - 6 = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ et en donner un encadrement d'amplitude 10^{-2}.

6 Déterminer une équation de chacune des tangentes à la courbe de la fonction exponentielle aux points d'abscisses 0 et 1.

7 Résoudre les inéquations suivantes :

1) $e^x < 1$

2) $e^{-x} > e$

3) $e^{2x} \geqslant e^{1-x}$

4) $e^{x-4} \leqslant \dfrac{1}{e^x}$

8 Étudier le signe des expressions suivantes selon les valeurs de x.

1) $A(x) = e^{-x}(1 - e^x)$

2) $B(x) = (e^x - 1)(2 - x)$

3) $C(x) = e^x - e^{-x}$

Voir solutions p. 419

DÉBAT 1 Qui est John Napier ?

Par petits groupes, trouver des informations sur John Napier.

1) Rédiger une biographie en cinq lignes.

2) En une dizaine de lignes, dégager ses principales contributions aux mathématiques.

ACTIVITÉ 2 Fini les calculs fastidieux

Les logarithmes népériens ont été mis en évidence par l'Écossais John Napier (1550 - 1617) dit Neper. Afin de faciliter le travail des astronomes, navigateurs de l'époque qui étaient confrontés à des calculs fastidieux, Neper établit une table à deux colonnes, appelée table de logarithmes.

Son principe est le suivant :
À la multiplication de deux nombres a et b de la première colonne correspond l'addition de deux nombres x et y de la seconde colonne.

a	x
b	y
ab	$x+y$

2^{-5}	
0,1	
0,5	
1	
2	0,6931
3	1,0986
4	1,3863
5	1,6094
6	1,7918
7	1,9459
8	2,0794
9	2,1972
10	
12	2,4849
13	
14	
15	2,7081
16	
39	3,6636
94	4,5433
3665	8,2066
3666	8,2069
3667	8,2071
2^{12}	

On donne ci-contre un extrait d'une table de logarithmes (les nombres de la colonne de droite sont des valeurs arrondies à 10^{-4} près).

1) **a)** Vérifier sur deux exemples que cette table vérifie bien le principe énoncé ci-dessus.

b) Quel nombre doit-on écrire en face de 10 ? de 14 ? de 16 ?

c) Quel nombre doit-on écrire en face de 1 ?

d) Sans poser de multiplication, utiliser la table pour obtenir 39×94.

2) **a)** Quand on calcule le quotient de deux nombres de la colonne de gauche, à quelle opération cela correspond-il pour ceux de la colonne de droite ?

b) En déduire les nombres à inscrire en face de 13 ; $0,5$ et $0,1$.

3) Dans la colonne de gauche, $0,5$; 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 sont en progression géométrique de raison 2. Quelle progression observe-t-on pour les nombres correspondants dans la colonne de droite ?

4) En déduire les nombres à inscrire en face de 2^{-5} et 2^{12}.

Étymologie : Le mot « **logarithme** » a été inventé pour nommer les nombres de la colonne de droite. Ce mot est formé à partir des deux mots grecs *logos* (qui signifie mettre en rapport) et *arithmos* (qui signifie nombre). En effet, on a pu observer dans cette activité, que lorsque des nombres de gauche sont dans un rapport constant, ceux de la colonne de droite sont à différence constante.

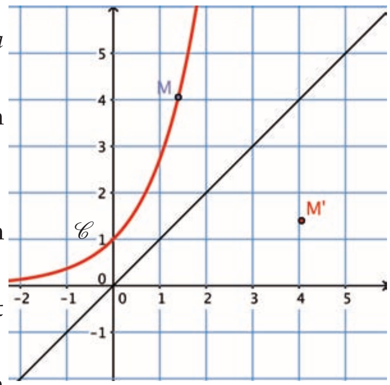
ACTIVITÉ 3 D'une fonction à une autre

INFO

Le plan est muni d'un repère orthonomé.

Partie A : Construction de la courbe de la fonction logarithme népérien

1) À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, tracer la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction exponentielle. Placer un point M sur $\mathscr{C}$.



2) **a)** On note a, l'abscisse de M (avec $a > 0$). Justifier que l'équation $e^x = a$ admet une unique solution b dans $]0\,;+\infty[$.

Le nombre b ainsi associé à a est appelé **logarithme népérien** de a, on le note $\ln(a)$.

b) Donner les valeurs de $\ln(1)$ et $\ln(e)$.

3) Construire le symétrique M' de M par rapport à la droite d'équation $y = x$. Activer la trace de M'. Déplacer M.

4) Afficher enfin la courbe $\mathscr{C}'$ représentative de la fonction ln, en saisissant l'équation $y = \ln(x)$.

L'ensemble des points M' constituent la courbe représentative de la **fonction logarithme népérien**, dite fonction réciproque de la fonction exponentielle.

Partie B : Conjectures

1) Conjecturer les limites, le sens de variation et le signe de la fonction ln.

2) **a)** Afficher la tangente au point M' à la courbe $\mathscr{C}'$. Lire son coefficient directeur. Recommencer après avoir déplacé M'.

b) Quel lien semble-t-il y avoir entre ce coefficient directeur et l'abscisse de M' ?

c) Quelle conjecture peut-on émettre sur la dérivée de la fonction ln ?

ACTIVITÉ 4 Tremblement

Partie A : Logarithme décimal

On développe ici que la fonction logarithme népérien n'est pas la seule fonction à « transformer les produits en sommes ». Soit k un réel non nul. On considère la fonction f_k définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f_k(x) = \dfrac{\ln x}{k}$.

1) Montrer que pour tous les réels $a > 0$ et $b > 0$, $f_k(ab) = f_k(a) + f_k(b)$.

2) Lorsque $k = \ln 10$, on note log la fonction f_k obtenue. Ainsi, pour tout $x > 0$, on a :

$$\log(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}.$$

Cette fonction s'appelle la **fonction logarithme décimal**.

3) Montrer que pour tout entier relatif n, $\log(10^n) = n$.

Partie B : Sismologie

La magnitude d'un séisme sur l'échelle de Richter est donnée par la formule :

$M = \log\left(\dfrac{A}{A_0}\right)$ où A est l'amplitude maximale mesurée par le sismographe et A_0 une amplitude de référence.

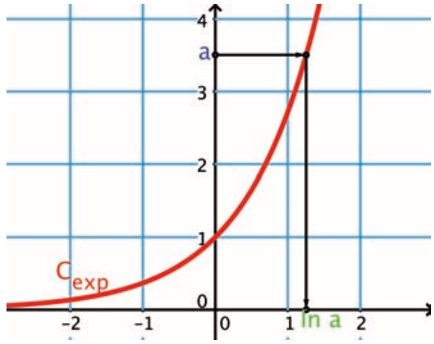
1) Quelle a été la magnitude du séisme de 2015 à Katmandou (Népal) dont l'amplitude a été $A = 6 \times 10^7 \times A_0$? Arrondir à 0,1 près.

2) Le séisme de 1960 à Valdivia (Chili) fut d'une magnitude de 9,5. Calculer l'amplitude de ce séisme en fonction de A_0.

3) Comparer ces deux séismes.

1. Fonction logarithme népérien

La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$. Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel $a \in]0;+\infty[$, l'équation $e^x = a$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.



DÉFINITION

- On appelle **logarithme népérien** du réel strictement positif a, l'unique solution de l'équation $e^x = a$. Le logarithme népérien de a est noté $\ln(a)$ ou $\ln a$.
- La fonction logarithme népérien, notée ln, est la fonction qui, à tout réel $x > 0$, associe le réel $\ln x$.

Exemple D'après la calculatrice : $\ln(0,8) \approx -0,223$; $\ln(2,5) \approx 0,916$.

CONSÉQUENCE :

- Pour tout réel $a > 0$ et pour tout réel b, on a l'équivalence : $\ln(a) = b \Longleftrightarrow a = e^b$.
- $\ln(1) = 0$ car $e^0 = 1$.
- $\ln(e) = 1$ car $e^1 = e$.

Exemple Résoudre l'équation $e^{3x-1} = 5$.

Pour tout réel x, $e^{3x-1} = 5 \Longleftrightarrow 3x - 1 = \ln 5 \Longleftrightarrow x = \dfrac{\ln 5 + 1}{3}$.

PROPRIÉTÉS : Réciprocité

1) Pour tout réel $x > 0$, $e^{\ln x} = x$.
2) Pour tout réel x , $\ln(e^x) = x$.

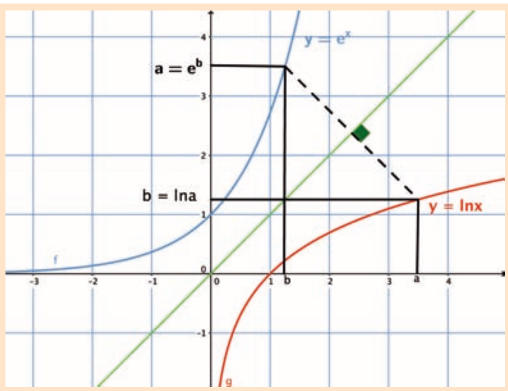
PREUVE

- Pour tout réel $x > 0$, l'équation $e^t = x$, d'inconnue t, a pour solution $t = \ln x$. Donc $e^{\ln x} = x$.
- Pour tout réel x, par définition, $\ln(e^x)$ est l'unique solution de l'équation $e^t = e^x$, d'inconnue t donc $\ln(e^x) = x$.

Exemples $\ln(e^2) = 2$ et $e^{\ln 2} = 2$.

PROPRIÉTÉ : Courbes des fonctions ln et exp

Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions ln et exp sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



PREUVE On note respectivement $\mathscr{C}_{\exp}$ et $\mathscr{C}_{\ln}$ les courbes représentatives des fonctions exp et ln. Pour tous les réels $a > 0$ et $b > 0$,
$M(b\,;a) \in \mathscr{C}_{\exp} \Longleftrightarrow a = e^b \Longleftrightarrow b = \ln a \Longleftrightarrow M'(a\,;b) \in \mathscr{C}_{\ln}$.

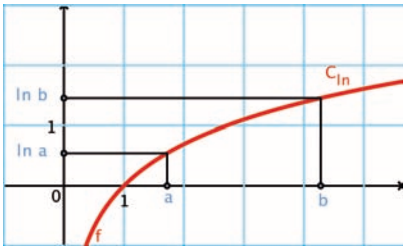
PROPRIÉTÉ : Sens de variation

La fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

PREUVE Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b$. On a : $e^{\ln a} = a$ et $e^{\ln b} = b$.
Donc $e^{\ln a} < e^{\ln b}$. Comme la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que : $\ln a < \ln b$.

CONSÉQUENCE :

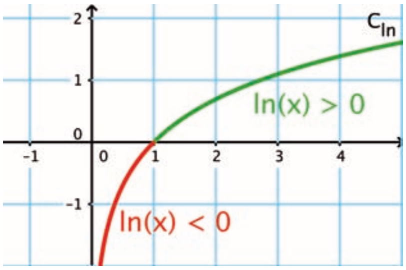
Pour tous les réels $a > 0$ et $b > 0$,
- $\ln a = \ln b \Longleftrightarrow a = b$
- $\ln a < \ln b \Longleftrightarrow a < b$



PREUVE En particulier, pour tout réel $x > 0$, on a :
$\ln x > 0 \Longleftrightarrow \ln x > \ln 1 \Longleftrightarrow x > 1$ et $\ln x < 0 \Longleftrightarrow \ln x < \ln 1 \Longleftrightarrow 0 < x < 1$

CONSÉQUENCE :

- $\ln x > 0 \Longleftrightarrow x > 1$
- $\ln x < 0 \Longleftrightarrow 0 < x < 1$



MÉTHODE 1 Résoudre une équation avec ln

► Ex. 20 p. 158

Pour résoudre une équation du type $\ln(u(x)) = \ln(v(x))$:
- Rechercher l'ensemble E des réels tels que $u(x) > 0$ et $v(x) > 0$;
- Résoudre dans E, l'équation $u(x) = v(x)$.

Exercice d'application

Résoudre l'équation $\ln(x+2) = \ln(3-x)$.

Correction

Conditions d'existence : $x + 2 > 0$ et $3 - x > 0$.
C'est-à-dire : $x > -2$ et $3 > x$. D'où $E =]-2\,;3[$.
Pour tout $x \in E$, $\ln(x+2) = \ln(3-x)$ équivaut à $x + 2 = 3 - x$ c'est-à-dire $2x = 1$ ou encore $x = \dfrac{1}{2}$. Ce nombre appartient bien à E. Donc l'ensemble des solutions est $S = \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

MÉTHODE 2 Résoudre une inéquation avec $\ln$

► Ex. 27 p. 158

Pour résoudre une inéquation du type $\ln(u(x)) < \ln(v(x))$:

- Rechercher l'ensemble E des réels tels que $u(x) > 0$ et $v(x) > 0$;
- Résoudre dans E, l'inéquation $u(x) < v(x)$.

Exercice d'application Résoudre l'inéquation $\ln(x^2+3x) < \ln 18$.

Correction Condition d'existence : $x^2+3x > 0$ soit $x(x+3) > 0$. D'où $E =]-\infty\,;-3[\cup]0\,;+\infty[$.
Pour tout $x \in E$, $\ln(x^2+3x) < \ln 18$ équivaut à $x^2+3x < 18$ ou encore $x^2+3x-18 < 0$.
Le trinôme $x^2+3x-18$ a pour discriminant $\Delta = 81$ et pour racines -6 et 3.
Donc $x^2+3x-18 < 0 \Longleftrightarrow x \in]-6\,;3[$. En tenant compte du fait que x appartient à E, on a finalement, $S =]-6\,;-3[\cup]0\,;3[$.

2. Propriétés algébriques

PROPRIÉTÉ : Relation fonctionnelle

Pour tous les réels a et b strictement positifs, $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

PREUVE Pour tous les réels $a > 0$ et $b > 0$, $e^{\ln(ab)} = ab = e^{\ln(a)} \times e^{\ln(b)} = e^{\ln(a)+\ln(b)}$. Ainsi, $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

Remarque : On dit que la fonction ln transforme les produits en sommes. Cette formule se généralise à un produit de trois facteurs ou plus.

PROPRIÉTÉS : Logarithme d'un inverse, d'un quotient

Pour tous les réels a et b strictement positifs,

1) $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a)$

2) $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

PREUVE Voir exercice 94 p. 171 pour une démonstration de cette propriété.

PROPRIÉTÉS : Logarithme d'une puissance, d'une racine carrée

Pour tout réel $a > 0$ et pour tout entier relatif n,

1) $\ln(a^n) = n\ln a$

2) $\ln(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2}\ln a$

PREUVE

- $e^{\ln(a^n)} = a^n$ et $e^{n\ln a} = \left(e^{\ln a}\right)^n = a^n$ ainsi $e^{\ln(a^n)} = e^{n\ln a}$ d'où $\ln(a^n) = n\ln a$.
  Voir exercice 95 p. 171 pour une démonstration par récurrence de cette propriété.
- $\ln\left[(\sqrt{a})^2\right] = \ln a$ et $\ln\left[(\sqrt{a})^2\right] = 2\ln\sqrt{a}$ donc $\ln a = 2\ln(\sqrt{a})$ d'où le résultat.

Exemple

Écrire chacun des nombres suivants en fonction de $\ln 2$.

$A = 3\ln 2 + \ln 4$

$B = \ln\left(\sqrt{8}\right)$

$C = \ln 20 - \ln 5$

Correction

$A = 3\ln 2 + \ln 4 = 3\ln 2 + 2\ln 2 = 5\ln 2.$

$B = \ln\left(\sqrt{8}\right) = \frac{1}{2}\ln 8 = \frac{1}{2}\ln(2^3) = \frac{3}{2}\ln 2.$

$C = \ln 20 - \ln 5 = \ln\left(\frac{20}{5}\right) = \ln 4 = 2\ln 2.$

MÉTHODE 3 Résoudre une inéquation avec une inconnue à l'exposant

► Ex. 33 p. 159

Exercice d'application

Résoudre l'inéquation $\left(\frac{1}{3}\right)^n \leqslant 0,01$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Correction

La fonction ln est croissante sur $]0\,;+\infty[$ donc l'inéquation $\left(\frac{1}{3}\right)^n \leqslant 0,01$ est équivalente à $\ln\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n\right] \leqslant \ln 0,01$.

Pour tout $a > 0$, $\ln(a^n) = n\ln a$, donc l'inéquation s'écrit :

$n\ln\left(\frac{1}{3}\right) \leqslant \ln 0,01$. En divisant chaque membre par $\ln\left(\frac{1}{3}\right)$ qui est strictement négatif, le sens de l'inégalité change.

$n \geqslant \dfrac{\ln 0,01}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}$, or $\dfrac{\ln 0,01}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)} \approx 4,19$. L'ensemble solution est constitué de tous les entiers $n \geqslant 5$.

3. Étude de la fonction logarithme népérien

PROPRIÉTÉ : Dérivée de la fonction ln

La fonction ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout réel $x > 0$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

PREUVE

On admet que la fonction ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$. Pour tout réel $x > 0$, on pose $f(x) = \mathrm{e}^{\ln x}$. La fonction ln étant dérivable sur $]0\,;+\infty[$, f est aussi dérivable sur $]0\,;+\infty[$. Pour tout réel $x > 0$, calculons $f'(x)$ de deux manières :

$f'(x) = \ln'(x) \times \mathrm{e}^{\ln(x)} = x\ln'(x)$ et on a aussi $f(x) = x$ donc $f'(x) = 1$. On en déduit que pour tout réel $x > 0$, $x\ln'(x) = 1$, par suite $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

PROPRIÉTÉ : Limites aux bornes

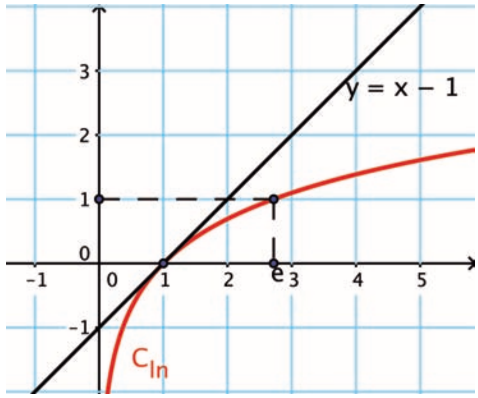
$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$

PREUVE

- Pour tout réel $A > 0$,
  $\ln x > A \Longleftrightarrow x > \mathrm{e}^A$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$.
- Pour tout réel $x > 0$, on pose $X = \dfrac{1}{x}$. On a $x = \dfrac{1}{X}$ donc $\ln x = \ln \dfrac{1}{X} = -\ln X$
  $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} X = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} (-\ln X) = -\infty$ donc par limite d'une composée $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \ln(x) = -\infty$.

On peut alors dresser le tableau de variation de la fonction ln et représenter sa courbe.

x	0	$+\infty$
ln	$-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$



Remarque : Une équation de la tangente à la courbe de la fonction ln en 1 est :
$y = \ln'(1)(x-1) + \ln 1$ soit $y = x - 1$.

4. Autres limites

PROPRIÉTÉ : Croissance comparée

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$.

PREUVE

- Pour tout réel $x > 0$, on effectue le changement de variable : $X = \ln x$, on a alors $x = \mathrm{e}^X$.
  Ainsi $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{X}{\mathrm{e}^X} = \dfrac{1}{\frac{\mathrm{e}^X}{X}}$. Or $\lim\limits_{x \to +\infty} X = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^X}{X} = +\infty$ donc par limite d'un quotient $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{1}{\frac{\mathrm{e}^X}{X}} = 0$. Enfin, par limite d'une composée, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.
- Pour tout réel $x > 0$, on pose $X = \ln x$, on a alors $x \ln x = \mathrm{e}^X \times X$.
  On a $\lim\limits_{x \to 0} X = \lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$ et par propriété, $\lim\limits_{X \to -\infty} X\mathrm{e}^X = 0$, donc par limite d'une composée, $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$.

PROPRIÉTÉ : Limite et taux d'accroissement

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$.

PREUVE La fonction ln est dérivable en 1 donc, par définition,
$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\ln(1+h) - \ln 1}{h} = \ln'(1)$. Or $\ln 1 = 0$ et $\ln'(1) = \dfrac{1}{1} = 1$, on obtient donc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$.

MÉTHODE 4 Lever une indétermination pour étudier une limite

► Ex. 35 p. 159

Dans le cas d'une forme indéterminée qui fait intervenir la fonction ln, on peut :

- factoriser et faire apparaître des limites déjà connues ;
- effectuer un changement de variable.

Exercice d'application Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x - 2x)$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$

Correction

1) Pour tout réel $x > 0$, $\ln x - 2x = x\left(\dfrac{\ln x}{x} - 2\right)$. Par propriété, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\ln x}{x} - 2\right) = -2$. Donc par limite d'un produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\dfrac{\ln x}{x} - 2\right) = -\infty$.
Ainsi, $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x - 2x) = -\infty$.

2) Pour tout réel $x > 0$, on pose $X = \dfrac{1}{x}$, on a alors $x \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\ln(1+X)}{X}$.
On a $\lim\limits_{x \to +\infty} X = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et par propriété, $\lim\limits_{X \to 0} \dfrac{\ln(1+X)}{X} = 1$ donc par limite d'une composée, $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = 1$.

5. Fonction $\ln(u)$

NOTATION : u est une fonction strictement positive sur un intervalle I.
La fonction $x \mapsto \ln(u(x))$ est notée $\ln(u)$ ou $\ln u$.

PROPRIÉTÉ : Dérivée de $\ln u$

Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I, alors la fonction $\ln u$ est dérivable sur I, et $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.

CONSÉQUENCE : u étant strictement positive, $(\ln u)'$ et u' sont de même signe. On en déduit que les fonctions u et $\ln u$ ont le même sens de variation sur I.

MÉTHODE 5 Calculer la dérivée d'une fonction du type $\ln u$

► Ex. 52 p. 161

Pour dériver une fonction du type $\ln u$ sur un intervalle I, on s'assure que la fonction u est dérivable et strictement positive sur l'intervalle I.

Exercice d'application

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2 + 3)$. Calculer $f'(x)$.

Correction Posons $u(x) = x^2 + 3$. u est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 2x$.
Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{2x}{x^2+3}$.

MÉTHODE 6 Étudier les limites d'une fonction du type $\ln u$

► Ex. 54 p. 161

Pour étudier les limites d'une fonction du type $\ln u$, on peut :

- utiliser le théorème sur la limite d'une composée ;
- utiliser les théorèmes de comparaison.

Exercice d'application

f est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+2}{x^2}\right)$. Étudier les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

Correction

- Pour tout $x > 0$, $\dfrac{x+2}{x^2} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2}$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x^2} = 0$ donc par limite d'une somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+2}{x^2} = 0$.
  De plus, $\lim\limits_{X\to 0} \ln X = -\infty$ donc par limite d'une composée, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
- Pour tout $x > 0$, $\dfrac{x+2}{x^2} > \dfrac{x}{x^2}$ donc $\dfrac{x+2}{x^2} > \dfrac{1}{x}$ or la fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ donc $f(x) > \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ou encore $f(x) > -\ln x$.
  De plus, $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0}(-\ln x) = +\infty$ donc par comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

6. Fonction logarithme décimal

DÉFINITION

La fonction **logarithme décimal**, notée log, est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$, par :

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}.$$

PROPRIÉTÉS

1) Pour tout entier relatif n, $\log(10^n) = n$.
2) La fonction log est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.
3) Pour tous les réels $a > 0$ et $b > 0$,

$$\log(ab) = \log a + \log b \text{ et } \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b.$$

PREUVE Voir exercice 74 p. 164 pour une démonstration de ces propriétés.

REMARQUE : Les logarithmes décimaux trouvent toute leur utilité en chimie (calcul de pH), en acoustique (mesure du son), en sismologie (magnitude d'un séisme), en astronomie (magnitude apparente d'un astre)...

Activités mentales

1 Dans chacun des cas, pour quelles valeurs de x, l'expression donnée a-t-elle un sens ?

1) $\ln x$
2) $\ln(3-x)$
3) $\ln(x+2)$
4) $\dfrac{1}{\ln(x^2)}$

2 Simplifier.

1) $e^{\ln 3}$
2) $e^{-\ln 5}$
3) $e^{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}$
4) $\ln(e^5)$
5) $\ln 1 + \ln e$
6) $\ln(e^{-2})$

3 Exprimer chacun des nombres suivants sous la forme $\ln c$ où c est un réel strictement positif.

1) $A = \ln 7 + \ln 8$
2) $B = \ln 20 - \ln 4$
3) $C = -\ln 4 + \ln 28$
4) $D = 3\ln 2$
5) $E = -2\ln 4$

4 Dans chacun des cas, comparer les réels A et B.

1) $A = \ln 2 + \ln 5$ et $B = \ln 9$
2) $A = \ln 4$ et $B = \ln 6 - \ln 2$
3) $A = 3\ln 2$ et $B = 2\ln 3$
4) $A = \ln 25$ et $B = 2\ln 5$

5 Résoudre les équations suivantes.

1) $e^x = 2$
2) $e^x = -5$
3) $e^x = \dfrac{1}{4}$

6 Résoudre les équations suivantes.

1) $\ln x = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$
2) $\ln x = \dfrac{\ln 5}{2}$
3) $\ln x = -\ln 9$

7 Résoudre les équations suivantes.

1) $(\ln x - 2)(1 + \ln x) = 0$
2) $(e^x - 3)(e^x + 5) = 0$
3) $(\ln x)(6 - 3\ln x) = 0$

8 Résoudre les inéquations suivantes.

1) $\ln(x) \geqslant 1$
2) $\ln(x) > -2$
3) $\ln(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$
4) $\ln(x) < 3$

Fonction ln

9 Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \ln x$. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.
Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? (justifier)

1) 0 a un seul antécédent par f.
2) L'image de 1 par f est e.
3) L'axe des abscisses est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.
4) L'axe des ordonnées est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.
5) Il n'existe aucun réel x tel que $\ln x > 100$.

10 Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \ln x$. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.

1) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ en en 1.
2) À l'aide d'une calculatrice, conjecturer la position relative de $\mathscr{C}$ et T.
3) Pour tout réel $x > 0$, on pose $d(x) = \ln x - x + 1$.
   a) Dresser le tableau de variation de la fonction d.
   b) En déduire le signe de $d(x)$ en fonction de x.
   c) Démontrer la conjecture établie au 2.

Propriétés algébriques

11 Calculer les nombres réels suivants.

1) $\ln(0,5) + \ln 2$
2) $3\ln 2 - \ln 4$
3) $(\ln(e^3))^2$
4) $e^{\ln 2 + \ln 3}$

12 Exprimer les nombres suivants sous forme d'un entier ou d'un inverse entier.

1) $A = e^{2\ln 3}$
2) $B = e^{4\ln 2}$
3) $C = e^{-\ln 4}$
4) $D = e^{-5\ln 2}$

13 Simplifier au maximum les expressions suivantes :

1) $A = e^{\ln 6 - 2\ln 3}$
2) $B = e^{3\ln 2 - \ln 4 + 1}$
3) $C = \dfrac{e^{\ln 5 - 1}}{e^{2 + \ln 5}}$
4) $D = \dfrac{e^{2\ln 3 - \ln 2}}{e^{-3\ln 2}}$

14 Exprimer chacun des nombres suivants sous la forme $\ln c$ où c est un réel strictement positif.

1) $A = 2\ln 5 + \ln 3$
2) $B = 3\ln 3 - 2\ln 2$
3) $C = -\ln 5 + 3\ln 2$
4) $D = 3\ln 4 - 3\ln 2$

15 Exprimer chacun des nombres suivants en fonction de $\ln 2$.

1) $\ln 8$
2) $\ln(\sqrt{2})$
3) $\ln\left(\frac{1}{4}\right)$
4) $3\ln 2 - \ln 16$

16 Exprimer chacun des nombres suivants en fonction de $\ln 3$.

1) $\ln\left(\frac{1}{9}\right)$
2) $\ln 24 - \ln 8$
3) $\ln\left(\frac{3}{4}\right) + \ln 4$
4) $2\ln 3 - \ln 27$
5) $\ln\left(9\sqrt{3}\right)$

17 Exprimer chacun des nombres suivants en fonction de $\ln 2$ et $\ln 5$.

1) $\ln 20$
2) $\ln 100$
3) $\ln\left(\frac{4}{25}\right)$
4) $\ln\sqrt{10}$

18 Exprimer chacun des nombres suivants en fonction de $\ln 3$ et $\ln 7$.

1) $\ln\left(\frac{81}{7}\right)$
2) $\ln 441$
3) $\ln\left(\frac{49}{27}\right)$
4) $\ln\sqrt{21}$

19 On donne les encadrements suivants :

$$0,69 < \ln 2 < 0,70 \text{ et } 1,60 < \ln 5 < 1,61.$$

En déduire, sans calculatrice, les encadrements des nombres suivants.

1) $\ln 4$
2) $\ln\left(2^5\right)$
3) $\ln\frac{5}{2}$
4) $\ln\frac{16}{25}$

Équations

20 ► MÉTHODE 1 p. 151

Résoudre les équations suivantes :

1) $\ln x = 2$;
2) $\ln x = -1$;
3) $3\ln x - 9 = 0$.

21 Résoudre les équations suivantes :

1) $\ln(x+5) = \ln 3$;
2) $\ln(x^2) = \ln 9$;
3) $\ln(x^2 + x) = \ln 6$.

22 Résoudre les équations suivantes :

1) $2 + 3\ln x = 14$;
2) $\ln(x^2) = \ln 9$;
3) $e^{2-3x} = 5$;
4) $2e^{2x} - 10 = 0$.

23 INFO

Justifier les résultats suivants obtenus avec le logiciel de calcul formel Xcas.

```
1 resoudre(ln(x+3)=2)
      exp(2)-3
2 resoudre(ln(6-x)=ln(x-2))
      4
3 resoudre(ln(x-2)+ln(x-2)=0)
      3
```

24 Résoudre les équations suivantes :

1) $\ln(2-x) + 1 = 0$;
2) $\ln x + \ln(x-1) = \ln 5$;
3) $\ln(3x) - \ln(1-x) = \ln 2$.

25 Changement de variable

1) Résoudre l'équation $X^2 - 2X - 15 = 0$.
2) En déduire les solutions des équations suivantes :
   a) $e^{2x} - 2e^x - 15 = 0$;
   b) $(\ln x)^2 - 2\ln x - 15 = 0$.

26 Résoudre les équations suivantes :

1) $e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$ (on pourra poser $X = e^x$).
2) $2(\ln x)^2 + 5\ln x - 3 = 0$ (on pourra poser $X = \ln x$).

Inéquations

27 ► MÉTHODE 2 p. 152

Résoudre les inéquations suivantes :

1) $\ln(2-3x) \geqslant 0$;
2) $\ln(1-x) < 1$;
3) $\ln\left(\frac{3}{x}\right) > \ln 3$.

28 Résoudre les inéquations suivantes :

1) $2\ln(x) \geqslant \ln(2-x)$;
2) $\ln(x) + \ln(2x+5) \leqslant \ln 3$;
3) $\ln(4x) - \ln 2 < 2\ln 4$.

29 INFO

Justifier les résultats suivants obtenus avec le logiciel de calcul formel Xcas.

```
1 resoudre(ln(3x)-2ln(x)>=0)
      (x>0)and(x<=3)
2 resoudre(ln(x*(x+1))<ln(6))
      ((x>(-3))and(x<(-1)), (x>0)and(x<2) )
```

30 Résoudre les inéquations suivantes :

1) $e^x > 3$
2) $e^x \leqslant \dfrac{1}{2}$
3) $e^x < -e$

31 Résoudre les inéquations suivantes :

1) $2e^x - 3 > 9$
2) $4e^x - 1 \geqslant e^x + 5$
3) $e^{2x} - 5e^x < 0$

32 Résoudre les inéquations suivantes :

1) $\ln(-2x+1) \leqslant 0$
2) $\ln\left(\dfrac{3x-1}{x+2}\right) \geqslant 0$
3) $\ln(2x-1) + 1 > 0$

33 ▶ MÉTHODE 3 p. 153

Dans chacun des cas suivants, en utilisant la fonction ln, déterminer le plus petit entier naturel n tel que :

1) $(0,7)^n \leqslant 10^{-2}$;
2) $(1,05)^n > 10$;
3) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n \leqslant 10^{-7}$;
4) $(0,98)^{n-1} < 0,6$.

34 Un enquêteur effectue un sondage par téléphone. La probabilité que le correspondant décroche et accepte de répondre à l'enquête est de $\dfrac{1}{5}$.

Combien d'appels l'enquêteur doit-il passer au minimum, pour que la probabilité qu'au moins un correspondant réponde au sondage soit supérieure à $0,999$?

Limites

35 ▶ MÉTHODE 4 p. 155

Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left((\ln x)^2 - \ln x\right)$
2) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x - 2x)$
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\ln x - x^2\right)$

36 Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 0} \left((\ln x)^2 - 3\ln x\right)$
2) $\lim\limits_{x\to 0} \left(-(\ln x)^2 + 2\ln x - 3\right)$

37 INFO

Justifier les résultats suivants obtenus avec le logiciel de calcul formel Xcas.

```
1 f(x):=(x*ln(x))/(x+2)
      x -> x*ln(x)/(x+2)
2 limit(f(x),x,0)
      0
3 limit(f(x),x,+infinity)
      +∞
```

38 En utilisant un théorème de comparaison, déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x^2 + 105x + 18)$;
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(8 - x^3)$.

39 Soit f la fonction définie sur $\left]0\,;\dfrac{1}{e}\right[\cup \left]\dfrac{1}{e}\,;+\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\ln x + 1}$.

1) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2) Quelles conséquences graphiques peut-on en déduire ?

40 ROC

1) Démontrer la propriété suivante : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.
2) En déduire les limites suivantes.
   a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$.
   b) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x \ln\left(1 + e^{-x}\right)$.
   c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}$.

Étude de fonction

41 On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x\ln x$.

1) Étudier les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2) Pour tout réel $x > 0$, calculer $f'(x)$.
3) Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire les variations de f.
4) En déduire que f admet un minimum sur $]0\,;+\infty[$ que l'on précisera.

42 Déterminer la dérivée de chaque fonction sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

1) $f(x) = 3x + 5 - \ln x$
2) $f(x) = \ln x + x^4$
3) $f(x) = \dfrac{1}{x} + 4\ln x$
4) $f(x) = (\ln x)(x+1)$

43 Déterminer la dérivée de chaque fonction sur l'intervalle I indiqué.

1) $f(x) = \dfrac{3 - 2\ln x}{x - 1}$ sur $I =]1\,;+\infty[$.

2) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ sur $I =]0\,;+\infty[$.

3) $f(x) = (\ln x)^3$ sur $I =]0\,;+\infty[$.

4) $f(x) = \sqrt{\ln x}$ sur $I =]1\,;+\infty[$.

44 Déterminer la dérivée de chaque fonction sur l'intervalle I indiqué.

1) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$ sur $I =]0\,;1[$

2) $f(x) = (\ln x)^2(3 - \ln x)$ sur $I =]0\,;+\infty[$

3) $f(x) = (2 - \ln x)(1 - \ln x)$ sur $I =]0\,;+\infty[$

4) $f(x) = \mathrm{e}^{5\ln x + 2}$ sur $I =]0\,;+\infty[$

45 Dans chacun des cas suivants, étudier le sens de variation de la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$.

1) $f(x) = \ln x - \dfrac{1}{2}x^2$

2) $f(x) = 5x - x\ln x$

3) $f(x) = \dfrac{3 - \ln x}{x}$

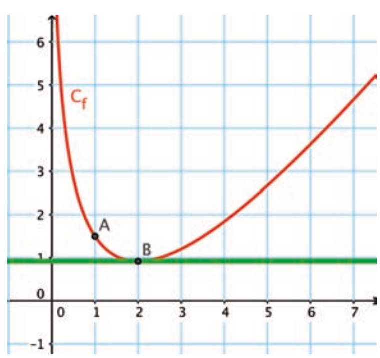
46 Dans chacun des cas suivants, étudier le sens de variation de la fonction f définie sur l'intervalle I.

1) $f(x) = 2 - 5(\ln x)^2$ sur $I =]0\,;+\infty[$

2) $f(x) = \dfrac{4}{\ln x}$ sur $I =]0\,;1[$

3) $f(x) = \mathrm{e}^{2\ln x - x}$ sur $I =]0\,;+\infty[$

47 On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = ax + b\ln x$ où a et b sont des réels. On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f. Le point $A\left(1\,;\dfrac{3}{2}\right)$ appartient à $\mathscr{C}_f$ et la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point B d'abscisse 2 est horizontale.



1) Donner $f(1)$ et $f'(2)$.

2) Calculer les réels a et b.

3) Étudier le sens de variation de la fonction f.

48 CALC

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln x + x^2.$$

1) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.

3) Dresser le tableau de variation complet de f.

4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0\,;+\infty[$.

5) À l'aide d'une calculatrice, donner une valeur approchée à 10^{-2} près de α.

49 On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x + 1}{x}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé (d'unité graphique 2 cm).

1) Montrer que $\mathscr{C}$ admet deux asymptotes.

2) a) Montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{-\ln x}{x^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

3) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

4) Déterminer une équation de la tangente T au point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.

5) Construire $\mathscr{C}$ et T.

50 On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = (\ln x)^3 - 3\ln x.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) a) Étudier la limite de f en $+\infty$.

b) Montrer que $\mathscr{C}$ admet une asymptote verticale.

2) Montrer que pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{3(\ln x - 1)(\ln x + 1)}{x}.$$

3) Dresser le tableau des variations de f.

4) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

5) Construire $\mathscr{C}$ et son asymptote.

Fonction $\ln(u)$

51 Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes.

1) $f : x \mapsto \ln(5x-3)$
2) $g : x \mapsto \ln(-8x+4)$
3) $h : x \mapsto \ln(-7x)$
4) $k : x \mapsto \ln(x^2-2x+1)$

52 ▶ MÉTHODE 5 p. 155

Dans chaque cas, calculer $f'(x)$ sur l'intervalle I.

1) $f(x) = \ln(5x-1)$, $I = \left]\frac{1}{5};+\infty\right[$
2) $f(x) = \ln(9-x^2)$, $I =]-3;3[$
3) $f(x) = \ln(1+\mathrm{e}^x)$, $I = \mathbb{R}$

53 Dans chaque cas, calculer $f'(x)$ sur l'intervalle I.

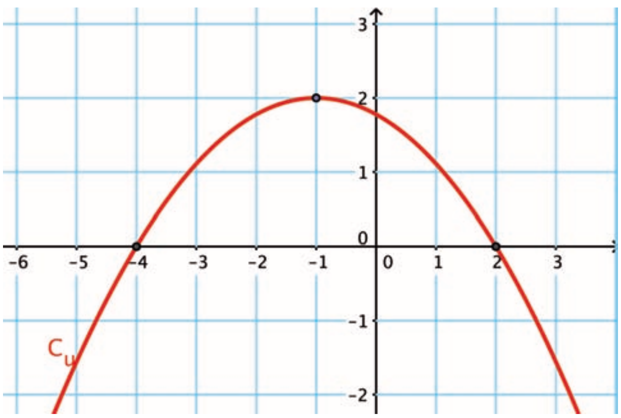
1) $f(x) = \ln(3x^2-5x+7)$, $I = \mathbb{R}$
2) $f(x) = \ln(9-3x)$, $I =]-\infty;3[$
3) $f(x) = \ln((x+1)(5-x))$, $I =]-1;5[$

54 ▶ MÉTHODE 6 p. 156

Dans chaque cas, étudier les limites de f aux bornes de l'intervalle I.

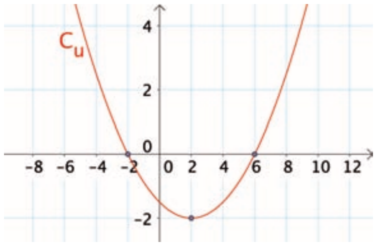
1) $f(x) = \ln(6-2x)$, $I =]-\infty;3[$
2) $f(x) = \ln(x^2-4x+5)$, $I = \mathbb{R}$
3) $f(x) = \ln(\mathrm{e}^x-1)$, $I =]0;+\infty[$

55 On donne ci-dessous la courbe représentative C_u d'une fonction u définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.



1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $\ln(u)$.
2) Étudier les limites de la fonction $\ln(u)$ aux bornes de son ensemble de définition.
3) Étudier le sens de variation de la fonction $\ln(u)$.
4) Dresser le tableau de variation de la fonction $\ln(u)$.

56 Reprendre les questions de l'exercice précédent avec la courbe suivante.



57 Soit f la fonction définie sur $\left]\frac{1}{3};+\infty\right[$ par :

$$f(x) = \ln(3x-1).$$

1) Justifier que f est bien définie sur $\left]\frac{1}{3};+\infty\right[$.
2) Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Interpréter graphiquement.
3) Pour tout réel $x > \frac{1}{3}$, calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
4) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

58 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \ln(\mathrm{e}^x+1).$$

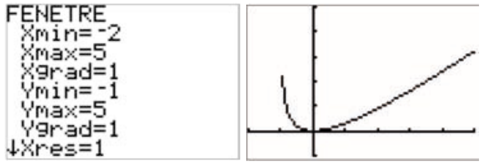
1) Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2) Étudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe de f.
3) Étudier les variations de f.

59 CALC

Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par :

$$f(x) = x - \ln(x+1).$$

On a représenté ci-dessous la fonction f à l'aide d'une calculatrice.



1) Conjecturer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.
2) **a)** Étudier la limite de f en -1. En donner une conséquence graphique.
b) Montrer que pour tout réel $x > 0$,

$$f(x) = x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

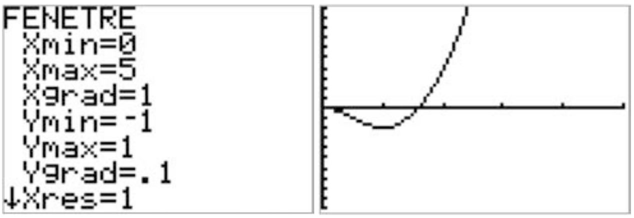
c) En déduire la limite de f en $+\infty$.
3) Dresser le tableau de variation complet de f.
4) Démontrer la conjecture établie au 1).

60 CALC

Soit f la fonction définie sur $[0\,;5]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln\left(x^2+1\right).$$

La courbe de f a été tracée à l'aide d'une calculatrice.



1) Conjecturer :
   a) le sens de variation de f ;
   b) le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.
2) Pour tout réel $x \in [0\,;5]$, calculer $f'(x)$.
3) Dresser le tableau de variation de f.
   a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions sur $[0\,;5]$.
   b) Donner un encadrement de la solution non entière α d'amplitude 10^{-2}.
   c) Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

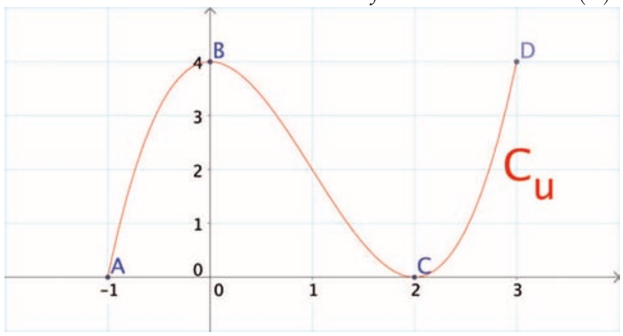
61 Soit f la fonction définie sur $]-4\,;\,4[$ par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+4}{4-x}\right).$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1) Pour tout réel $x \in]-4\,;\,4[$, comparer $f(-x)$ et $f(x)$. En déduire que $\mathscr{C}$ possède un élément de symétrie.
2) Étude de f sur $[0\,;\,4[$.
   a) Déterminer la limite de f en 4. En donner une conséquence graphique
   b) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur $[0\,;\,4[$.
   c) En déduire le sens de variation de f sur $[0\,;\,4[$.
   d) Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en 0.
   e) Calculer l'abscisse du point A de $\mathscr{C}$ d'ordonnée 1. En donner une valeur décimale approchée à 10^{-2} près.
3) Tracer précisément la courbe $\mathscr{C}$ en utilisant les résultats obtenus précédemment.

62 Soit u une fonction dérivable sur l'intervalle $[-1\,;\,3]$ dont la représentation graphique $\mathscr{C}_u$ est donnée ci-dessous. On note f la fonction $\ln(u)$.



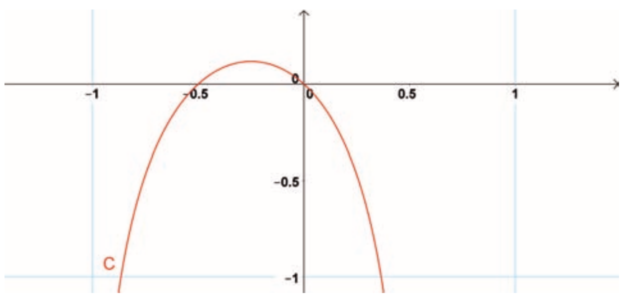
1) Justifier que f est définie sur $]-1\,;2[$.
2) Étudier le sens de variation de la fonction f.
3) Étudier les limites de f en -1 et en 2.
4) Dresser le tableau de variation de la fonction f.
5) Discuter selon les valeurs du réel k, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$.

63 ROC

Soit f la fonction définie sur $\left]-1\,;\frac{1}{2}\right[$ par :

$$f(x) = \ln(-2x^2 - x + 1).$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.



1) Résoudre l'inéquation $f(x) > 0$.
   Vérifier graphiquement le résultat.
2) a) La courbe $\mathscr{C}$ semble-t-elle admettre une tangente horizontale ? Si oui, en quel point ?
   b) Démontrer cette conjecture.

Logarithmes et suites

64 En 2015, la population d'une ville compte 250 000 habitants. Chaque année, cette population diminue de 2 %. À partir de quelle année la population passera-t-elle au-dessous de 100 000 habitants ?

65 **Placement**

Un capital est placé à intérêts composés au taux annuel de 3 %. Au bout de combien d'années, ce capital aura-t-il plus que doublé ?

66 **Absorption d'un médicament**

Un individu ayant une migraine a absorbé un comprimé qui contient 500 mg de paracétamol. Cette molécule a une demi-vie de 2 heures, c'est-à-dire que la moitié du produit est éliminé au bout de 2h.

Combien de temps faut-il attendre pour que 99 % du médicament ait disparu de l'organisme ?

67 Déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $1+5+5^2+...+5^n \geqslant 10^9$.

68 Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = \dfrac{1}{2}$.

1) Pour tout entier naturel n, on pose :
$S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.
Exprimer S_n en fonction de n.

2) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $S_n > 5{,}999$.

69 Dans chaque cas, déterminer la limite de la suite (u_n).

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{\ln(n+1)}$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \ln n - 2n$.

3) Pour tout entier $n \geqslant 2$, $u_n = \ln\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)$.

4) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \ln(n+2) - \ln(3n)$.

70 CALC

On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n non nul par :
$u_n = \dfrac{n^n}{2^n}$ et $v_n = \ln(u_n)$.

1) À l'aide d'une calculatrice, conjecturer les limites des suites (u_n) et (v_n).

2) **a)** Étudier la limite de la suite(v_n).
b) En déduire celle de la suite (u_n).

71 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{4}u_n + \dfrac{1}{2}$.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = u_n - \dfrac{2}{3}$.
a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer v_n et u_n en fonction de n.
c) En déduire la limite de la suite (u_n).

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $w_n = \ln(v_n)$.
a) Montrer que la suite (w_n) est bien définie.
b) Montrer que la suite (w_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.
c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer w_n en fonction de n.

72 **Comportement d'une suite**

Partie A : Étude d'une fonction

On considère la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(3x+1) - x.$$

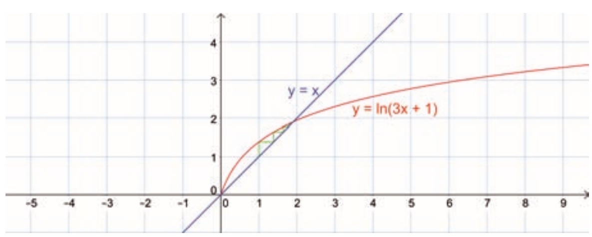
1) Dresser le tableau de variation de la fonction g.

2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[1\,;\,2]$.

Partie B : Étude d'une suite récurrente

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \ln(3u_n + 1)$.

1) On a représenté les premiers termes de la suite (u_n).



2) Conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite (u_n).

3) Démontrer que pour tout entier naturel n,
$1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.

4) Démontrer que la suite (u_n) converge vers α.

73 Comportement d'une suite

Partie A : Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = x - \ln x.$$

1) Étudier les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2) Dresser le tableau de variation de la fonction f.
3) En déduire que, pour tout $x > 1$, $f(x) > 1$.

Partie B : Étude d'une suite récurrente

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n > 1$.
2) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
3) En déduire que la suite (u_n) converge et calculer sa limite.

Logarithme décimal

74 Démonstrations

On rappelle que pour tout réel $x > 0$, $\log(x) = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$.

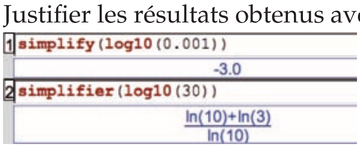
1) Pour tout entier relatif n, montrer que $\log(10^n) = n$.
2) Rappeler le sens de variation de la fonction ln sur $]0\,;+\infty[$, et en déduire celui de la fonction log sur $]0\,;+\infty[$.
3) Soit a et b deux réels strictement positifs. En utilisant les propriétés algébriques de la fonction ln, démontrer :
a) $\log(ab) = \log a + \log b$;
b) $\log\left(\dfrac{a}{b}\right) = \log a - \log b$.

75 Résoudre les équations suivantes dans $]0\,;+\infty[$.

1) $\log(x) = 1$ **3)** $\log(x) = 5$
2) $\log(x) = -3$ **4)** $\log(x) = 0$

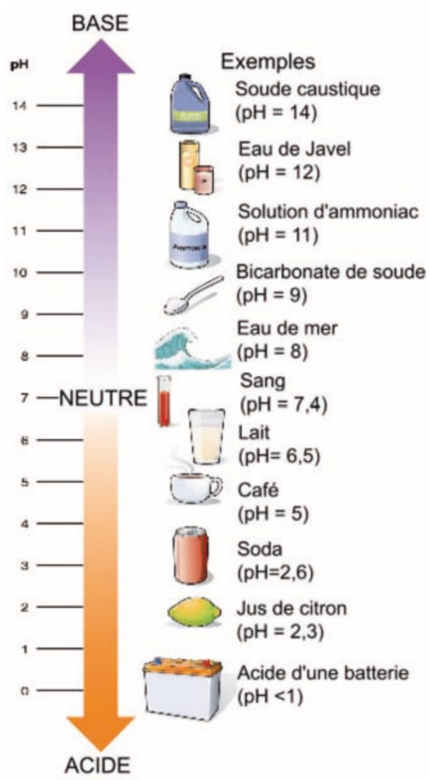
76 INFO

1) Justifier les résultats obtenus avec le logiciel Xcas.



2) Justifier les égalités suivantes :
a) $\log(4 \times 10^{-5}) = \log(4) - 5$
b) $\log(3) + 2 = \log(300)$

77 Chimie



Le pH d'une solution en fonction de la concentration des ions oxonium est donné par la formule :
$\text{pH} = -\log\left[H_3O^+\right]$ où $\left[H_3O^+\right]$ est exprimée en moles par litres.

1) Calculer le pH d'une eau savonneuse dont la concentration en ions $\left[H_3O^+\right]$ est de 5×10^{-10}.
Cette solution est-elle acide ou basique ?
2) Calculer la concentration en ions $\left[H_3O^+\right]$ des solutions suivantes :
a) eau pure de pH 7 ;
b) soda de pH 2,6 ;
c) eau de mer de pH 8.
3) Comment varie la concentration en ions $\left[H_3O^+\right]$ quand le pH augmente ?

78 Acoustique

Le niveau d'intensité sonore L (en décibels) d'un son est donnée par la formule :
$L = 10\log\left(\dfrac{I}{I_0}\right)$ où I est l'intensité du son (en $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$ et I_0 le seuil d'audibilité (intensité au-dessous de laquelle on n'entend pas le son). On prendra $I_0 = 10^{-12}\ \text{W}\cdot\text{m}^{-2}$

1) Compléter le tableau suivant :

L (en dB)	I (en W·m^{-2})	Exemple
140		Avion au décollage
	1	Discothèque
100		Marteau piqueur
	10^{-4}	Restaurant scolaire
60		Salle de classe
	10^{-5}	Conversation normale
20		Vent léger

2) Lorsque l'intensité I double, de combien de décibels augmente L ?
3) Lorsque L augmente de 20 dB, par combien est multiplié I ?

Histoire : Le bel (B) et le décibel (dB) sont des unités acoustiques nommées ainsi en l'honneur du scientifique Alexander Graham Bell. Il est principalement connu pour l'invention du téléphone en 1876.

Problèmes

79 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (e^x - 2)(e^x - 1)$.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.
1) Montrer que $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses en deux points A et B dont on précisera les coordonnées.
2) Déterminer des équations des tangentes à $\mathscr{C}$ respectivement aux points A et B.

80 Carbone 14

À la mort d'un être vivant, la proportion de carbone 14 diminue au fil des années. Les archéologues peuvent estimer l'âge d'un bois ou d'un squelette en mesurant la proportion de carbone 14 présent dans l'objet préhistorique. L'âge de l'objet $A(x)$ en années est modélisé par $A(x) = -k \ln x$ où k est une constante et x est la proportion de carbone 14 restant par rapport au nombre d'atomes de départ.
1) La moitié des atomes de carbone 14 est désintégrée au bout de 5 730 ans. En déduire la valeur de k (arrondir à l'unité).
2) Dans la suite, on prendra $A(x) = -8\,267 \ln x$.
   a) Quel est l'âge d'une coquille d'un fossile dont la proportion de carbone 14 est 0,25 ?

Le pied de pélican (*Aporrhais pespelecani*)

   b) Quelle est la proportion en carbone 14, de la momie de Xin Zhui âgée de 2170 ans ?

81 Glycémie

La glycémie est le taux de glucose dans le sang. On observe la glycémie chez un individu après ingestion d'une boisson sucrée. On considère que la glycémie (en g/l) en fonction du temps écoulé (en heures) est donnée par la formule :

$$g(t) = \ln(3t+1) - t + 1 \text{ avec } t \in [0\,;3]\,.$$

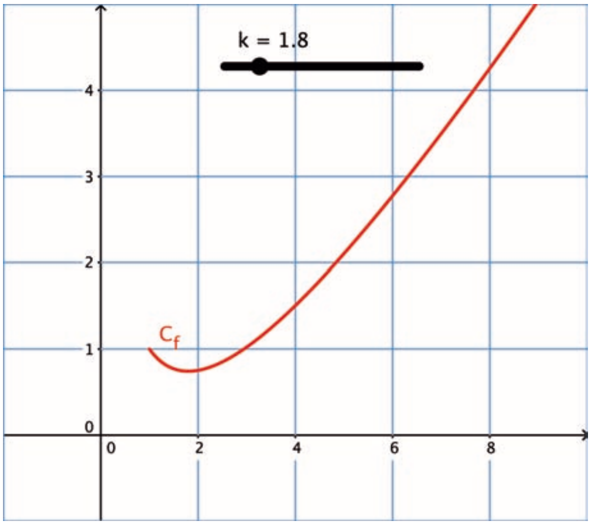
1) Calculer le taux de glucose dans le sang quinze minutes après l'ingestion.
2) Calculer $g'(t)$.
3) Dresser le tableau de variation de la fonction g.
4) À quel instant la glycémie est-elle maximale ? Que vaut alors cette glycémie ?
5) À l'aide d'une calculatrice, déterminer à quel instant la glycémie repasse à 1 g/l ?

82 INFO

Partie A : Utilisation d'un logiciel

1) À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, créer un curseur k allant de 1 à 5 avec une incrément de 0,1. Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie pour tout réel $x > 1$ par :

$$f(x) = x - k \ln x.$$



2) Conjecturer selon les valeurs de k le nombre de points d'intersection entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses.

Partie B : Démonstrations

1) On considère la fonction g définie pour tout réel $x > 1$ par $g(x) = \dfrac{x}{\ln x}$. On note $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de g dans un repère orthogonal.
   a) Étudier les limites de la fonction g en 1 et en $+\infty$.
   b) Pour tout réel $x > 1$, calculer $g'(x)$.
   c) Dresser le tableau de variation de g.
   d) Soit k un réel. Donner, suivant les valeurs de k, le nombre de solutions de l'équation $g(x) = k$.
2) a) Étudier les limites de la fonction f définie à la partie A en 1 et en $+\infty$.
   b) Pour tout réel $x > 1$, calculer $f'(x)$.
   c) Dresser le tableau des variations de f.
   d) On considère un point P de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse $x > 1$. Montrer que P appartient à l'axe des abscisses si et seulement si $g(x) = k$.
   e) Démontrer la conjecture faite à la question A.2.

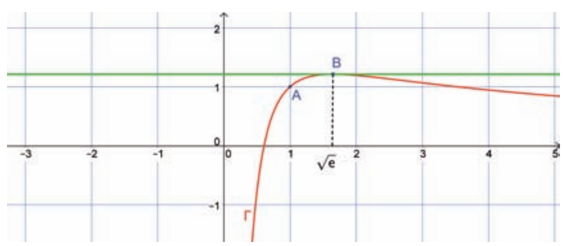
83 Bactéries

Le nombre de bactéries présentes dans une culture après t jours est donné par :
$N(t) = ae^{bt}$, où a et b sont deux constantes réelles.

1) Calculer a et b sachant qu'initialement, il y a 10 000 bactéries et qu'au bout de deux jours, il y a 50 000 bactéries.
2) Quel sera le nombre de bactéries au bouts de 6 jours ? (arrondir à l'unité)
3) Au bout de combien de jours, la culture dépassera-t-elle 400 000 bactéries ?

84 La courbe Γ ci-dessous représente une fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{a\ln x + b}{x}$ où a et b sont des réels.

- Le point $A(1\,;1)$ appartient à Γ.
- La tangente à la courbe Γ au point B d'abscisse $\sqrt{e}$ est parallèle à l'axe des abscisses.



1) Lire graphiquement $f(1)$ et $f'(\sqrt{e})$.
2) En déduire les valeurs de a et b.
3) Étudier le sens de variation de la fonction f.
4) Montrer que la tangente à la courbe Γ au point A passe par l'origine du repère.

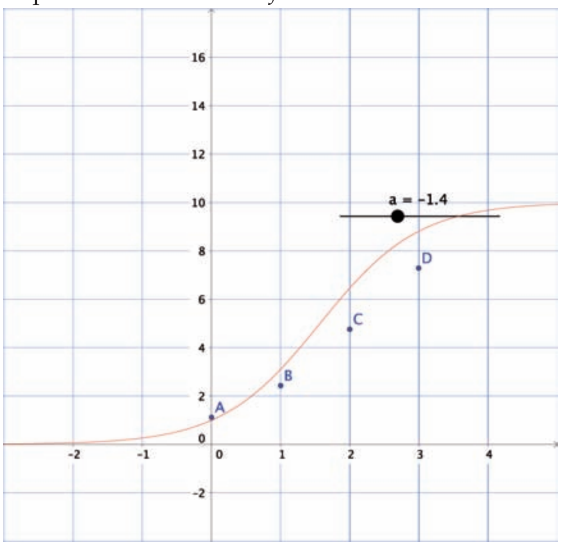
85 Modélisation INFO

Le tableau ci-dessous donne le nombre d'habitants équipés d'une tablette dans un pays de 60 millions d'habitants.

Année	2012	2013	2014	2015
Effectif (en millions)	1,12	2,43	4,76	7,29

On souhaite modéliser par une fonction cette situation. x désigne le temps, en années, écoulé depuis 2012.
On donne $f(x) = \dfrac{10}{9e^{ax}+1}$ où a est un réel. $f(x)$ désigne le nombre d'habitants équipés, en millions.

1) a) À l'aide d'un logiciel, placer les points A, B, C et D issus des données statistiques. Créer un curseur a variant entre -5 et 5 avec un incrément de $0,1$. Représenter la fonction f.



b) Pour quelle(s) valeur(s) de a, f semble-t-elle donner une modélisation satisfaisante de la situation ?

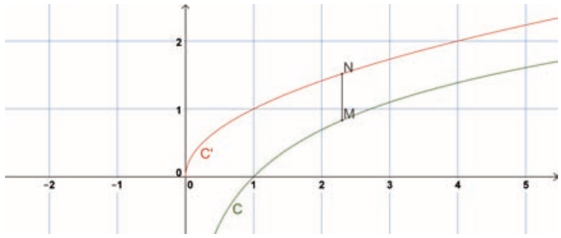
2) Dans la suite, on prend $a = -1,08$.

a) Résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant 9$. Interpréter ce résultat.

b) Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter ce résultat.

86 Limite d'une distance INFO

Dans un repère orthogonal, on considère la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction ln et la courbe $\mathscr{C}'$ représentative de la fonction racine carrée.
Soit x un réel strictement positif. On note respectivement M et N les points de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ d'abscisses x.



1) Construire cette figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

2) Quelle semble être la limite de la distance MN lorsque x tend vers $+\infty$?

3) a) Pour tout réel $x > 0$, montrer que :

$$\sqrt{x} - \ln x = \sqrt{x}\left(1 - 2\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right).$$

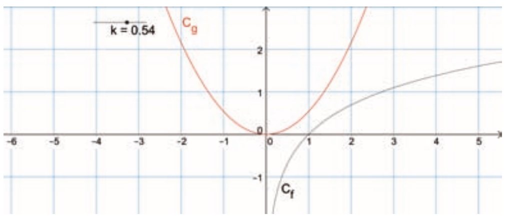
b) Démontrer la conjecture établie au 2.

87 Nombre de solutions d'une équation INFO

Soit k un réel. On s'intéresse au nombre de solutions de l'équation (E) :

$$\ln x = kx^2 \text{ avec } x > 0.$$

1) a) À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, créer un curseur k variant de -2 à 2 avec un incrément de $0,01$.
Représenter les fonctions ln et $x \mapsto kx^2$.



b) On suppose $k > 0$. Trouver à l'aide du logiciel, une valeur approchée de k pour laquelle l'équation (E) semble admettre une unique solution.

c) Conjecturer, suivant les valeurs de k, le nombre de solutions de l'équation (E).

2) On suppose $k < 0$. Démontrer que l'équation (E) admet une unique solution.

D'après épreuve pratique 2007

88 D'après Bac (Amérique du Nord - 2015)

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$u(x) = \ln(x) + x - 3.$$

1) Justifier que la fonction u est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
2) Démontrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α comprise entre 2 et 3.
3) En déduire le signe de $u(x)$ en fonction de x.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln(x) - 2) + 2.$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1) Déterminer la limite de la fonction f en 0.
2) a) Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{u(x)}{x^2}$ où u est la fonction définie dans la partie A.
   b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Partie C

Soit $\mathscr{C}'$ la courbe d'équation $y = \ln(x)$.

1) Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $f(x) - \ln(x) = \dfrac{2 - \ln(x)}{x}$.
2) En déduire que les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ ont un seul point commun dont on déterminera les coordonnées.

89 D'après Bac (Polynésie - 2015) ALGO

Soit (v_n) la suite définie par $v_1 = \ln(2)$ et, pour tout entier naturel n non nul,

$$v_{n+1} = \ln\left(2 - \mathrm{e}^{-v_n}\right).$$

On admet que cette suite est définie pour tout entier naturel n non nul. On définit ensuite la suite (S_n) pour tout entier naturel n non nul par :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k = v_1 + v_2 + \cdots + v_n.$$

Le but de cet exercice est de déterminer la limite de (S_n).

Partie A : Conjectures à l'aide d'un algorithme

1) Recopier et compléter l'algorithme suivant qui calcule et affiche la valeur de S_n pour une valeur de n choisie par l'utilisateur :

```
Liste des variables utilisées
   n,k : entiers
   S,v : réels
Traitement
   Demander n
   Donner à v la valeur ...
   Donner à S la valeur ...
   Pour k variant de ... à ... faire
      Donner à ... la valeur de ...
      Donner à ... la valeur de ...
   Fin Pour
Sortie
   Afficher S
```

2) À l'aide de cet algorithme, on obtient quelques valeurs de S_n. Les valeurs arrondies au dixième sont données dans le tableau ci-dessous :

n	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
S_n	2,4	4,6	6,9	9,2	11,5	13,8

En expliquant votre démarche, émettre une conjecture quant au comportement de la suite (S_n).

Partie B : Étude d'une suite auxiliaire

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la suite (u_n) par $u_n = \mathrm{e}^{v_n}$.

1) Vérifier que $u_1 = 2$ et que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{u_n}$.
2) Calculer u_2, u_3 et u_4. Les résultats seront donnés sous forme fractionnaire.
3) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \dfrac{n+1}{n}$.

Partie C : Étude de (S_n)

1) Pour tout entier naturel n non nul, exprimer v_n en fonction de u_n, puis v_n en fonction de n.
2) Vérifier que $S_3 = \ln(4)$.
3) Pour tout entier naturel n non nul, exprimer S_n en fonction de n. En déduire la limite de la suite (S_n).

90 D'après Bac (Antilles - 2014)

On considère l'équation (E_1) : $e^x - x^n = 0$ où x est un réel strictement positif et n un entier naturel non nul.

1) Montrer que l'équation (E_1) est équivalente à l'équation (E_2) :

$$\ln(x) - \frac{x}{n} = 0.$$

2) Pour quelles valeurs de n l'équation (E_1) admet-elle deux solutions ?

91 D'après Bac (Amérique du Nord - 2013) ALGO

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$.

1) On considère l'algorithme suivant :

```
1.  Liste des variables utilisées
2.     n,i : entiers
3.     u : réel positif
4.  Entrées
5.     Demander n
6.     Donner à u la valeur 1
7.  Traitement
8.     Pour i variant de 1 à n faire
9.        Donner à u la valeur √2u
10.    Fin Pour
11. Sortie
12.    Afficher u
```

a) Donner une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat qu'affiche cet algorithme lorsque l'on choisit $n = 3$.

b) Que permet de calculer cet algorithme ?

c) Le tableau ci-dessous donne des valeurs approchées obtenues à l'aide de cet algorithme pour certaines valeurs de n.

n	1	5	10	15	20
Valeur affichée	1,4142	1,9571	1,9986	1,9999	1,9999

Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (u_n) ?

2) a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leqslant 2$.

b) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

c) Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.

3) On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \ln u_n - \ln 2$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -\ln 2$.

b) Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

d) Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions du traitement et de la sortie, de façon à afficher en sortie la plus petite valeur de n telle que $u_n > 1,999$.

```
1.  Liste des variables utilisées
2.     n : entier naturel
3.     u : réel
4.  Entrées
5.     Donner à n la valeur 0
6.     Donner à u la valeur 1
7.  Traitement
........
........

8.  Sortie
........
```

92 D'après Bac (Métropole - 2011) ALGO

PARTIE A : Étude du signe d'une fonction

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 + 4\ln x.$$

1) Dresser le tableau de variation de la fonction f en précisant les limites de f en 0 et en $+\infty$.

2) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0\,;+\infty[$.

3) En déduire le signe de $f(x)$ selon les valeurs du réel strictement positif x.

Partie B : Une valeur approchée du réel α

1) On admet que $\alpha \in [0,1;1]$. Compléter l'algorithme ci-dessous, afin qu'il affiche les bornes d'un encadrement de α d'amplitude 10^{-3}.

```
Liste des variables utilisées
  a,b,m : réels
Entrées
  Donner à a la valeur de ...
  Donner à b la valeur de ...
Traitement
  Tant que (b-a>...) faire
    Donner à m la valeur de (a+b)/2
    Si f(a) × f(m) > 0 Alors
      Donner à ... la valeur de ...
    Sinon
      Donner à ... la valeur de ...
    Fin Si
  Fin Tant que
Sortie
  Afficher a,b
```

2) Faire tourner cet algorithme en complétant le tableau ci-dessous.

	étape 1	étape 2	étape 3	étape 4	étape 5
a	0,1				
b	1				
$b-a$					
m					

Partie C : Un problème de distance

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative, dans un repère orthonormal, de la fonction ϕ définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$\phi(x) = 2\ln x.$$

L'objectif de cette partie est de démontrer que parmi les points de la courbe $\mathscr{C}$, il y en a un et un seul qui est plus proche de l'origine O que tous les autres.

1) Soit M un point de la courbe $\mathscr{C}$ et x son abscisse. Exprimer OM en fonction de x.

2) **a)** Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$h(x) = x^2 + 4(\ln x)^2.$$

Étudier les variations de la fonction h. On pourra utiliser la partie A.

b) En déduire qu'il existe un unique point A de la courbe $\mathscr{C}$ tel que pour tout point M de $\mathscr{C}$, distinct de A, on ait $OM > OA$.

3) Démontrer que la droite (OA) est perpendiculaire à T_A la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A.

93 D'après Bac (Amérique du Nord - 2012) ROC ALGO

Partie A : Restitution organisée des connaissances

On rappelle que $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{e^t}{t} = +\infty$.

Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = x - \frac{\ln x}{x}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1) Soit g la fonction définie sur $[1\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 - 1 + \ln(x).$$

Montrer que la fonction g est positive sur $[1\,;+\infty[$.

2) **a)** Montrer que, pour tout x de $[1\,;+\infty[$,

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}.$$

b) En déduire le sens de variation de f sur $[1\,;+\infty[$.

c) Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.

3) Pour tout entier naturel $k \geqslant 2$, on note respectivement M_k et N_k les points d'abscisse k de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$.

a) Montrer que, pour tout entier naturel $k \geqslant 2$, la distance M_kN_k entre les points M_k et N_k est donnée par $M_kN_k = \dfrac{\ln k}{k}$.

b) Écrire un algorithme déterminant le plus petit entier k_0 supérieur ou égal à 2 tel que la distance M_kN_k soit inférieure ou égale à 10^{-2}.

94 **Démonstrations** ROC

Soit a et b deux réels strictement positifs. on rappelle que $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

1) Calculer $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) + \ln a$. En déduire que :

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a.$$

2) En utilisant que $\dfrac{a}{b} = a \times \dfrac{1}{b}$, démontrer que :

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b.$$

95 **Démonstrations** ROC

Soit a un réel strictement positif.

1) Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $\ln(a^n) = n \ln a$.

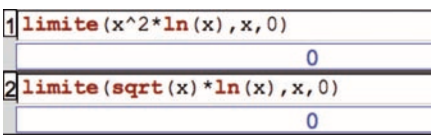
2) Montrer que cette propriété est encore vraie pour tout entier $n < 0$. (On pourra poser $m = -n$)

96 INFO ROC

On rappelle que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

1) En posant $X = \dfrac{1}{x}$ avec $x > 0$, démontrer que $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$.

2) Justifier les résultats suivants obtenus à l'aide du logiciel Xcas.



97 **Équation fonctionnelle** $f(x+y) = f(x) \times f(y)$

Le but de cet exercice est de trouver toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant pour tous les réels x et y :

$$f(x+y) = f(x) \times f(y) \quad (1).$$

1) Montrer que les seules fonctions constantes vérifiant (1) sont la fonction nulle et la fonction constamment égale à 1.

2) Montrer que les fonctions $f : x \mapsto \mathrm{e}^{ax}$ où $a \in \mathbb{R}$ sont des solutions de l'équation (1).

3) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ qui vérifie (1). On suppose que f n'est pas la fonction nulle. L'objectif est de démontrer que pour tout réel x, $f(x) = \mathrm{e}^{ax}$ où a est un réel.

a) Montrer que $f(0) = 1$.

b) Montrer que f ne s'annule pas. (On pourra raisonner par l'absurde).

c) Montrer que pour tout réel x, $f(x) > 0$.

d) Pour tout réel x, on pose $g(x) = \ln[f(x)]$. Montrer que pour tout réel x, $g'(x) = f'(0)$.

e) On pose $a = f'(0)$. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = g(x) - ax$. Montrer que la fonction h est la fonction nulle.

f) En déduire $g(x)$, puis $f(x)$.

4) Conclure.

98 INFO

Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \ln x$. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; I, J)$. Soit M un point quelconque sur $\mathscr{C}$.

1) À l'aide d'un logiciel, conjecturer la position du point M sur $\mathscr{C}$ qui permet d'obtenir une valeur minimale pour la distance JM.

2) Soit x l'abscisse de M avec $x > 0$. Exprimer JM en fonction de x.

3) On pose $g(x) = x^2 - 1 + \ln x$.

a) Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$.

b) Dresser le tableau de variation de g.

c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0\,;+\infty[$. Donner la valeur exacte de α.

d) En déduire le signe de $g(x)$.

4) On pose $f(x) = x^2 + (1 - \ln x)^2$.

a) Montrer que pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{2g(x)}{x}$.

b) Étudier les variations de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$.

c) En déduire la position de M qui rend la distance JM minimale, et calculer cette distance.

99 **Équation fonctionnelle $f(xy) = f(x) + f(y)$**

Le but de cet exercice est de trouver toutes les fonctions f dérivables sur $]0\,;+\infty[$ vérifiant, pour tous $x > 0$ et $y > 0$:

$$f(xy) = f(x) + f(y) \quad (2).$$

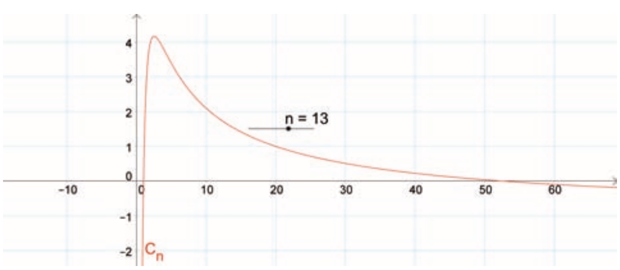
1) Montrer que les fonctions $a\ln$ où $a \in \mathbb{R}$ sont des solutions de l'équation (2).
2) Soit f une fonction dérivable sur $]0\,;+\infty[$ qui vérifie l'équation (2). L'objectif est de démontrer que pour tout réel x, $f(x) = a\ln x$ où a est un réel.
   a) Montrer que $f(1) = 0$.
   b) Soit un réel $b > 0$. Pour tout réel $x > 0$, on pose $g(x) = f(bx) - f(x)$. Montrer que la fonction g est constante.
   c) En déduire que $f'(1) = b \times f'(b)$.
   d) On pose $a = f'(1)$. Soit h la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $h(x) = f(x) - a\ln x$.
   Montrer que la fonction h est la fonction nulle.
   e) En déduire $f(x)$.
3) Conclure.

100 INFO

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on considère la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{1 - x + n\ln x}{x}.$$

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthogonal.



Partie A : Conjecture à l'aide d'un logiciel

1) À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, créer un curseur n, entier compris entre 2 et 20. Construire $\mathscr{C}_n$.
2) Conjecturer les limites de la fonction f_n en 0 et en $+\infty$.
3) Conjecturer le nombre d'antécédent(s) de 0 par la fonction f_n. Comment varient ces éventuels antécédents lorsque n devient grand ?

Partie B : Étude de la famille des fonctions f_n

1) Étudier les limites de f_n en 0 et en $+\infty$.
2) Calculer $f_n'(x)$ et étudier son signe.
3) Dresser le tableau de variation de la fonction f_n.

Partie C : Étude de l'équation $f_n(x) = 0$

1) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $\left]0\,;\mathrm{e}^{\frac{n-1}{n}}\right]$. Donner la valeur exacte de cette solution.
2) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $\left]\mathrm{e}^{\frac{n-1}{n}}\,;+\infty\right[$. On note α_n cette solution.
3) Calculer $f_n(n)$ et montrer que pour tout $n > \mathrm{e}$, $f_n(n) > 0$.
4) En déduire que, pour tout $n \geqslant 3$, $\alpha_n > n$.
5) En déduire la limite de la suite (α_n).

101 CALC

Partie A

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = (\ln 2)x - 2\ln(x).$$

1) Montrer que f est croissante sur $\left[\dfrac{2}{\ln 2}\,;\,+\infty\right[$.
2) En déduire que pour tout réel $x \geqslant 4$, $f(x) \geqslant 0$.
3) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{n^2}{2^n}$.

1) Conjecturer la limite éventuelle de la suite (u_n) à l'aide d'une calculatrice.
2) Pour tout entier $n \geqslant 4$, montrer que $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.
En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
3) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 4$, $u_n \leqslant 1$.
4) En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
5) En utilisant la partie A, calculer ℓ. Indication : on pourra remarquer que pour tout $n > 0$, $u_n = \mathrm{e}^{-f(n)}$.

102 Valeur approchée de $\ln 2$

CALC ALGO

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :
$u_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + ... + \dfrac{1}{2n}$.

1) a) Compléter l'algorithme suivant afin qu'il permette de calculer le terme de rang n.

```
Liste des variables utilisées
   n,k : entiers
   u : réels
Traitement
   Demander n
   Donner à u la valeur de 0
   Pour k variant de 1 à ... faire
      Donner à u la valeur de ...
   Fin Pour
Sortie
   Afficher ...
```

b) Programmer cet algorithme sur une calculatrice ou un logiciel et calculer u_5, u_{10} et u_{20}.

c) Quelles conjectures peut-on formuler sur la suite (u_n) ?

2) Démonter que pour tout entier $n > 0$,
$u_{n+1} - u_n > 0$.

3) Démontrer que la suite (u_n) est majorée. En déduire qu'elle converge. On note ℓ sa limite.

4) a) Démontrer que, pour tout réel $x > 0$,
$1 - \dfrac{1}{x} \leqslant \ln x \leqslant x - 1$.

b) En déduire que, pour tout entier $k > 0$,
$\dfrac{1}{k+1} \leqslant \ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right) \leqslant \dfrac{1}{k}$.

c) Écrire l'encadrement de la question précédente pour k entier allant de n à $2n - 1$. Puis, en ajoutant membre à membre, démontrer que pour tout entier $n > 0$,

$$u_n \leqslant \ln 2 \leqslant u_n + \frac{1}{2n}.$$

d) En déduire que la suite (u_n) converge vers $\ln 2$.

e) Comment peut-on choisir n, pour que u_n soit une valeur approchée de $\ln 2$ à 10^{-3} près.
En utilisant, le programme de la question 1.b), trouver une valeur approchée de $\ln 2$ à 10^{-3} près.

103

INFO

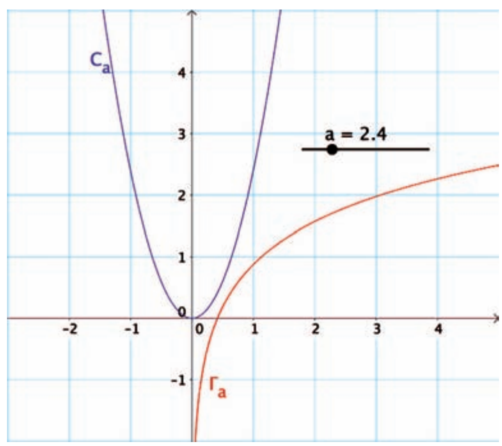
Pour tout réel $a > 0$, on définit les fonctions f_a et g_a sur $]0\,;+\infty[$ par :
$f_a(x) = ax^2$ et $g_a(x) = \ln(ax)$. Soit $\mathscr{C}_a$ et Γ_a leurs courbes représentatives respectives dans un repère orthogonal du plan. Le but de ce problème est d'étudier le nombre de points d'intersection entre ces deux courbes.

PARTIE A : Utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique

1) Créer un curseur a variant entre 0,1 et 10 avec une incrémentation de 0,1.

2) Tracer les courbes $\mathscr{C}_a$ et Γ_a.

3) Discuter suivant les valeurs de a le nombre de points d'intersection entre les deux courbes.



PARTIE B : Démonstrations

On considère la fonction d_a définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $d_a(x) = ax^2 - \ln(ax)$.

1) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} d_a(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} d_a(x) = +\infty$.

2) Pour tout réel $x > 0$, montrer que $d_a'(x) = \dfrac{2ax^2 - 1}{x}$.

3) Dresser le tableau de variation de la fonction d_a. Vérifier que la valeur du minimum de la fonction d_a est $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{a}{2}\right)$.

4) a) Étudier le signe de $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{a}{2}\right)$ suivant les valeurs de a.

b) En déduire le nombre de points d'intersection entre les courbes $\mathscr{C}_a$ et Γ_a selon les valeurs de a.

Je teste mes connaissances

À la fin de ce chapitre, je dois être capable de :

- Résoudre des équations et des inéquations comprenant les logarithmes népériens
- Utiliser la relation fonctionnelle
- Connaître l'allure de la courbe de la fonction $\ln$
- Calculer des limites et des dérivées avec les logarithmes népériens
- Étudier des fonctions $\ln(u)$

QCM d'auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur **manuel.sesamath.net**

Pour chaque question, plusieurs réponses sont proposées. Déterminer celles qui sont correctes.

Soit a un réel strictement positif et n un entier.

104 $\ln a + \ln a$ est égal à :

(a) $\ln(2a)$ (b) $\ln(a^2)$ (c) $2\ln a$ (d) $(\ln a)^2$

105 $\ln(a^3) - \ln(a^7)$ est égal à :

(a) $\ln(a^{-4})$ (b) $\ln\left(\dfrac{1}{a^4}\right)$ (c) $\dfrac{1}{4\ln a}$ (d) $-4\ln a$

106 $\ln(a^n) + \ln(a^{-n})$ est égal à :

(a) $\ln 1$ (b) $\ln \mathrm{e}$ (c) 1 (d) 0

107 $\ln(\sqrt{a^n})$ est égal à :

(a) $n + \dfrac{1}{2}\ln a$ (b) $n\ln\sqrt{a}$ (c) $n + \ln\sqrt{a}$ (d) $\dfrac{n\ln a}{2}$

f est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = (\ln x)^2$.

108 Pour tout réel $x > 0$, $f'(x)$ est égal à :

(a) $\dfrac{2\ln x}{x}$ (b) $2\ln x$ (c) $\dfrac{1}{x^2}$ (d) $\dfrac{\ln x}{x}$

109 La courbe représentative de f admet :

(a) une asymptote d'équation $y = 0$
(b) une asymptote d'équation $x = 0$
(c) pas d'asymptote

110 La courbe représentative de f coupe l'axe des abscisses en :

(a) $x = 0$ (b) $x = 1$ (c) $x = e$

111 La tangente à la courbe de f au point d'abscisse e a pour équation :

(a) $y = f'(\mathrm{e})(x - \mathrm{e}) + f(\mathrm{e})$ (b) $y = \dfrac{2}{\mathrm{e}}x + 1$ (c) $y = \dfrac{2}{\mathrm{e}}x - 1$

Soit n un entier naturel.

112 L'inéquation $1,2^n > 50$ est équivalente à :

a $n\ln(1,2) < \ln 50$ b $n < \ln\left(\dfrac{50}{1,2}\right)$ c $n \leqslant 21$ d $n \geqslant 22$

113 L'inéquation $\left(\dfrac{3}{5}\right)^n < 0,01$ est équivalente à :

a $n > \dfrac{\ln 100}{\ln 5 - \ln 3}$ b $n < \dfrac{\ln 0,01}{\ln(0,6)}$ c $n \leqslant 9$ d $n \geqslant 10$

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x\ln x - \ln x$.

114 La limite en 0 de f est :

a $-\infty$ b 0 c $+\infty$ d 1

115 La limite de f en $+\infty$ est :

a 0 b $+\infty$ c 1

On considère la suite définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$.

116 La suite (u_n) :

a n'a pas de limite b converge vers 0 c converge vers 1 d diverge vers $+\infty$

117 Pour tout entier naturel n, on a :

a $u_n < 0$ b $u_n < 1$ c $u_n > 0$

118 La suite (u_n) est :

a croissante b décroissante c non monotone

119 Pour tout réel $a > 0$ et pour tout entier $n > 0$, $u_n < a$ si et seulement si

a $n > \mathrm{e}^{-a}$ b $n < \dfrac{1}{\mathrm{e}^a + 1}$ c $n > \dfrac{1}{\mathrm{e}^a - 1}$

Soit f est la fonction définie sur $\left]-\dfrac{1}{4}\,;+\infty\right[$ par $f(x) = 2x\ln(4x+1)$.

120 Pour tout réel $x > -\dfrac{1}{4}$, $f'(x)$ est égal à :

a $\dfrac{8}{4x+1}$ b $\dfrac{2}{4x+1}$ c $2\ln(4x+1) + \dfrac{8x}{4x+1}$

121 Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse $\dfrac{1}{4}$ est :

a 0 b $1 + \ln 4$ c $\ln 5$

TP 1 Tangentes communes

INFO

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction exp et Γ celle de la fonction ln. L'objectif est de déterminer s'il existe des tangentes communes aux courbes $\mathscr{C}$ et Γ.

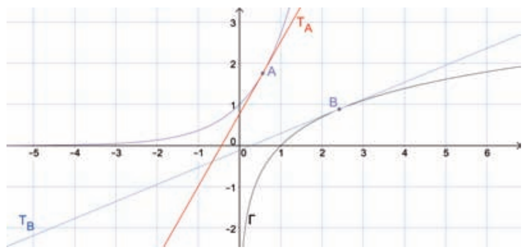
A Utilisation d'un logiciel

1) Tracer les courbes $\mathscr{C}$ et Γ à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

2) Placer un point A sur $\mathscr{C}$ et construire la tangente T_A à $\mathscr{C}$ en A.

3) Placer un point B sur Γ et construire la tangente T_B à Γ en B.

4) Déplacer A et B. Pour quelle(s) position(s) de A et B, les courbes $\mathscr{C}$ et Γ possèdent-elles des tangentes communes ?



B Mise en équation

1) Soit $A(a\,;\mathrm{e}^a)$ un point de $\mathscr{C}$ avec a un réel quelconque.
Soit $B(b\,;\ln b)$ un point de Γ avec $b > 0$.

2) Déterminer une équation de la tangente T_A à $\mathscr{C}$ en A.

3) Déterminer une équation de la tangente T_B à Γ en B.

4) Montrer que les tangentes T_A et T_B sont confondues si et seulement si :
$b = \mathrm{e}^{-a}$ et $\mathrm{e}^a(a-1) = a+1$.

C Utilisation d'une fonction

On souhaite résoudre l'équation (E) : $\mathrm{e}^x(x-1) - x - 1 = 0$ dans $\mathbb{R}$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x(x-1) - x - 1$.

1) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[1\,;+\infty[$, dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

2) Montrer que $f(-\alpha) = 0$.

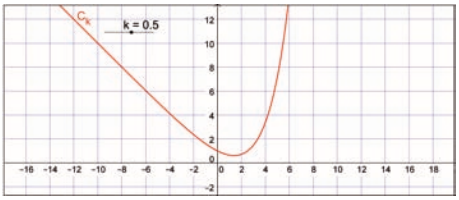
3) On admet que l'équation (E) n'admet pas d'autres solutions. Conclure.

TP 2 Équations et dichotomie

INFO ALGO

k désigne un réel. Soit $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f_k(x) = \mathrm{e}^{kx} - x$.
L'objectif est de déterminer le nombre de solutions de l'équation (E) : $f_k(x) = 0$ dans $\mathbb{R}$.

A Utilisation d'un logiciel



1) Ouvrir un logiciel de géométrie dynamique. Créer un curseur k. Tracer la courbe $\mathscr{C}_k$.

2) Conjecturer selon les valeurs de k le nombre de solutions de l'équation $\mathrm{e}^{kx} - x = 0$

B Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

1) Étudier les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.

2) Pour tout $x > 0$, calculer $g'(x)$.

3) Dresser le tableau de variation de g.

C Résolution du problème

1) L'équation (E) admet-elle des solutions négatives ?

2) Pour tout $x > 0$, montrer que l'équation (E) est équivalente à $g(x) = k$. En déduire le nombre de solutions de l'équation (E) dans $]0\,;+\infty[$ selon les valeurs du réel k .

D Étude d'un cas particulier

Dans la suite, on considère que $k = 0{,}2$.

On admet que (E) admet deux solutions α et β telles que $0 < \alpha < \mathrm{e} < \beta < 13$.

1) a) Compléter l'algorithme ci-contre qui permet de trouver un encadrement de α d'amplitude 10^{-n}.

b) Programmer cet algorithme sur une calculatrice ou un logiciel. En déduire un encadrement de α d'amplitude 10^{-3}.

2) Modifier l'algorithme précédent pour trouver un encadrement de β d'amplitude 10^{-3}.

3) Contrôler les résultats avec le logiciel de géométrie dynamique.

```
Liste des variables utilisées
n : entier
a, b, m : réels
Entrée
Lire n
Initialisation
a prend la valeur ...
b prend la valeur ...
Traitement
Tant que b - a > 10^(-n) faire
    m prend la valeur (a+b)/2
    Si g(m) >0,2
        Alors
            a prend la valeur ...
    Sinon
            b prend la valeur ...
    Fin Si
FinTantQue
Sortie
Afficher a, b
Fin de l'algorithme
```

TP 3 À la belle étoile

On donne ci-dessous une liste d'astres rangés du plus brillant au moins brillant.

Astres	Soleil de midi	Pleine Lune	Sirius	Véga	Rho Cassiopeiae	Quasar 3C273
Magnitude apparente	$-26,7$	$-12,6$	$-1,5$	0	4,5	12,9

1) Comment évolue la magnitude d'un astre en fonction de sa luminosité ?

2) Rechercher sur internet :

- à partir de quelle magnitude apparente, un astre n'est plus visible à l'oeil nu ;
- à partir de quelle magnitude apparente, un astre n'est plus visible par le télescope Hubble.

3) La magnitude apparente m d'un astre est définie par la formule :
$m = -2,5 \log E + c$ où E est l'éclat de l'astre et c une constante.

a) On considère deux astres :

- astre 1 : de magnitude de m_1 et d'éclat E_1 ;
- astre 2 : de magnitude de m_2 et d'éclat E_2.

Montrer que $m_1 - m_2 = 2,5 \log \left(\dfrac{E_2}{E_1} \right)$.

Histoire : C'est en 1856 que l'astronome anglais Norman Pogson a proposé cette relation entre les magnitudes apparentes de deux astres.

b) L'étoile Proxima du Centaure a pour éclat $E = 3,8 \times 10^{-5} E_0$ où E_0 est l'éclat de Véga. Calculer la magnitude apparente de l'étoile Proxima du Centaure.

c) Quand la magnitude augmente de 1 unité, par combien est divisé l'éclat ?

Récréation, énigmes

M48

Un nombre de Mersenne est de la forme $2^p - 1$ où p est entier naturel.
$2^0 - 1 = 0$; $2^1 - 1 = 1$; $2^2 - 1 = 3$; $2^3 - 1 = 7$; $2^4 - 1 = 15$; $2^5 - 1 = 31$; $2^6 - 1 = 63$; $2^7 - 1 = 127$ ... sont des nombres de Mersenne. Parmi ces nombres certains sont premiers (3 ; 7 ; 31 ; 127 ; ...) , d'autres ne le sont pas (0 ; 1 ; 15 ; 63 ; ...).
On note Mn, le $n^{\text{ième}}$ nombre premier de Mersenne. On a donc $M1 = 3$; $M2 = 7$; $M3 = 31$; $M4 = 127$. Ces quatre nombres étaient connus depuis l'Antiquité.
$M8 = 2^{31} - 1 = 2\,147\,483\,647$ a été découvert par Euler en 1750, son écriture décimale comporte 10 chiffres.
Le 25 janvier 2013, le 48e nombre premier de Mersenne a été trouvé : $M48 = 2^{57\,885\,161} - 1$.
Combien de chiffres comporte l'écriture décimale de $M48$?
Indication : On pourra poser $N = 2^{57\,885\,161} - 1$ et exprimer $\log(N+1)$ en fonction de $\log(2)$.

Intégration

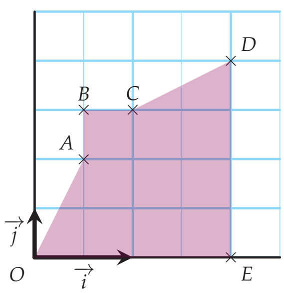
Connaissances nécessaires à ce chapitre

- Calculer l'aire des polygones usuels
- Effectuer des conversions d'unités d'aire
- Dériver les fonctions usuelles
- Représenter et décrire un domaine du plan

Auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

1 Dans le repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$ suivant, on considère le polygone $OABCDE$.



1) Combien le polygone $OABCDE$ représente-t-il de petits carreaux ?

2) a) Sachant qu'une unité d'aire (1 u.a.) représente deux petits carreaux, quelle est l'aire du polygone, en unités d'aire ?

b) À l'aide des unités graphiques, retrouver ce résultat en découpant astucieusement $OABCDE$ en polygones élémentaires.

3) Sachant que l'unité graphique est 1 cm sur l'axe des abscisses et 0,5 cm sur l'axe des ordonnées, quelle est l'aire de $OABCDE$, en cm^2 ?

2 Calculer les dérivées de chacune des fonctions suivantes en précisant l'intervalle I sur lequel la fonction est dérivable.

1) $f : x \mapsto \left(x^5 - \dfrac{1}{2}x^2\right)^2$

2) $g : x \mapsto x\mathrm{e}^x$

3) $h : x \mapsto \ln(x^2+1)$

4) $i : x \mapsto \sqrt{x^2-1}$

5) $j : x \mapsto \dfrac{x}{x-2}$

6) $k : x \mapsto \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$

7) $l : x \mapsto \cos(6x-1)$

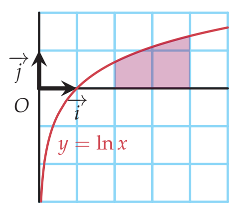
8) $m : x \mapsto \sin(1-2x)$

3 On se place dans un repère orthogonal du plan $(O;\vec{i},\vec{j})$.

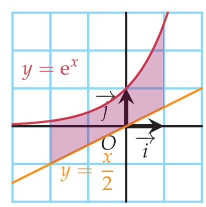
1) Représenter le domaine délimité par la courbe de la fonction racine carrée, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 4$.

2) Décrire chacun des domaines coloriés suivants :

a)



b)



Voir solutions p. 419

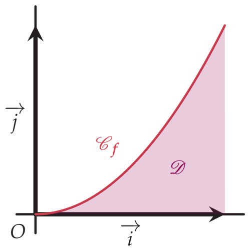
ACTIVITÉ 1 Aire sous une courbe

ALGO

Soit $f : x \mapsto x^2$, définie sur l'intervalle $[0\,;1]$.

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O\,; \vec{i}, \vec{j})$ et on s'intéresse à l'aire $\mathscr{A}$ du domaine $\mathscr{D}$ délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses, sur l'intervalle $[0\,;1]$.

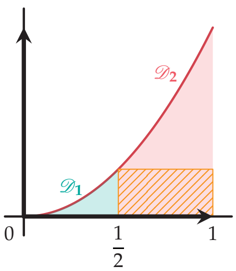
Ce domaine n'étant pas polygonal, on ne connaît (pour l'instant) aucune formule permettant de calculer son aire.

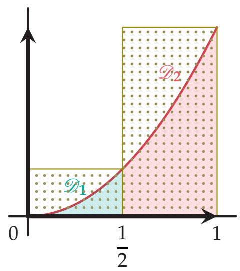


Partie A : Premiers calculs

1) Donner un encadrement (grossier) de l'aire $\mathscr{A}$ du domaine $\mathscr{D}$.

2) Découpons l'intervalle $[0\,;1]$ en deux parties égales et par conséquent le domaine $\mathscr{D}$ en deux sous-domaines $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$. Ces domaines ne sont toujours pas polygonaux mais on peut tracer des rectangles, respectivement dits « inférieurs » et « supérieurs », qui permettent d'encadrer leur aire.





a) Pourquoi, dans la figure de gauche, l'un des deux rectangles n'apparaît-il pas ?

b) À l'aide des deux schémas, donner un encadrement de l'aire $\mathscr{A}_1$ du domaine $\mathscr{D}_1$.

c) De même, donner un encadrement de l'aire $\mathscr{A}_2$ du domaine $\mathscr{D}_2$.

d) En déduire un encadrement (plus fin) de l'aire $\mathscr{A}$ du domaine $\mathscr{D}$.

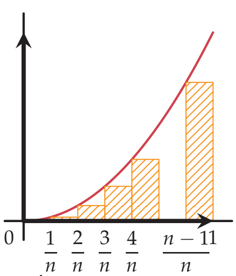
3) Découpons maintenant l'intervalle $[0\,;1]$ en trois parties égales et par conséquent le domaine $\mathscr{D}$ en trois sous-domaines $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ et $\mathscr{D}_3$.

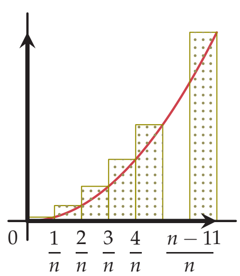
a) Faire deux schémas et construire les rectangles inférieurs et supérieurs, approximant chacun des trois sous-domaines.

b) Donner des encadrements de chacune des aires de ces trois sous-domaines et en déduire un encadrement (plus fin) de l'aire $\mathscr{A}$ du domaine $\mathscr{D}$.

Partie B : Algorithme

Plus généralement, soit $n \in \mathbb{N}^\star$: on suppose maintenant que l'on découpe l'intervalle $[0\,;1]$ en n intervalles de même amplitude et sur chaque intervalle, on construit les rectangles inférieurs et supérieurs.





1) Chaque intervalle est de la forme $I_k = \left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right]$. Entre quelles valeurs k varie-t-il ?

2) **a)** Donner l'amplitude commune de chaque intervalle, c'est-à-dire la largeur commune de chaque rectangle.

b) Quelle est la hauteur du rectangle inférieur construit sur l'intervalle I_k ?
En déduire son aire.

c) Même question avec le rectangle supérieur.

3) On propose l'algorithme suivant, permettant de calculer la somme `Sinf` des aires des rectangles inférieurs et la somme `Ssup` des aires des rectangles supérieurs.
Le compléter puis le tester dans un logiciel adapté pour de grandes valeurs de n.

```
Liste des variables utilisées
   k,n : entiers
   Sinf,Ssup : réels
Entrée
   Saisir n
Traitements
   Donner à Sinf la valeur 0
   Donner à Ssup la valeur 0
   Pour k variant de ... à ... faire
      Donner à Sinf la valeur Sinf + ...
      Donner à Ssup la valeur Ssup + ...
   Fin Pour
Sortie
   Afficher Sinf
   Afficher Ssup
Fin de l'algorithme
```

ACTIVITÉ 2 Vers le résultat exact

On reprend les notations de l'algorithme de l'activité 1.

1) Démontrer que :

$$S_{inf} = \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1} k^2 \quad \text{et} \quad S_{sup} = \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)^2 = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2.$$

2) On rappelle que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. (Voir exercice **21**, chapitre A1, page 26.)

a) Démontrer l'égalité suivante puis en déduire la limite de S_{inf} lorsque n tend vers l'infini :

$$S_{inf} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}.$$

b) Démontrer l'égalité suivante puis en déduire la limite de S_{sup} lorsque n tend vers l'infini :

$$S_{sup} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}.$$

c) En déduire la valeur exacte de l'aire du domaine $\mathscr{D}$.

DÉBAT 3 Quel est le bon article ?

On considère la phrase incomplète suivante :
« On appelle primitive d'une fonction f, définie et continue sur un intervalle I, ... fonction F, définie et dérivable sur I telle que $F' = f$. »
Doit-on remplacer les pointillés par un article défini ou indéfini ? Argumenter.

ACTIVITÉ 4 Loi horaire

Dans un repère terrestre, et en négligeant les forces de frottement dues à l'air, un corps M de masse m (en kg) est soumis à une force unique : son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ (en N, ou kg·m·s^{-2}), où $g = \|\vec{g}\|$ est l'accélération de la pesanteur, en m·s^{-2}.
Dans un repère $(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on note $\overrightarrow{OM(t)}$, $\overrightarrow{v(t)}$ et $\overrightarrow{a(t)}$ les vecteurs position, vitesse et accélération du point M en fonction du temps t (en s).

Partie A : Rappels généraux de physique

1) Pour $i = 1, \ldots, n$, $\vec{F}_i$ désignant les forces extérieurs exercées sur le corps M, et en reprenant les notations précédentes, on rappelle la seconde loi de Newton :

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = m\overrightarrow{a(t)}.$$

a) Exprimer $\vec{g}$ en fonction de $\vec{k}$.
b) Pour tout $t \geqslant 0$, en déduire les coordonnées de $\overrightarrow{a(t)}$.

2) Rappeler le lien qu'il existe entre les fonctions $\overrightarrow{OM}$, $\vec{v}$ et $\vec{a}$.

Partie B : Équation horaire d'un mouvement vertical

À l'instant $t = 0$ s, on lance verticalement et vers le haut un objet M depuis une hauteur de 1,5 m et à une vitesse de 3 m·s^{-1}.

1) a) Donner les coordonnées de $\overrightarrow{OM(0)}$ et de $\overrightarrow{v(0)}$.
b) Pour tout $t \geqslant 0$, en déduire les coordonnées de $\overrightarrow{v(t)}$.
c) Pour tout $t \geqslant 0$, en déduire les coordonnées de $\overrightarrow{OM(t)}$.

2) En prenant $g = 10$ m·s^{-2}, à quel moment l'objet retombera-t-il au sol ?

Partie C : Équation d'une trajectoire

À l'instant $t = 0$ s, on tire un boulet de canon M depuis l'origine du repère dans le plan vertical $(O\,;\vec{j}, \vec{k})$ avec une vitesse initiale v_0. L'angle de tir est donné par $\alpha = (\vec{j}\,;\vec{v_0})$.

1) Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{OM(0)}$ ainsi que de $\overrightarrow{v(0)}$.

2) En déduire les coordonnées de $\overrightarrow{v(t)}$ puis que :

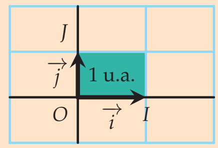
$$\overrightarrow{OM(t)} \begin{pmatrix} 0 \\ v_0\cos(\alpha)t \\ -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_0\sin(\alpha)t \end{pmatrix}.$$

3) En notant y et z les deuxième et troisième coordonnées de $\overrightarrow{OM(t)}$, démontrer que :

$$z = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2(\alpha)}y^2 + \tan(\alpha)y.$$

DÉFINITION

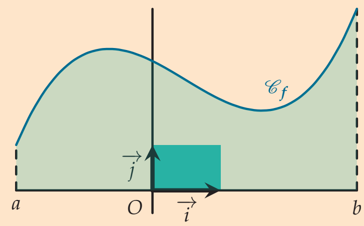
Soit $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,)$ un repère orthogonal du plan.
On note I et J les points tels que $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$.
L'**unité d'aire**, que l'on note **u.a.**, est l'aire du rectangle dont O, I et J forment trois sommets.



1. Intégrale d'une fonction continue et positive

DÉFINITION : Notion d'intégrale

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$ de courbe représentative $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthogonal $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,)$.
L'**intégrale de** a **à** b **de** f est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine situé entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.



Cette aire se note $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et on prononce « intégrale (ou somme) de a à b de $f(x)\,\mathrm{d}x$ ».

Remarques :

- a et b s'appellent respectivement « borne inférieure » et « borne supérieure » de l'intégrale.
- La valeur de l'intégrale ne dépend que de a, b et f ; la variable x n'intervenant pas dans le résultat, on dit qu'elle est muette et l'on peut donc noter indifféremment :

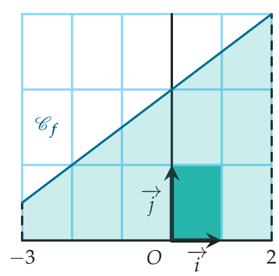
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = \dots$$

- Pour toute fonction f continue et positive en un réel a, $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ puisqu'il s'agit de l'aire d'un segment de hauteur $f(a)$.
- Le symbole $\int$ est dû à G. W. Leibniz, (1646-1716). Il ressemble à un « s » allongé, rappelant que l'aire peut être calculée comme la somme de petites aires élémentaires.

Exemple Soit $f : x \mapsto \dfrac{x}{2} + 2$ définie sur $[-3\,;2]$.
Le domaine colorié est un trapèze dont l'aire est :

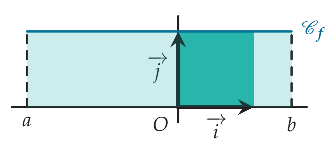
$$\int_{-3}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{0{,}5+3}{2} \times 5 = 8{,}75 \text{ u.a.}$$

Les unités graphiques étant 0,6 cm pour l'axe des abscisses et 1 cm pour l'axe des ordonnées, 1 u.a. représente 0,6 cm^2 et donc l'aire coloriée représente 5,25 cm^2.



Exemple Soit $f : x \mapsto 1$ définie sur $[a\,;b]$.
Le domaine colorié est un rectangle de longueur $b-a$ et de largeur 1.
Ainsi :

$$\int_a^b \mathrm{d}x = b - a \text{ u.a.}$$



THÉORÈME : Dérivabilité d'une fonction définie par une intégrale

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$.
La fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ est définie et dérivable sur $[a\,;b]$ et on a $F' = f$.

PREUVE On démontre ici cette propriété dans le cas d'une fonction f croissante.
Pour tout $x \in [a\,;b]$, $F(x)$ existe bien puisqu'il s'agit de l'aire du domaine compris entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses, sur l'intervalle $[a\,;x]$.
Démontrons maintenant que F est dérivable sur $[a\,;b]$. On considère alors, pour tous $x \in [a\,;b]$ et $h \neq 0$ tel que $x+h \in [a\,;b]$:

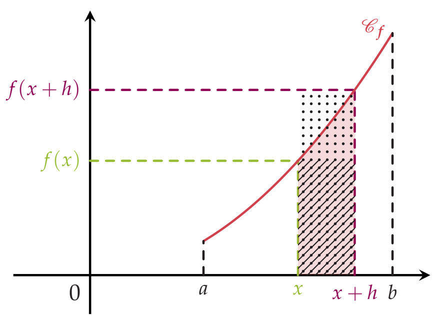
$$\frac{\Delta F}{\Delta x}(x) = \frac{F(x+h)-F(x)}{h}.$$

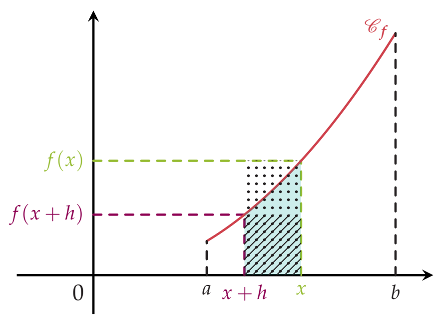
Si $h > 0$ (voir schéma de gauche ci-dessous), $F(x+h) - F(x)$ représente l'aire du domaine compris entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses, sur $[x\,;x+h]$. f étant croissante, cette aire est comprise entre celles des rectangles de largeur h et de hauteurs respectives $f(x)$ et $f(x+h)$:

$$f(x)h \leqslant F(x+h)-F(x) \leqslant f(x+h)h \iff f(x) \leqslant \frac{\Delta F}{\Delta x}(x) \leqslant f(x+h).$$

Si $h < 0$ (voir schéma de droite ci-dessous), $F(x) - F(x+h)$ représente l'aire du domaine compris entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses, sur $[x+h\,;x]$. f étant croissante, cette aire est comprise entre celles des rectangles de largeur $-h$ et de hauteurs respectives $f(x+h)$ et $f(x)$:

$$f(x+h)(-h) \leqslant F(x)-F(x+h) \leqslant f(x)(-h) \iff f(x+h) \leqslant \frac{\Delta F}{\Delta x}(x) \leqslant f(x).$$





f étant une fonction continue, $\lim\limits_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$ et dans les deux cas, d'après le théorème des gendarmes (voir chapitre A1 p. 13), on conclut que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\Delta F}{\Delta x}(x) = f(x)$.
Voir l'exercice 77 p. 203 pour le cas où f est une fonction décroissante.

2. Primitives d'une fonction continue

DÉFINITION

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I.
Une **primitive** de f sur I est une fonction F définie et dérivable sur I telle que $F' = f$.

Remarque : On dit que F est *une* primitive de f et non pas *la* primitive de f car une fonction admettant une primitive n'en admet pas une seule, comme le montre l'exemple ci-dessous.

Exemple Soit $f : x \mapsto 2x$ définie sur $\mathbb{R}$. Alors $F_1 : x \mapsto x^2$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. De même, $F_2 : x \mapsto x^2 + 1$ est aussi une primitive de f sur $\mathbb{R}$. On a $F_1' = F_2' = f$.

THÉORÈME : Existence de primitives

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

PREUVE On démontre ce théorème dans le cas où I est un intervalle fermé $[a\,;b]$ et on admettra pour cela le résultat suivant : « toute fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$ est bornée et atteint ses bornes ».
Soit f une fonction continue sur I et notons m son minimum. La fonction $\varphi : x \mapsto f(x) - m$ est alors continue et positive sur I. D'après le théorème précédent, la fonction $\Phi : x \mapsto \int_a^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ est définie et dérivable sur I et on a, pour tout $x \in I$: $\Phi'(x) = \varphi(x) = f(x) - m$.
Étant donné que l'on cherche une fonction F, définie et dérivable sur I telle que $F' = f$, la fonction $F : x \mapsto \Phi(x) + mx$ est une candidate idéale : elle est définie et dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $F'(x) = \Phi'(x) + m = f(x)$.

THÉORÈME : Lien entre les primitives

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I.
Alors f admet une infinité de primitives sur I qui sont toutes de la forme

$$x \mapsto F(x) + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

PREUVE

- Démontrons d'abord que toutes les primitives ont bien la forme annoncée. Soit G une primitive de f sur I. Alors $G' = f = F'$ et donc $G' - F' = 0$.
  La fonction $G - F$, de dérivée nulle, est donc une fonction constante sur I : il existe alors un réel k tel que, pour tout $x \in I$, $G(x) - F(x) = k$, soit $G(x) = F(x) + k$.
- Vérifions maintenant que toutes les fonctions de la forme $x \mapsto F(x) + k$, avec k réel, sont bien des primitives de f. Soit $k \in \mathbb{R}$ et $G : x \mapsto F(x) + k$ définie sur I. Alors G est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $G'(x) = F'(x) = f(x)$: G est donc bien une primitive de f sur I.

PROPRIÉTÉ : Condition d'unicité de la primitive

Soient $x_0 \in I$ et y_0 deux réels donnés. Parmi toutes les primitives d'une fonction f définie et continue sur I, il en existe une seule qui vérifie la condition $F(x_0) = y_0$.

PREUVE

- **Existence :** soit G une primitive de f sur I et considérons $F : x \mapsto G(x) - G(x_0) + y_0$, définie sur I. Alors F est aussi une primitive de f sur I et de plus, $F(x_0) = y_0$.
- **Unicité :** notons F et G deux primitives de f sur I telles que $F(x_0) = G(x_0) = y_0$ et démontrons que $F(x) = G(x)$ pour tout $x \in I$. Comme F et G sont deux primitives de f, il existe, d'après le théorème précédent, un réel k tel que, pour tout $x \in I$, $F(x) = G(x) + k$. En particulier, pour $x = x_0$, on obtient $k = 0$ et par conséquent $F = G$ sur I.

Remarque : Pour tout $x_0 \in I$, $F : x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ est donc *la* primitive de f sur I s'annulant en x_0. En effet, F est bien une primitive de f sur I et c'est la seule vérifiant la condition $F(x_0) = 0$.

MÉTHODE 1 Utiliser les propriétés élémentaires des primitives

► Ex. 20 p. 196

Exercice d'application Soient φ et ψ les fonctions définies sur $[1\,;+\infty[$ par :

$$\varphi(x) = \int_1^x t^2\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \psi(x) = \frac{x^3}{3}.$$

1) a) Démontrer que φ et ψ sont deux primitives sur $[1\,;+\infty[$ d'une même fonction f que l'on précisera.
   b) En déduire la relation qu'il existe entre φ et ψ.
2) Déterminer la primitive F de f telle que $F(1) = 3$.

Correction

1) a) $f : t \mapsto t^2$ est continue et positive sur $[1\,;+\infty[$ donc d'après le théorème p. 184, φ est définie et dérivable sur $[1\,;+\infty[$ et on a $\varphi' = f$. De plus, pour tout $x \geqslant 1$, $\psi'(x) = x^2$.
   b) ψ est une primitive de f sur $[1\,;+\infty[$ donc φ est de la forme $\varphi(x) = \psi(x) + k$, $k \in \mathbb{R}$ pour tout $x \geqslant 1$. En particulier, $\varphi(1) = \psi(1) + k$ et donc $0 = \frac{1}{3} + k$, c'est-à-dire $k = -\frac{1}{3}$. On en déduit alors que pour tout $x \geqslant 1$, $\varphi(x) = \psi(x) - \frac{1}{3}$.
2) Les primitives de f sur $[1\,;+\infty[$ sont donc de la forme $F : x \mapsto \frac{x^3}{3} + k$, $k \in \mathbb{R}$.
   $F(1) = 3$ donc $\frac{1}{3} + k = 3$ donc $k = \frac{8}{3}$ et ainsi $F(x) = \frac{x^3+8}{3}$ pour tout réel $x \geqslant 1$.

PROPRIÉTÉ : Calcul pratique d'une intégrale

Soit f une fonction continue et positive sur $[a\,;b]$ et F une primitive de f sur $[a\,;b]$. Alors :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \quad \text{que l'on note aussi} \quad [F(x)]_a^b.$$

PREUVE Introduisons la fonction $\Phi : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ de sorte que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \Phi(b)$.
Φ et F étant deux primitives de f sur $[a\,;b]$, on en déduit d'après le théorème précédent qu'il existe un réel k tel que $\Phi(x) = F(x) + k$ pour tout $x \in [a\,;b]$.
Ainsi, $\Phi(b) = F(b) + k$. Il nous reste à calculer k : en remarquant que $\Phi(a) = 0$, il vient que $F(a) = -k$ et ainsi, $\Phi(b) = F(b) - F(a)$.

Exemple On souhaite calculer $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$. Pour cela, posons $f : x \mapsto x^2$, définie sur $[0\,;1]$.
En remarquant que $F : x \mapsto \frac{x^3}{3}$ est une primitive de f sur $[0\,;1]$, on obtient :

$$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

PROPRIÉTÉ : Primitives des fonctions usuelles

Fonction f définie par	Une primitive F définie par	Domaine de validité
$f(x) = k,\ k \in \mathbb{R}$	$F(x) = kx$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$	$F(x) = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$	$F(x) = -\dfrac{1}{n-1}\dfrac{1}{x^{n-1}}$	$]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x)$	$]0\,;+\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	$]0\,;+\infty[$
$f(x) = \mathrm{e}^x$	$F(x) = \mathrm{e}^x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x)$	$\mathbb{R}$

MÉTHODE 2 Déterminer des primitives simples sur un intervalle donné

► Ex. 26 p. 197

1) Commencer par identifier le type de la fonction f ainsi que le type de primitive.
2) Dériver ce type de primitive.
3) Ajuster les coefficients, en fonction du résultat précédent puis écrire les primitives.

Exercice d'application

Déterminer les primitives de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle donné.

1) $f(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}$
2) $g(x) = \dfrac{6}{x^3}$ sur $]-\infty\,;0[$
3) $h(x) = \dfrac{1}{2x}$ sur $]0\,;+\infty[$

Correction

1) f est une fonction de degré 2, continue sur $\mathbb{R}$, une primitive sera donc de degré 3.
Or $(x^3)' = 3x^2$.
On écrit alors $f(x) = \dfrac{1}{3} \times 3x^2$ et les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont définies par :
$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + k, k \in \mathbb{R}.$$
2) g est du type $\dfrac{1}{x^3}$, continue sur $]-\infty\,;0[$, une primitive sera donc du type $\dfrac{1}{x^2}$.
Or, $\left(\dfrac{1}{x^2}\right)' = -\dfrac{2}{x^3}$.
On écrit alors $g(x) = (-3) \times \dfrac{-2}{x^3}$ et les primitives de g sur $]-\infty\,;0[$ sont définies par :
$$G(x) = -\frac{3}{x^2} + k, k \in \mathbb{R}.$$
3) h est du type $\dfrac{1}{x}$, continue sur $]0\,;+\infty[$, une primitive sera donc du type $\ln(x)$.
Or, $(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$.
On écrit alors $h(x) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{x}$ et les primitives de h sur $]0\,;+\infty[$ sont définies par :
$$H(x) = \frac{\ln(x)}{2} + k, k \in \mathbb{R}.$$

PROPRIÉTÉ : Primitives et opérations sur les fonctions

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

Fonction	Une primitive	Domaine de validité
$f = u' + v'$	$F = u + v$	$x \in I$
$f = u'u^n, n \in \mathbb{N}$	$F = \dfrac{1}{n+1}u^{n+1}$	$x \in I$
$f = \dfrac{u'}{u^n}, n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$	$F = -\dfrac{1}{n-1}\dfrac{1}{u^{n-1}}$	$x \in I$ tel que $u(x) \neq 0$
$f = \dfrac{u'}{u}$	$F = \ln(u)$	$x \in I$ tel que $u(x) > 0$
$f = \dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$F = 2\sqrt{u}$	$x \in I$ tel que $u(x) > 0$
$f = u'\mathrm{e}^u$	$F = \mathrm{e}^u$	$x \in I$

MÉTHODE 3 Déterminer des primitives sur un intervalle donné

► Ex. 29 p. 197

1) Commencer par identifier le type de f, la fonction u, ainsi que le type de primitive.
2) Dériver ce type de primitive.
3) Ajuster les coefficients, en fonction du résultat précédent puis écrire les primitives.

Exercice d'application

Déterminer les primitives de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle donné.

1) $f(x) = (2x-1)^3$ sur $\mathbb{R}$
2) $g(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$ sur $]1\,;+\infty[$
3) $h(x) = \dfrac{1}{(2x-1)^2}$ sur $I = \left]\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$

Correction

1) f est du type $u'u^3$ avec $u : x \mapsto 2x-1$ définie sur $\mathbb{R}$, une primitive sera donc du type u^4.
Or, $\left((2x-1)^4\right)' = 4 \times 2 \times (2x-1)^3 = 8(2x-1)^3$.
On écrit alors $f(x) = \dfrac{1}{8} \times 8(2x-1)^3$ et les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont définies par :
$$F(x) = \frac{1}{8}(2x-1)^4 + k, k \in \mathbb{R}.$$

2) g est du type $\dfrac{u'}{u}$ avec $u : x \mapsto x^2-1$, $u(x) > 0$ sur $]1\,;+\infty[$, une primitive sera donc du type $\ln(u)$.
Or, $\left(\ln(x^2-1)\right)' = \dfrac{2x}{x^2-1}$. On écrit alors $g(x) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2x}{x^2-1}$ et les primitives de g sur $]1\,;+\infty[$ sont définies par :
$$G(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2-1) + k, k \in \mathbb{R}.$$

3) h est du type $\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u : x \mapsto 2x-1$, $u(x) \neq 0$ sur I, une primitive sera donc du type $\dfrac{1}{u}$.
Or, $\left(\dfrac{1}{2x-1}\right)' = -\dfrac{2}{(2x-1)^2}$. On écrit alors $h(x) = -\dfrac{1}{2} \times \dfrac{-2}{(2x-1)^2}$ et les primitives de h sur I sont définies par :
$$H(x) = -\frac{1}{2(2x-1)} + k, k \in \mathbb{R}.$$

3. Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

On a vu au paragraphe précédent que, pour une fonction continue et positive sur $[a\,;b]$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

où F est une primitive de f sur $[a\,;b]$. On étend cette propriété aux fonctions de signe quelconque, continues sur un intervalle $[a\,;b]$ avec la définition ci-dessous.

DÉFINITION

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$ et de signe quelconque et F une primitive de f sur $[a\,;b]$. On pose :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Exemple On souhaite calculer $\int_{-1}^{2} (x^2-2)\,\mathrm{d}x$. Pour cela, on pose $f : x \mapsto x^2 - 2$ définie sur $I = [-1\,;2]$. Une primitive de f sur I est $F : x \mapsto \dfrac{x^3}{3} - 2x$ et on obtient alors :

$$\int_{-1}^{2} (x^2-2)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - 2x\right]_{-1}^{2} = \left(\frac{2^3}{3} - 4\right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} + 2\right) = -3.$$

Remarques :

- Pour toute fonction f continue en a, $\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = F(a) - F(a) = 0$.
- Pour toute fonction f continue sur $[a\,;b]$, $\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = F(a) - F(b) = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

PROPRIÉTÉ : Linéarité de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;b]$ et λ un réel. Alors :

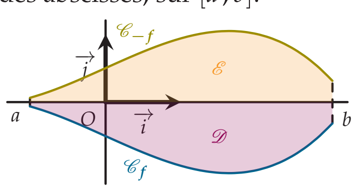
- $\int_a^b (f+g)(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.
- $\int_a^b (\lambda f)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

PREUVE Voir exercice 78 p. 203.

PROPRIÉTÉ : Fonction négative et aire

Soit f une fonction continue et négative sur un intervalle $[a\,;b]$. Alors, l'aire du domaine situé entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses, sur l'intervalle $[a\,;b]$ est $-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

PREUVE On note $\mathscr{D}$ le domaine situé entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses, sur $[a\,;b]$.
Par symétrie par rapport à l'axe des abscisses, l'aire de $\mathscr{D}$ est égale à l'aire du domaine $\mathscr{E}$, compris entre la courbe de $-f$ et l'axe des abscisses, sur l'intervalle $[a;b]$. Ainsi :



$$\mathscr{A}_{\mathscr{D}} = \mathscr{A}_{\mathscr{E}} = \int_a^b (-f)(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

MÉTHODE 4 Utiliser la linéarité de l'intégrale

► Ex. 53 p. 199

Exercice d'application Soient $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\,\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\,\mathrm{d}x$.

1) Pourquoi ne peut-on pas calculer directement I ou J ?
2) Calculer $I+J$ et $I-J$.
3) En déduire les valeurs respectives de I et J.

Correction

1) Aucune des deux fonctions $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}$ et $x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}$ ne correspondent à des dérivées connues et, bien qu'elles soient continues sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, on ne peut pas en donner immédiatement des primitives.

2) Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$I+J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)+\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

De même :

$$I-J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)-\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\,\mathrm{d}x.$$

On reconnaît ici une dérivée de la forme $\dfrac{u'}{u}$, au signe près, puisque la dérivée de la fonction $u : x \mapsto \sin(x)+\cos(x)$ est $u' : x \mapsto \cos(x)-\sin(x)$. Ainsi, étant donné que u est bien positive sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, on a :

$$I-J = -\Big[\ln(\sin(x)+\cos(x))\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0.$$

3) On doit résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} I+J &= \dfrac{\pi}{2} \\ I-J &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2I &= \dfrac{\pi}{2} \\ I &= J \end{cases} \iff I = J = \frac{\pi}{4}$$

PROPRIÉTÉ : Relation de Chasles

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et a, b, c, trois réels appartenant à I. Alors :

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

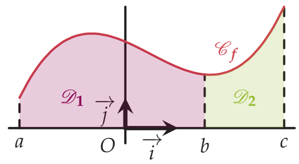
PREUVE f étant une fonction continue sur I, elle admet une primitive sur cet intervalle. Notons F une primitive de f sur I.

Pour démontrer l'égalité annoncée, calculons séparément chaque membre de l'égalité :

- $\displaystyle\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = F(c)-F(a)$ par définition.
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a)+F(c)-F(b) = F(c)-F(a)$ toujours par définition puis en réduisant l'expression obtenue.

L'égalité annoncée est donc vraie.

REMARQUE :
Lorsque f est positive et continue sur $[a\,;c]$ et que $b \in [a\,;c]$, la relation de Chasles est la simple traduction de l'additivité des aires de deux domaines adjacents :

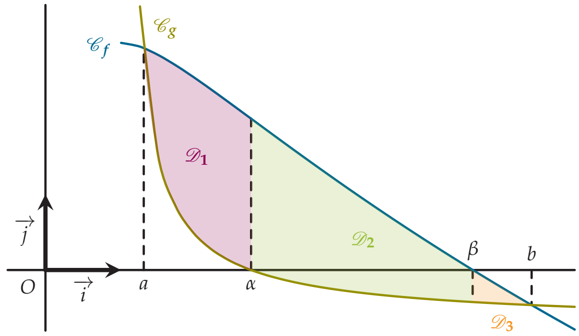


$$\mathscr{A}_{\mathscr{D}_1} + \mathscr{A}_{\mathscr{D}_2} = \mathscr{A}_{\text{totale}}.$$

PROPRIÉTÉ

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;b]$ telles que $f \geqslant g$. Alors, l'aire du domaine compris entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sur $[a\,;b]$ est donnée par $\displaystyle\int_a^b (f-g)(x)\,\mathrm{d}x$.

PREUVE On distingue trois cas, selon que les fonctions sont toutes les deux positives, de signes contraires ou toutes les deux négatives :



- Premier cas.
  L'aire de $\mathscr{D}_1$ est la différence entre l'aire du domaine compris entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses et l'aire du domaine compris entre $\mathscr{C}_g$ et l'axe des abscisses, sur l'intervalle $[a\,;\alpha]$:

$$\mathscr{A}_{\mathscr{D}_1} = \int_a^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^\alpha g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^\alpha (f-g)(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Deuxième cas.
  L'aire de $\mathscr{D}_2$ est la somme de l'aire du domaine compris entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses et de l'aire du domaine compris entre $\mathscr{C}_g$ et l'axe des abscisses, sur l'intervalle $[\alpha\,;\beta]$:

$$\mathscr{A}_{\mathscr{D}_2} = \int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x + \int_\alpha^\beta (-g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta (f-g)(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Troisième cas.
  L'aire de $\mathscr{D}_3$ est la différence entre l'aire du domaine compris entre $\mathscr{C}_g$ et l'axe des abscisses et l'aire du domaine compris entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses, sur l'intervalle $[\beta\,;b]$:

$$\mathscr{A}_{\mathscr{D}_3} = \int_\beta^b (-g)(x)\,\mathrm{d}x - \int_\beta^b (-f)(x)\,\mathrm{d}x = \int_\beta^b (f-g)(x)\,\mathrm{d}x.$$

On conclut en utilisant la relation de Chasles, puisque l'aire totale est la somme des aires des trois domaines.

MÉTHODE 5 Calculer une aire entre deux courbes

► Ex. 60 p. 200

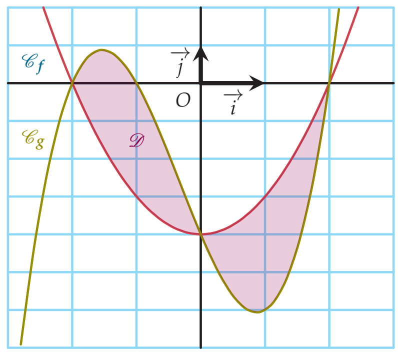
1) Commencer par étudier sur I les positions relatives des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ puis décomposer l'intervalle I en sous-intervalles sur lesquels $f - g$ garde un signe constant.
2) Sur chaque sous intervalle, calculer, selon les cas, l'intégrale de $f - g$ ou de $g - f$.

Exercice d'application Soient $f : x \mapsto x^2 - 4$ et $g : x \mapsto (x+2)(x-2)(x+1)$ définies sur $\mathbb{R}$. Déterminer l'aire, en u.a., du domaine compris entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, sur l'intervalle $[-2\,;2]$.

Correction

1) On calcule la différence $f(x) - g(x) = x^2 - 4 - (x+2)(x-2)(x+1)$ et en factorisant, on a : $f(x) - g(x) = (x^2-4)(1-x-1) = -x(x^2-4)$.
On en déduit le tableau de signes suivant :

x	-2		0		2
x^2-4	0	$-$		$-$	0
$-x$		$+$	0	$-$	
$f(x)-g(x)$	0	$-$	0	$+$	0



On décompose donc l'intervalle $I = [-2\,;2]$ en deux sous-intervalles $I_1 = [-2\,;0]$ et $I_2 = [0\,;2]$ sur lesquels on intègre respectivement $g - f$ et $f - g$.

2) Ainsi, $\mathscr{A}_{\mathscr{D}} = \displaystyle\int_{-2}^{0} x(x^2-4)\,\mathrm{d}x + \int_0^2 -x(x^2-4)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{(x^2-4)^2}{4}\right]_{-2}^{0} - \left[\frac{(x^2-4)^2}{4}\right]_0^2.$

D'une part, $\left[\dfrac{(x^2-4)^2}{4}\right]_{-2}^{0} = \dfrac{(-4)^2}{4} - \dfrac{0^2}{4} = 4.$

D'autre part, $\left[\dfrac{(x^2-4)^2}{4}\right]_{0}^{2} = \dfrac{0^2}{4} - \dfrac{(-4)^2}{4} = -4.$

Ainsi, $\mathscr{A}_{\mathscr{D}} = 8$ u.a.

PROPRIÉTÉ : Intégrales et inégalités

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;b]$. Alors :

- Si f est positive sur $[a\,;b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.
- Si pour tout $x \in [a\,;b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

PREUVE Voir exercice 79 p. 203.

Remarques : Les réciproques de chacun des points de cette propriétés sont fausses.

- Par exemple $\displaystyle\int_0^2 (x^2-1)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$ mais pourtant, la fonction $x \mapsto x^2 - 1$ n'est pas positive sur $[0\,;2]$: l'image de 0 est -1.
- De même, $\displaystyle\int_0^2 1\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x$ puisque $2 \leqslant \dfrac{8}{3}$ mais la fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas toujours supérieure à 1 sur $[0\,;2]$.

MÉTHODE 6 Encadrer une intégrale

► Ex. 65 p. 201

Exercice d'application Soit $f : x \mapsto e^{-x^2}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel $a \geqslant 1$, on s'intéresse à l'intégrale $F(a) = \int_1^a f(x)\,dx$.

1) Démontrer que pour tout réel $x \geqslant 1$, $0 \leqslant f(x) \leqslant e^{-x}$.

2) En déduire que pour tout réel $a \geqslant 1$, $0 \leqslant F(a) \leqslant e^{-1}$.

Correction

1) Une exponentielle étant toujours positive, $f(x) \geqslant 0$ pour tout réel x et donc en particulier pour tout $x \geqslant 1$. De plus, si $x \geqslant 1$, alors $x \leqslant x^2$, c'est-à-dire $-x \geqslant -x^2$ et donc $e^{-x} \geqslant f(x)$ par croissance de la fonction exponentielle.
On en déduit donc que pour tout réel $x \geqslant 1$, $0 \leqslant f(x) \leqslant e^{-x}$.

2) À partir de l'inégalité obtenue, on utilise (deux fois) le second point de la propriété précédente sur l'intervalle $[1\,;a]$ et ainsi :

$$\int_1^a 0\,dx \leqslant \int_1^a f(x)\,dx \leqslant \int_1^a e^{-x}\,dx \iff 0 \leqslant F(a) \leqslant \left[-e^{-x}\right]_1^a.$$

Cette dernière quantité est égale à $-e^{-a} + e^{-1} \leqslant e^{-1}$, ce qui démontre l'inégalité voulue.

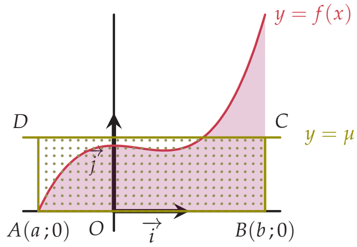
DÉFINITION : Valeur moyenne

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$. La valeur moyenne de f sur $[a\,;b]$ est le nombre μ défini par :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt.$$

Remarque :
Dans le cas où f est positive et continue sur $[a\,;b]$, la valeur moyenne de f entre a et b représente la hauteur du rectangle construit sur l'intervalle $[a\,;b]$.
L'aire du rectangle $ABCD$ est égale, en u.a., à l'aire du domaine coloré car d'après la définition :

$$\mu(b-a) = \int_a^b f(t)\,dt.$$



Exemple Pour connaître la valeur moyenne de $t \mapsto \sin(t)$ sur $[0\,;\pi]$, on calcule :

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\left[-\cos(x)\right]_0^\pi = \frac{-\cos(\pi)+\cos(0)}{\pi} = \frac{2}{\pi}.$$

Remarques :

- En mathématiques, si f est une fonction non constante, la valeur moyenne de f sur $[a\,;b]$ est la valeur de la fonction constante ayant la même intégrale que f sur $[a\,;b]$.
- En physique, si f est une fonction qui représente une intensité variable, la valeur moyenne de f entre deux instants t_1 et t_2 est l'intensité du courant constant transportant la même quantité d'électricité que le courant variable entre t_1 et t_2.

Activités mentales

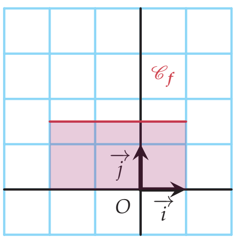
1 Soit $\mathscr{D}$ un domaine d'aire 3 u.a. dans un repère orthogonal d'unités graphiques 2 cm pour l'axe des abscisses et 1 cm pour l'axe des ordonnées. Quelle est l'aire de $\mathscr{D}$ en cm^2 ?

2 Soit $\mathscr{D}$ un domaine d'aire 24 cm^2 dans un repère orthogonal d'unités graphiques 2 cm pour l'axe des abscisses et 1,5 cm pour l'axe des ordonnées. Quelle est l'aire de $\mathscr{D}$ en u.a. ?

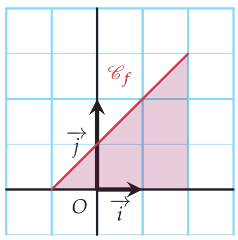
3 Dans chacun des cas suivants, écrire ou donner :

1) l'expression de la fonction f représentée en rouge ;
2) la description du domaine coloré ;
3) l'aire de ce domaine à l'aide d'une intégrale ;
4) l'aire de ce domaine, en u.a.

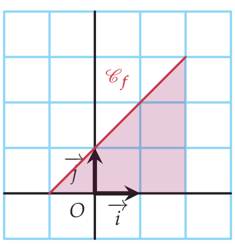
a)



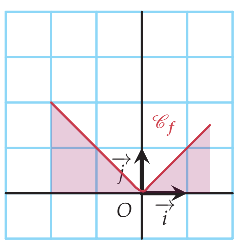
c)



b)



d)



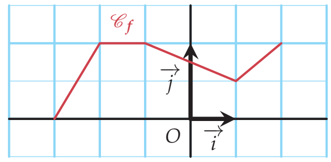
4 Dans chacun des cas suivants :

1) représenter graphiquement le domaine dont l'aire est donnée ;
2) décrire ce domaine ;
3) donner la valeur de son aire, en u.a.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} 3\,\mathrm{d}x$ **c)** $\displaystyle\int_{0}^{3,5} x\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_{-5}^{2} \mathrm{d}x$ **d)** $\displaystyle\int_{0}^{2} (4-x)\,\mathrm{d}x$

5 Soit f une fonction continue sur $[-3\,;2]$ représentée dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ ci-dessous :



Dans chacun des cas suivants, calculer :

1) $\displaystyle\int_{-3}^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x$ **2)** $\displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$ **3)** $\displaystyle\int_{-3}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$

6 Soit f une fonction continue et positive sur $[a\,;b]$ et $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, définie aussi sur $[a\,;b]$.

1) Déterminer $F'(x)$.
2) Étudier les variations de F sur $[a\,;b]$.

7 Dans chacun des cas suivants :

1) donner un intervalle I sur lequel on peut appliquer le théorème p. 184 ;
2) déterminer $F'(x)$, pour tout $x \in I$.

a) $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x (1-t)\,\mathrm{d}t$

b) $F : x \mapsto \displaystyle\int_2^x (t^2+t-2)\,\mathrm{d}t$

c) $F : x \mapsto \displaystyle\int_{-5}^x (t^2+t-2)\,\mathrm{d}t$

d) $F : x \mapsto \displaystyle\int_2^x |1-t|\,\mathrm{d}t$

e) $F : x \mapsto \displaystyle\int_{-2}^x \ln|t|\,\mathrm{d}t$

8 Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de f sur l'intervalle donné.

1) $f : x \mapsto x^3 - 1$ sur $\mathbb{R}$
2) $f : x \mapsto \dfrac{2}{x}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$
3) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$
4) $f : x \mapsto -\sin(x)$ sur $\mathbb{R}$
5) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^6}$ sur $\mathbb{R}^{-*}$
6) $f : x \mapsto \dfrac{4}{\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$

9 Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de f sur l'intervalle donné.

1) $f : x \mapsto 2x(x^2+1)^2$ sur $\mathbb{R}$
2) $f : x \mapsto \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$ sur $\mathbb{R}$
3) $f : x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$
4) $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $]-1\,;1[$
5) $f : x \mapsto \mathrm{e}^{1-2x}$ sur $\mathbb{R}$
6) $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1}$ sur $]0\,;+\infty[$

10 Calculer chacune des intégrales suivantes à l'aide de primitives :

1) $\displaystyle\int_{-2}^{4} x\,\mathrm{d}x$

2) $\displaystyle\int_{1}^{\mathrm{e}} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

3) $\displaystyle\int_{-\mathrm{e}}^{-1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

4) $\displaystyle\int_{4}^{25} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

5) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \sin(u)\,\mathrm{d}u$

6) $\displaystyle\int_{\pi}^{0} \sin(t)\,\mathrm{d}t$

11 Calculer chacune des intégrales suivantes à l'aide de primitives :

1) $\displaystyle\int_{5}^{7} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x$

2) $\displaystyle\int_{-4}^{4} \frac{2u+1}{u^2+u+1}\,\mathrm{d}u$

3) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t$

4) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$

12 Soient f et g deux fonctions continues sur $[-3\,;4]$ telles que :

$$\int_{-3}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = -2 \qquad \int_{1}^{4} f(t)\,\mathrm{d}t = 3$$

et

$$\int_{-3}^{4} g(t)\,\mathrm{d}t = -1 \qquad \int_{1}^{4} g(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

Donner la valeur de chacune des intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_{-3}^{4} f(t)\,\mathrm{d}t$

2) $\displaystyle\int_{-3}^{1} g(t)\,\mathrm{d}t$

3) $\displaystyle\int_{1}^{4} (f+g)(t)\,\mathrm{d}t$

4) $\displaystyle\int_{1}^{4} (f-g)(t)\,\mathrm{d}t$

5) $\displaystyle\int_{1}^{4} (4f-3g)(t)\,\mathrm{d}t$

6) $\displaystyle\int_{-3}^{4} (f+g)(t)\,\mathrm{d}t$

13 Réduire chacune des expressions suivantes (on ne demande pas de les calculer) :

1) $\displaystyle\int_{0}^{1} (\mathrm{e}^{x^2}-1)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \mathrm{d}x + \int_{1}^{2} \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$

2) $\displaystyle\int_{4}^{6} \frac{1}{\ln(x)}\,\mathrm{d}x + \int_{3}^{4} \frac{1}{\ln(x)}\,\mathrm{d}x$

3) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x - \int_{0}^{-2} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

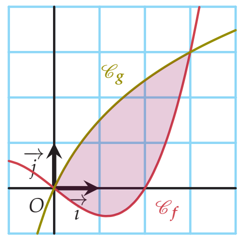
4) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t^2)\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(u^2)\,\mathrm{d}u$

5) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x - \int_{3}^{1} \mathrm{d}u + \int_{3}^{1} \frac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t$

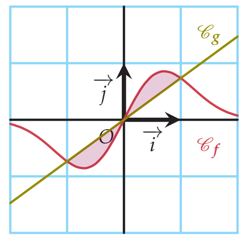
6) $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} \int_{k}^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

14 Dans chacun des cas suivants, exprimer l'aire du domaine colorié sous la forme d'une intégrale.
(On ne demande pas de calculer l'intégrale.)

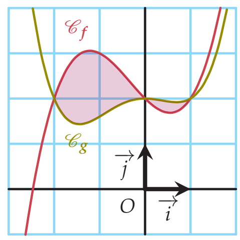
1)



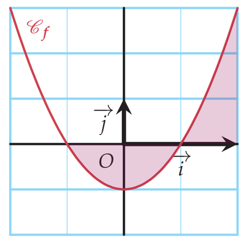
3)



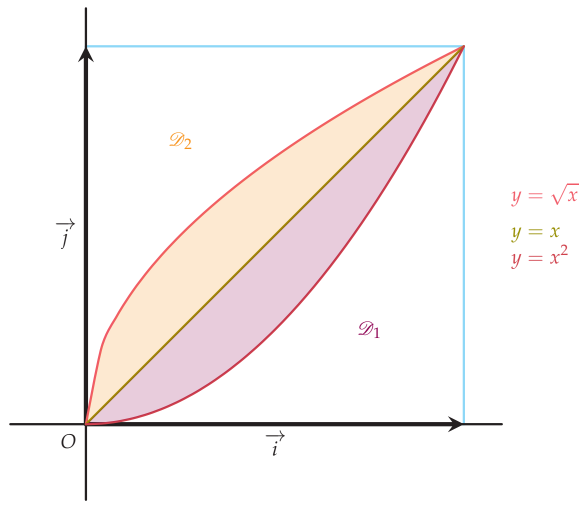
2)



4)



15 On considère les domaines $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ suivants :



On rappelle que sur $[0\;;\;+\infty[$, les représentations graphiques de la fonction racine carrée et de la fonction carré sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

1) Calculer l'aire de $\mathscr{D}_1$, en u.a.

2) En déduire l'aire de $\mathscr{D}_2$ puis l'aire totale du domaine coloré, en u.a.

3) Quelle est l'aire du domaine coloré en cm² si le repère est orthonormé et que l'unité graphique est 2 cm ?

Définition de l'intégrale

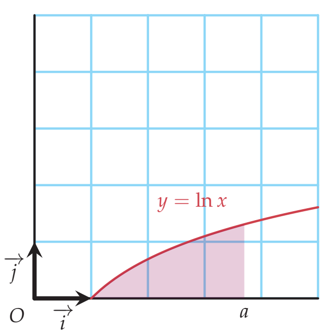
16 On considère l'intégrale $I = \int_a^b \mathrm{d}x$ où a et b sont deux réels tels que $a < b$.

1) De quelle fonction I est-elle l'intégrale ?
2) Représenter graphiquement le domaine dont l'aire est donnée par I.
3) Donner la valeur de I, en u.a.

17 Soit $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ et $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé du plan.

1) Quel est l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f ?
2) a) Représenter graphiquement f sur $\mathscr{D}_f$ et conjecturer la nature géométrique de $\mathscr{C}_f$.
   b) Soit $M(x_M\,;y_M)$ un point du plan. Démontrer que $M \in \mathscr{C}_f$ si et seulement si $OM = 1$ et $x_M \in \mathscr{D}_f$.
   c) En déduire la nature exacte de $\mathscr{C}_f$.
3) On considère $I = \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.
   a) Pourquoi cette intégrale est-elle bien définie ?
   b) Déduire des questions précédentes la valeur de I.

18 On considère l'intégrale $I = \int_1^a \ln(x)\,\mathrm{d}x$, où a est un réel, $a \geqslant 1$, représentant l'aire, en u.a., du domaine colorié ci-dessous :



1) a) Reproduire le graphique ci-dessus et le compléter avec la courbe de la fonction exponentielle.
   b) Dans un repère orthonormé, rappeler la transformation géométrique permettant de passer de la courbe de la fonction logarithme népérien à la courbe de la fonction exponentielle, et réciproquement.
2) a) Par des considérations géométriques, démontrer que :

$$I = a\ln(a) - \int_0^{\ln(a)} \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.$$

   b) Conclure quant à la valeur de I.
3) Plus généralement, soient a et b deux réels tels que $1 \leqslant a < b$. En tenant un raisonnement géométrique similaire à celui des questions 1) et 2) démontrer que :

$$\int_a^b \ln(x)\mathrm{d}x = b\ln(b) - a\ln(a) - b + a.$$

19 On considère l'intégrale $I = \int_a^b \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$, où a et b sont deux réels positifs, avec $a < b$.

1) En utilisant un raisonnement géométrique similaire à celui de l'exercice **18**, démontrer que :

$$I = b\sqrt{b} - a\sqrt{a} - \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} x^2\,\mathrm{d}x.$$

2) En déduire que $I = \frac{2}{3}b\sqrt{b} - \frac{2}{3}a\sqrt{a}$.

Primitives

20 ► MÉTHODE 1 p. 186

Soient φ et ψ les fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\varphi(x) = \int_0^x t^2\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \psi(x) = (x^2 - 2x + 2)\mathrm{e}^x.$$

1) a) Démontrer que φ et ψ sont deux primitives sur $\mathbb{R}^+$ d'une même fonction f que l'on précisera.
   b) En déduire la relation qu'il existe entre φ et ψ.
2) Déterminer la primitive F de f telle que :
   a) $F(0) = 0$ b) $F(1) = 0$

21 Même consigne qu'à l'exercice **20** avec les fonctions φ et ψ définies sur $[1\,;+\infty[$ par :

$$\varphi(x) = \int_1^x \ln(u)\,\mathrm{d}u \quad \text{et} \quad \psi(x) = x\ln(x) - x.$$

Pour les questions 2)a) et 2)b), on prendra respectivement $F(1) = 0$ et $F(\mathrm{e}) = 0$.

22 Même consigne qu'à l'exercice **20** avec les fonctions φ et ψ définies sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$\varphi(x) = \int_0^x \sqrt{s}\,\mathrm{d}s \quad \text{et} \quad \psi(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x}.$$

Pour les questions 2)a) et 2)b), on prendra respectivement $F(1) = 1$ et $F(2) = 0$.

23 Dans l'exercice **22**, la relation entre φ et ψ a été établie pour tout réel x strictement positif.

1) Pourquoi n'a-t-on pas pu établir la relation pour $x = 0$ alors que φ et ψ sont bien définies en 0 ?
2) Étudier le cas particulier $x = 0$.

24 Soient $F : x \mapsto \dfrac{x^2 - x + 1}{x+1}$ et $G : x \mapsto \dfrac{x^2 - 3x - 1}{x+1}$ définies sur $I =]-\infty\,;-1[$.

1) Les fonctions F et G sont-elles des primitives d'une même fonction sur I ?
2) Si oui, laquelle ?

25 Même consigne qu'à l'exercice **24** avec les fonctions $F : x \mapsto \ln(7x)$ et $G : x \mapsto -\ln\left(\dfrac{7}{x}\right)$ définies sur $I =]0\,;+\infty[$.

26 ► MÉTHODE 2 p. 187

Déterminer les primitives de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle donné.

1) $f : x \mapsto x^2 + x^3$ sur $\mathbb{R}$
2) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x} + 1$ sur $]0\,;+\infty[$
3) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0\,;+\infty[$
4) $f : x \mapsto \sin(x) - \cos(x)$ sur $\mathbb{R}$

27 Même consigne qu'à l'exercice **26**.

1) $f : x \mapsto x^5 - 4x + 3$ sur $\mathbb{R}$
2) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^5} - \dfrac{1}{4x}$ sur $]0\,;+\infty[$
3) $f : x \mapsto \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ sur $]0\,;+\infty[$
4) $f : x \mapsto \dfrac{x^2+1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$

28 Même consigne qu'à l'exercice **26**.

1) $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 7$ sur $\mathbb{R}$
2) $f : x \mapsto \dfrac{3}{x^3} - \dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{1}{7}$ sur $]0\,;+\infty[$
3) $f : x \mapsto x^{-4} + 8x^4$ sur $]0\,;+\infty[$
4) $f : x \mapsto e^x - \sin(x)$ sur $\mathbb{R}$

29 ► MÉTHODE 3 p. 188

Même consigne qu'à l'exercice **26**.

1) $f : x \mapsto 2x(x^2+1)^3$ sur $\mathbb{R}$
2) $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{x^3+1}$ sur $]-1\,;+\infty[$
3) $f : x \mapsto \dfrac{x}{(x^2+1)^2}$ sur $\mathbb{R}$
4) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ sur $]-\infty\,;0[$

30 Même consigne qu'à l'exercice **26**.

1) $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$
2) $f : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$
3) $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{(1-e^x)^2}$ sur $]0\,;+\infty[$
4) $f : x \mapsto \dfrac{8x}{\sqrt{x^2+1}}$ sur $\mathbb{R}$

31 Même consigne qu'à l'exercice **26**.

1) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$
2) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]-\infty\,;0[$
3) $f : x \mapsto \cos(x)e^{\sin(x)}$ sur $\mathbb{R}$
4) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x\sqrt{\ln(x)}}$ sur $]1\,;+\infty[$

32 Même consigne qu'à l'exercice **26**.

1) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ sur $]1\,;+\infty[$
2) $f : x \mapsto \sin^2(x)\cos(x)$ sur $\mathbb{R}$
3) $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x+3)}{x+3}$ sur $]-3\,;+\infty[$
4) $f : x \mapsto e^{-3x+3}$ sur $\mathbb{R}$

33 Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(t) = 2\sin(t)\cos(t).$$

1) En reconnaissant une forme connue de dérivée, déterminer une primitive H_1 de h sur $\mathbb{R}$.
2) a) Pour tout réel t, écrire $h(t)$ à l'aide d'un sinus.
   b) À partir de cette forme, en déduire une primitive H_2 de h sur $\mathbb{R}$.
3) a) Représenter graphiquement H_1 et H_2. Ces deux fonctions sont-elles égales ?
   b) Quelle est la constante qui les différencie ?
4) Déterminer la primitive de h sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

34 Dans chacun des cas suivants :

1) déterminer les primitives de chacune des fonctions sur l'intervalle donné ;
2) déterminer la primitive F vérifiant la condition donnée.
   a) $f : x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$ avec $F(1) = 1$.
   b) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ sur $]1\,;+\infty[$ avec $F(2) = 0$.
   c) $f : x \mapsto \sin(x)\cos(x)$ sur $\mathbb{R}$ avec $F(0) = 1$.
   d) $f : x \mapsto x^2 + 1 + \dfrac{x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$ avec $F(1) = \ln(2)$.

35 Un mobile M se déplace de façon rectiligne sur un axe $(O\,;\vec{i})$, gradué en cm. Son abscisse (en cm) et sa vitesse (en cm·s^{-1}) en fonction du temps $t \geqslant 0$ sont données par les fonctions $\vec{x} : t \mapsto \vec{x}(t)$ et $\vec{v} : t \mapsto v(t)$.

1) Rappeler le lien qu'il existe entre $\vec{v}$ et $\vec{x}$.

2) On sait que $\vec{v}(t)$ est donné par $\vec{v}(t) = \left(-\frac{1}{2}t + 1\right)\vec{i}$ et qu'à l'instant $t = 1$ s, le mobile est à 2 cm de l'origine.

a) Déterminer $\vec{x}(t)$.

b) Quelle est alors sa position à $t = 0$ s ?

c) Quand le mobile repasse-t-il par l'origine ? Quelle est alors sa vitesse ?

36 Dans l'exercice **18**, on a démontré :

$$\int_a^b \ln(x)\mathrm{d}x = b\ln(b) - a\ln(a) - b + a, \quad 1 \leqslant a < b.$$

1) À la vue de ce résultat, quelle fonction F semble être une primitive de la fonction logarithme népérien sur $[1\,;+\infty[$?

2) Le vérifier par le calcul.

3) En réalité, sur quel intervalle F est-elle une primitive de la fonction ln ?

37 INFO

Dans l'exercice **19**, on a démontré :

$$\int_a^b \sqrt{x}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}b\sqrt{b} - \frac{2}{3}a\sqrt{a}, \quad 0 \leqslant a < b.$$

1) a) À la vue de ce résultat, quelle fonction F semble être une primitive de $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0\,;+\infty[$?

b) Le vérifier par le calcul.

2) Expliquer la réponse suivante, fournie par le logiciel Maxima :

```
(%i1) integrate(sqrt(x),x);
          3/2
       2 x
(%o1) ------
         3
```

38 INFO

Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{1 + \mathrm{e}^{-x}}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1) f a-t-elle la forme d'une dérivée connue ?

2) a) Multiplier le numérateur et le dénominateur de $f(x)$ par e^x et reconnaître la forme d'une dérivée connue.

b) En déduire une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

3) a) Le logiciel Maxima donne la réponse suivante :

```
(%i1) integrate(1/(1+exp(-x)),x);
(%o1) log(%e^-x+1)+x
```

Vérifier que la fonction donnée est bien une primitive de f.

b) Cette primitive est-elle égale à F ?

39 Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

1) On se place sur $I =]0\,;+\infty[$.
Donner une primitive de f sur I.

2) On se place sur $J =]-\infty\,;0[$.

a) Pourquoi $F : x \mapsto \ln(x)$ ne peut-elle pas être une primitive de f sur J ?

b) En remarquant que $\dfrac{1}{x} = \dfrac{-1}{-x}$, déterminer une primitive de f sur J.

40 Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

1) a) Sur quel intervalle $f(x)$ est-elle positive ?

b) Déterminer une primitive de f sur cet intervalle.

2) a) Sur quel intervalle $f(x)$ est-elle négative ?

b) En s'inspirant de la transformation effectuée à l'exercice **39**, déterminer une primitive de f sur cet intervalle.

Calculs d'intégrales

41 Soient α et β deux réels strictement positifs. On considère l'intégrale $I = \displaystyle\int_\alpha^\beta \ln(x)\,\mathrm{d}x$.

1) Vérifier que $F : x \mapsto x\ln(x) - x$ est bien une primitive de $x \mapsto \ln(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.

2) En déduire une valeur de I.

3) En particularisant α et β, vérifier le résultat obtenu à la question 2) l'exercice **18**.

42 Calculer la valeur exacte de chacune des intégrales suivantes à l'aide d'une primitive.

1) $I = \displaystyle\int_{-1}^{4} (x-1)^2\,\mathrm{d}x$

2) $J = \displaystyle\int_{1}^{2} \frac{1}{(2x-1)^2}\,\mathrm{d}x$

3) $K = \displaystyle\int_{0}^{\pi} \mathrm{e}^{\cos(t)}\sin(t)\,\mathrm{d}t$

4) $L = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{x^2-1}{x}\,\mathrm{d}x$

43 Calculer la valeur exacte de chacune des intégrales suivantes à l'aide d'une primitive.

1) $I = \displaystyle\int_{-4}^{-3} \frac{x+1}{(x^2+2x)^2}\,\mathrm{d}x$

2) $J = \displaystyle\int_{-2}^{1} u(u^2-1)^2\,\mathrm{d}u$

3) $K = \displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x$

4) $L = \displaystyle\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{t+\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t$

44 Calculer la valeur exacte de chacune des intégrales suivantes à l'aide d'une primitive.

1) $I = \displaystyle\int_{-4}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$

2) $J = \displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x$

3) $K = \displaystyle\int_{2}^{3} \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x$

4) $L = \displaystyle\int_{1}^{\mathrm{e}} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$

45 Après avoir rappelé la formule de duplication donnant $\sin(2t)$, calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\sin(2t)}{\sqrt{1+\sin^2(t)}}\,\mathrm{d}t.$$

46 On souhaite calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{2x-1}{x+5}\,\mathrm{d}x.$$

1) Pourquoi ne peut-on pas calculer directement I ?
2) Démontrer que pour tout $x \neq -5$, $\dfrac{2x-1}{x+5}$ peut s'écrire sous la forme $\alpha + \dfrac{\beta}{x+5}$, où α et β sont deux réels à déterminer.
3) En déduire la valeur de I.

47 On souhaite calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^1 \frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x.$$

1) Expliquer pourquoi $f : x \mapsto \dfrac{x}{x+1}$ ne correspond à aucune forme de dérivée connue.
2) En remarquant que $x = x+1-1$, démontrer que pour tout $x \neq -1$, $f(x)$ peut s'écrire sous la forme

$$f(x) = \alpha + \frac{\beta}{x+1}$$

où α et β sont deux réels à déterminer.
3) En déduire que $I = 1 - \ln(2)$.

48 On souhaite calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x.$$

1) Pourquoi ne peut-on pas la calculer directement ?
2) Première méthode.
   a) En remarquant que $1 = \mathrm{e}^x + 1 - \mathrm{e}^x$, décomposer I en deux intégrales calculables.
   b) Calculer chacune des deux intégrales et en déduire que $I = -\ln(\mathrm{e}+1) + \ln(2) + 1$.
3) Seconde méthode.
   a) Multiplier le numérateur et le dénominateur de $\dfrac{1}{\mathrm{e}^x+1}$ par e^{-x} puis calculer I.
   b) Vérifier que les résultats, malgré leur forme apparemment différentes, sont bien égaux.

49 En remarquant que pour tout réel t, $t^3 = t^3 + t - t$, calculer la valeur de :

$$I = \int_0^1 \frac{t^3}{t^2+1}\,\mathrm{d}t.$$

50 Calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_1^2 \frac{3u^2+2u-1}{u}\,\mathrm{d}u.$$

51 On souhaite calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{\pi} t\cos(t)\,\mathrm{d}t.$$

On pose $f : t \mapsto t\cos(t)$, définie sur $\mathbb{R}$.
1) Démontrer que pour tout réel t :

$$f(t) = -2\sin(t) - f''(t).$$

2) En déduire la valeur de I.

52 On souhaite calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_{-5}^{1} x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.$$

On pose $f : x \mapsto x\mathrm{e}^x$, définie sur $\mathbb{R}$.
1) Pour tout réel x, calculer $f'(x)$ et l'exprimer en fonction de $f(x)$.
2) En déduire la valeur de I.

Linéarité de l'intégrale

53 ► MÉTHODE 4 p. 190

On considère les deux intégrales :

$$I = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x+2}\,\mathrm{d}x \qquad J = \int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^x+2}\,\mathrm{d}x$$

1) Calculer $I+J$ et $I-J$.
2) En déduire les valeurs de I et J.

54 Même consigne qu'au **53** avec les intégrales :

$$I = \int_0^{\pi} \cos^2(t)\,\mathrm{d}t \qquad J = \int_0^{\pi} \sin^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

55 On considère les deux intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{1+2\sin(t)}\,\mathrm{d}t, \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2t)}{1+2\sin(t)}\,\mathrm{d}t.$$

1) De ces deux intégrales, l'une est calculable facilement : la calculer.

2) Calculer $I+J$.

3) En déduire la valeur de l'autre intégrale.

Relation de Chasles

56 ROC

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$ et soit c, un réel appartenant à $[a\,;b]$.

Énoncer la relation de Chasles puis la démontrer.

57 Soit f définie sur $I=[-1\,;1]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{x+1} & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

Calculer l'intégrale de f sur I.

58 Même consigne qu'à l'exercice **57** avec f définie sur $I=[0\,;3]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ \dfrac{-x+3}{2} & \text{si} \quad 2 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$$

Calculs d'aires

59 ROC

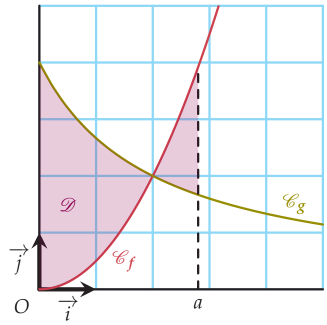
Soient f et g deux fonctions continues et positives sur un intervalle $[a\,;b]$ telles que $f \leqslant g$.

1) Par quelle intégrale calcule-t-on l'aire du domaine compris entre $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$?

2) Démontrer cette affirmation.

60 ▶ MÉTHODE 5 p. 192

Soient f et g les deux fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x)=\dfrac{x^2}{2}$ et $g(x)=\dfrac{8}{x+2}$. On s'intéresse au domaine $\mathscr{D}$ compris entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x=a$, $a \in \mathbb{R}^+$.



1) a) Démontrer que 2 est racine du polynôme
$$N : x \mapsto x^3 + 2x^2 - 16.$$

b) En déduire une factorisation de $N(x)$ sous la forme $N(x) = (x-2)(ax^2+bx+c)$, où a, b et c sont trois réels à déterminer.

c) En déduire le signe de $(f-g)(x)$ sur $[0\,;+\infty[$.

2) a) Déterminer l'aire du domaine $\mathscr{D}$ lorsque $a \leqslant 2$.

b) Déterminer l'aire du domaine $\mathscr{D}$ lorsque $a \geqslant 2$.

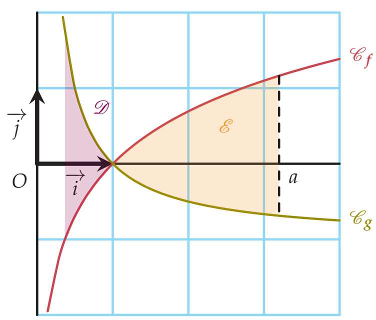
61 INFO

Soient f et g les fonctions définies sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\ln(x)$ et $g(x)=\dfrac{1}{x}-1$. On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leur courbe représentative dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ du plan.

On note $\mathscr{D}$ le domaine compris entre $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ d'une part et les droites $x=\mathrm{e}^{-1}$ et $x=1$ d'autre part.

De même, pour tout réel $a \geqslant 1$, on note $\mathscr{E}$ le domaine compris entre $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ d'une part et les droites $x=1$ et $x=a$ d'autre part.

Le but est de trouver la ou les valeurs de a telle(s) que les aires de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{E}$ soient égales.



1) Réaliser la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique puis émettre une conjecture quant au problème posé.

2) a) Soit $N : x \mapsto x\ln(x)+x-1$ définie sur $]0\,;+\infty[$.

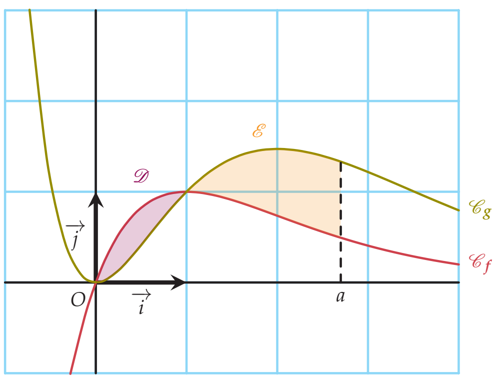
Étudier les variations de N.

b) En déduire les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

3) Démontrer que les aires de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{E}$ sont respectivement égales à $1-\mathrm{e}^{-1}$ et $(a-1)\ln(a)$.
Pour une primitive de la fonction ln, on pourra utiliser $x \mapsto x\ln(x) - x$.

4) Soit $\varphi : x \mapsto (x-1)\ln(x)$. Étudier les variations de φ sur $[1\,;+\infty[$ puis répondre au problème posé.

62 Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{1-x}$ et $g(x) = x^2\mathrm{e}^{1-x}$. On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leur courbe représentative dans un repère orthogonal $(O\,; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.
On note $\mathscr{D}$ le domaine compris entre $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ d'une part et les droites $x = 0$ et $x = 1$ d'autre part.
De même, pour tout réel $a \geqslant 1$, on note $\mathscr{E}$ le domaine compris entre $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ d'une part et les droites $x = 1$ et $x = a$ d'autre part.
Le but est de trouver la ou les valeurs de a telle(s) que les aires de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{E}$ soient égales.



1) Réaliser la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique puis émettre une conjecture quant au problème posé.

2) En déduire les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sur $\mathbb{R}$.

3) Soit $h : x \mapsto P(x)\mathrm{e}^{1-x}$ définie sur $\mathbb{R}$, où P est un polynôme du second degré.
a) Calculer h'. Quelle est sa forme ?
b) En déduire la forme que peut raisonnablement avoir H, une primitive de h sur $\mathbb{R}$.
c) Déterminer alors une primitive de h lorsque P est le polynôme $P : x \mapsto x^2 - x$.

4) a) Déduire des questions précédentes que les aires des domaines $\mathscr{D}$ et $\mathscr{E}$ sont respectivement égales à $3-\mathrm{e}$ et $3-(a^2+a+1)\mathrm{e}^{1-a}$.
b) En déduire que répondre au problème posé revient à résoudre l'équation $\mathrm{e}^a - a^2 - a - 1 = 0$.

5) Soit $\psi : x \mapsto \mathrm{e}^x - x^2 - x - 1$ définie sur $[1\,;+\infty[$.
a) Étudier les variations de ψ' puis déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de la solution de l'équation $\psi'(x) = 0$ sur $[1\,;+\infty[$.
b) En déduire le tableau de variation complet de ψ.
c) Répondre au problème posé.

Suites et intégrales

63 Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \int_0^n \frac{1}{\mathrm{e}^{x\ln 2}}\,\mathrm{d}x.$$

1) Calculer u_n en fonction de n.

2) Déterminer la limite de la suite (u_n). Interpréter géométriquement. En quoi est-ce surprenant ?

64 Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ par :

$$v_n = \int_0^{\ln(n)} \frac{1}{\mathrm{e}^u + 1}\,\mathrm{d}u.$$

1) a) En se reportant à la méthode de l'exercice **48**, décomposer v_n en une différence de deux intégrales.
b) Interpréter géométriquement cette différence.

2) Calculer v_n.

3) Déterminer la limite de la suite (v_n).

Intégrales et inégalités

65 ► MÉTHODE 6 p. 193

On considère $I = \int_0^\pi \sqrt{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$.

1) Déterminer un encadrement de la fonction à intégrer, sur $[0\,;\pi]$.

2) En déduire un encadrement de l'intégrale I.

66 On considère $I = \int_0^1 \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$.

1) Démontrer que pour tout réel $t \geqslant 0$:

$$1 - t^2 \leqslant \frac{1}{1+t^2} \leqslant 1.$$

2) En déduire un encadrement de I.

67 Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \geqslant 1$ par :

$$u_n = \int_n^{n+1} \frac{1}{x\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x.$$

1) a) Étudier les variations de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x\mathrm{e}^x}$ sur $[1 ; +\infty[$.

b) Pour tout $n \geqslant 1$, en déduire un encadrement de f sur l'intervalle $[n ; n+1]$.

2) Pour tout $n \geqslant 1$, en déduire un encadrement de u_n.

3) En déduire le comportement asymptotique de (u_n).

68 Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \geqslant 1$ par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1) Démontrer que pour tout $k \geqslant 1$:

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k}.$$

2) En déduire que $\displaystyle\int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant u_n$.

3) En déduire le comportement asymptotique de (u_n).

69 En s'inspirant de la méthode de l'exercice **68**, déterminer le comportement asymptotique de la suite (u_n) définie pour tout $n \geqslant 2$ par :

$$u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}.$$

70 Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \geqslant 1$ par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

1) Démontrer que (u_n) est croissante.

2) a) Démontrer que pour tout $k \geqslant 1$:

$$\frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k^2}.$$

b) En déduire que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \int_1^{n+1} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant u_n.$$

c) Expliquer les égalités suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^2} = u_{n+1} - 1.$$

d) La suite (u_n) est-elle convergente ?

3) En déduire le comportement asymptotique de (u_n).

71 Soit (I_n) la suite définie pour tout $n \geqslant 0$ par :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+1}\,\mathrm{d}x.$$

1) Démontrer que (I_n) est décroissante.

2) a) Pour tout $x \in [0 ; 1]$, démontrer que :

$$\frac{x^n}{2} \leqslant \frac{x^n}{x+1} \leqslant x^n.$$

b) Pour tout $n \geqslant 0$, en déduire un encadrement de I_n.

3) En déduire le comportement asymptotique de (I_n).

72 Soit (I_n) la suite définie pour tout $n \geqslant 0$ par :

$$I_n = \int_0^1 \ln(1 + x^n)\,\mathrm{d}x.$$

1) a) Déterminer le sens de variation de la suite (I_n).

b) Démontrer que pour tout $n \geqslant 0$, $0 \leqslant I_n \leqslant \ln(2)$.

c) Que peut-on en déduire sur (I_n).

2) Soit $f : x \mapsto \ln(1+x) - x$, définie sur $\mathbb{R}^+$.

a) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}^+$ puis en déduire le signe de $f(x)$.

b) En déduire que pour tout $n \geqslant 0$ et pour tout $x \geqslant 0$, $\ln(1 + x^n) \leqslant x^n$.

c) En déduire la limite de (I_n).

Étude de fonctions

73 Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ définie sur $\mathbb{R}^+$.

1) Donner les raisons permettant d'affirmer que F :

a) est dérivable sur $\mathbb{R}^+$;

b) est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

2) Soit $H : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ définie sur $\mathbb{R}^+$.

a) Démontrer que $H(x) = F(2x) - F(x)$.

b) En déduire que H est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ puis démontrer que $H'(x) = \mathrm{e}^{-4x^2}(2 - \mathrm{e}^{3x^2})$.

c) En déduire les variations de H sur $\mathbb{R}^+$.

74 Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I centré en 0. On note F une primitive de f sur I. On dit qu'une fonction f est paire (resp. impaire) lorsque pour tout $x \in I$, on a $f(-x) = f(x)$ (resp. $f(-x) = -f(x)$).

1) Représenter graphiquement une fonction paire et une fonction impaire.

2) On suppose f impaire.

a) En calculant la dérivée de $x \mapsto F(-x)$, démontrer qu'il existe un réel k tel que pour tout $x \in I$, $F(-x) = F(x) + k$.

b) Déterminer la valeur de k. Que peut-on alors dire sur F ?

3) On suppose f paire.
   a) Démontrer qu'il existe un réel k tel que pour tout $x \in I$, $F(-x) = -F(x) + k$.
   b) Déterminer la valeur de k en fonction de F.
   c) À quelle condition F est-elle impaire ?
4) Applications : on reprend les fonctions F et H de l'exercice 73 définies maintenant sur $\mathbb{R}$.
   a) Démontrer que F est impaire. En déduire son sens de variation sur $\mathbb{R}$.
   b) Démontrer que H est impaire. En déduire son sens de variation sur $\mathbb{R}$.

En physique

75 Valeur moyenne d'un signal

On souhaite calculer la valeur moyenne sur une période de deux types de signaux périodiques.

1) On considère un signal purement sinusoïdal. La fonction le représentant peut se mettre sous la forme $u(t) = u_0 \cos(\omega t + \varphi)$ où u_0 est l'amplitude du signal, ω sa pulsation et φ la phase à l'origine.
   a) Rappeler la plus petite période de la fonction cos.
   b) Soit T la plus petite période de u. En écrivant que pour tout réel t, $u(t+T) = u(t)$, en déduire une expression de T en fonction de ω.
   c) Déterminer une primitive de u sur $\mathbb{R}$.
   d) En déduire la valeur moyenne du signal v sur l'intervalle $[a\,;a+T]$.
2) On considère la fonction v suivante, représentant un signal triangulaire de période T, où a est un réel :

$$v(t) = \begin{cases} -a\left(\dfrac{4t}{T}+1\right) & \text{si } -\dfrac{T}{2} \leqslant t \leqslant 0 \\ a\left(\dfrac{4t}{T}-1\right) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{T}{2} \end{cases}.$$

   a) Représenter graphiquement v pour $a = 1$ et $T = \pi$.
   b) Quelle semble être la valeur de l'intégrale de v sur l'intervalle $\left[-\dfrac{T}{2}\,;\dfrac{T}{2}\right]$?
   c) Le démontrer dans le cas général.

76 Valeur efficace d'un signal

Si f représente un signal, la valeur efficace f_{eff} de f est par définition la racine carrée de la moyenne sur une période de f^2. On dit que la valeur efficace est la moyenne quadratique de f.

1) Traduire par une formule la phrase décrivant le calcul de f_{eff}.
2) On reprend les fonctions de l'exercice 75.
   a) Démontrer que la valeur efficace d'un signal purement sinusoïdal est $u_{\text{eff}} = \dfrac{u_0}{\sqrt{2}}$.
   On pourra utiliser une formule de réduction de $\cos^2(x)$ pour la détermination d'une primitive.
   b) Démontrer que la valeur efficace du signal triangulaire est $v_{\text{eff}} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

> Physiquement, l'intensité efficace d'un courant alternatif i est égale à l'intensité du courant continu dissipant la même énergie que i à travers une résistance sur une période T.

Démonstrations

77 Dérivabilité de la « fonction aire », p. 184 ROC

En s'appuyant sur le modèle de la démonstration donnée dans le cours, démontrer le théorème de dérivabilité de la « fonction aire » dans le cas d'une fonction f décroissante et positive.

78 Linéarité de l'intégrale, p. 189

On note F et G deux primitives respectives de f et g sur $[a\,;b]$.

1) Démonstration du premier point.
   a) Donner une primitive de la fonction $f+g$ sur $[a\,;b]$.
   b) En utilisant la définition, en déduire une expression de $\displaystyle\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x$ en fonction de F et G.
   c) Faire de même avec $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.
   d) Comparer les résultats.
2) Démonstration du second point.
   a) Pour tout réel λ, donner une primitive de la fonction λf sur $[a\,;b]$.
   b) Démontrer l'égalité.

79 Inégalités et intégrales, p. 192

1) Le premier point provient de la définition de l'intégrale. Expliquer pourquoi.
2) Pour démontrer le second point, on considère la fonction $h = g - f$ définie sur $[a\,;b]$.
   Appliquer le premier point à h puis conclure.

80 Méthode des rectangles — ALGO

On souhaite déterminer une valeur approchée de $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$.

1) Démontrer que la fonction à intégrer est décroissante sur $I=[0\,;3]$.

2) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on découpe I en n intervalles de même amplitude, que l'on note I_k, pour $k=0,\dots,n-1$ et sur chaque intervalle, on construit le rectangle « inférieur ».

a) Faire un schéma.

b) Quelle est l'amplitude des intervalles I_k ?

c) On note $I_k=[x_k\,;x_{k+1}]$. Pour tout $k=0,\dots,n$, exprimer x_k en fonction de k et n.

d) Pour tout $k=0,\dots,n-1$, quelle est l'aire du rectangle construit sur l'intervalle I_k ?

e) Compléter l'algorithme permettant de calculer la somme des aires des rectangles inférieurs :

```
Liste des variables utilisées
   k,n : entiers
   Sinf : réel
Entrée
   Saisir n
Traitement
   Donner à Sinf la valeur 0
   Pour k variant de ... à ... faire
      Donner à Sinf la valeur ...
   Fin Pour
Sortie
   Afficher Sinf
Fin de l'algorithme
```

3) Reprendre la question **2)** avec les rectangles supérieurs et compléter l'algorithme pour qu'il affiche aussi la valeur de Ssup.

4) Modifier cet algorithme pour qu'il s'arrête lorsque la différence entre Ssup et Sinf devient inférieure à 10^{-2}. On fera aussi afficher la valeur de n correspondant à la subdivision de I permettant d'obtenir cette précision.

81

Mêmes consignes qu'à l'exercice **80** avec les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ **2)** $\displaystyle\int_0^1 \ln(x+1)\,\mathrm{d}x$

82 D'après Bac (Liban - 2015) — ALGO

On considère la suite (u_n), définie pour tout entier naturel n par $u_n=\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

1) Calculer u_0.

2) a) Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1}+u_n=\frac{1}{n+1}.$$

b) En déduire la valeur exacte de u_1.

3) a) Recopier et compléter l'algorithme suivant afin qu'il affiche le terme de rang n de la suite (u_n), où n est un entier naturel saisi par l'utilisateur.

```
Liste des variables utilisées
   i,n : entiers
   u : réel
Entrée
   Saisir n
Traitement
   Donner à u la valeur ...
   Pour i variant de ... à ... faire
      Donner à u la valeur ...
   Fin Pour
Sortie
   Afficher u
Fin de l'algorithme
```

b) À l'aide de l'algorithme, on a obtenu le tableau de valeurs suivant :

n	0	1	2	3	4
u_n	0,631	0,3069	0,1931	0,1402	0,1098

n	5	10	50	100
u_n	0,0902	0,0475	0,0099	0,0050

Quelles conjectures concernant le comportement de la suite (u_n) peut-on émettre ?

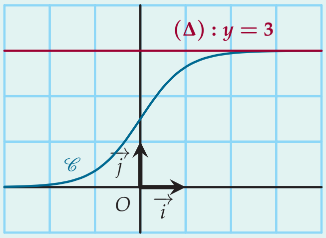
4) a) Démontrer que (u_n) est décroissante.

b) Démontrer que (u_n) est convergente.

5) On appelle ℓ la limite de (u_n). Démontrer que $\ell=0$.

83 D'après Bac (Pondichéry-2015)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{3}{1+\mathrm{e}^{-2x}}$.
Dans le repère ci-dessous, on a tracé, dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f ainsi que la droite (Δ) d'équation $y=3$.



Pour tout réel x, on pose $h(x) = 3 - f(x)$.

1) Justifier que h est positive sur $\mathbb{R}$.

2) Déterminer une primitive H de h sur $\mathbb{R}$.

3) Soit a un réel strictement positif.

a) Donner une interprétation graphique de l'intégrale $\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x$.

b) Calculer cette intégrale.

c) On note $\mathscr{D}$ l'ensemble des points $M(x\,;y)$ du plan défini par les inégalités $0 \leqslant x$ et $f(x) \leqslant y \leqslant 3$.
Déterminer l'aire, en u.a., du domaine $\mathscr{D}$.

84 D'après Bac (Amérique du Nord - 2015)

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$u(x) = \ln(x) + x - 3.$$

1) Justifier que u est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

2) Démontrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α comprise entre 2 et 3.

3) En déduire le sens de variation de $u(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln(x) - 2) + 2.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1) Déterminer la limite de f en 0.

2) a) Démontrer que pour tout $x \in]0\,;+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{u(x)}{x^2}.$$

où u est la fonction de la partie **A**.

b) En déduire le sens de variation de f sur $]0\,;+\infty[$.

Partie C

On note $\mathscr{C}'$ la courbe d'équation $y = \ln(x)$.

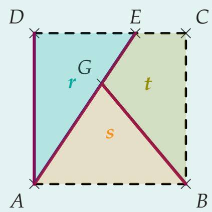
1) Démontrer que $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ ont un seul point d'intersection, que l'on déterminera.

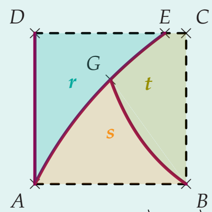
2) Calculer $I = \displaystyle\int_1^{e^2} \frac{2 - \ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$.
Interpréter géométriquement le résultat.

85 D'après Bac (Centres Étrangers - 2015)

Le fabricant de cadenas de la marque « K » désire imprimer un logo pour son entreprise. Ce logo a la forme d'une lettre majuscule K stylisée, inscrite dans un carré $ABCD$ de côté une unité de longueur et respectant les conditions suivantes :

- une des lignes est le segment $[AD]$;
- une deuxième ligne a pour extrémités le point A et un point $E \in [DC]$;
- la troisième ligne a pour extrémités le point B et un point G situé sur la deuxième ligne ;
- l'aire de chacune des trois surfaces délimitées par les lignes doit être comprise entre 0,3 et 0,4, l'unité d'aire étant celle du carré. On note ces aires r, s et t.





On se place dans le repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

Partie A : 1re proposition

Dans cette proposition, les trois lignes sont des segments et les trois aires sont égales : $r = s = t = \dfrac{1}{3}$.
Déterminer les coordonnées des points E et G.

Partie B : 2e proposition

Cette proposition est caractérisée par :

- la ligne d'extrémités A et E est une portion de la représentation graphique de la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \ln(2x+1)$;
- la ligne d'extrémités B et G est une portion de la représentation graphique de la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = k\dfrac{1-x}{x}$, où k est un réel positif.

1) a) Déterminer l'abscisse de E.

b) Sachant que l'abscisse de G est 0,5, déterminer k.

2) a) Démontrer que f admet pour primitive la fonction F définie pour $x \geqslant 0$ par :

$$F(x) = (x + 0,5)\ln(2x+1) - x.$$

b) Démontrer que $r = \dfrac{e}{2} - 1$.

3) Déterminer une primitive G de g sur $]0\,;+\infty[$.

4) a) Démontrer que $s = \ln(2)^2 + \dfrac{\ln(2) - 1}{2}$.

b) Cette proposition remplit-elle les conditions imposées ?

86 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ de la forme $f(x) = P(x)e^x$, où P est un polynôme du second degré.

1) Quelle est la forme de f' ?

2) Soit F, une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

a) Quelle forme convient à F ?

b) Suffit-il ou est-il nécessaire que F soit de la forme donnée en **2)a)** pour qu'elle soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$?

3) On note :

$$F : x \mapsto (Ax^2 + Bx + C)e^x$$

et

$$f : x \mapsto (ax^2 + bx + c)e^x,$$

où A, B, C, a, b et c sont des réels avec $A \neq 0$ et $a \neq 0$.

a) Démontrer que $F' = f$ si et seulement si

$$\begin{cases} A = a \\ 2A + B = b \\ B + C = c \end{cases}$$

b) En déduire les expressions de A, B et C en fonction de a, b et c.

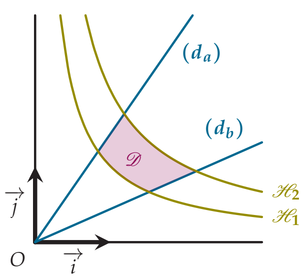
4) En déduire les primitives sur $\mathbb{R}$ de :

a) $f : x \mapsto (x^2 + x + 1)e^x$

b) $f : x \mapsto (x^2 + 2x - 1)e^x$

c) $f : x \mapsto (3x^2 + 2x + 1)e^x$

87 Soient a et b deux réels strictement positifs, avec $a > b$. Dans un repère orthogonal, on considère (d_a), (d_b), $\mathscr{H}_1$ et $\mathscr{H}_2$ les courbes d'équations respectives $y = ax$, $y = bx$, $y = \dfrac{1}{x}$ et $y = \dfrac{2}{x}$, pour $x > 0$.



1) Déterminer les coordonnées des points d'intersection entre les droites d_a, d_b et les hyperboles $\mathscr{H}_1$, $\mathscr{H}_2$.

2) Déterminer l'aire du domaine $\mathscr{D}$ en fonction des réels a et b.

88 **Inégalité de Cauchy-Schwarz**

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$. On note h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(t) = \int_a^b (f(x) + tg(x))^2 \, dx.$$

1) À quelle condition sur g la fonction h est-elle un polynôme du second degré ?

2) Quel est le signe de h ?

3) En déduire l'inégalité :

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f(x)^2\,dx\right)\left(\int_a^b g(x)^2\,dx\right).$$

89 **Démonstration**

On rappelle le théorème p. 184, affirmant que si f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$ alors la « fonction aire » F est dérivable sur $[a\,;b]$ et on a $F' = f$.

On souhaite démontrer ce résultat pour une fonction f de signe quelconque.

1) Soit f une fonction négative sur $[a\,;b]$.
Appliquer ce théorème à la fonction $g : x \mapsto -f(x)$ et en déduire que l'on obtient bien $F' = f$ sur $[a\,;b]$.

2) Soit f une fonction changeant de signe sur $[a\,;b]$. On supposera ici que f est négative que $[a\,;\alpha]$ et positive sur $[\alpha\,;b]$.

a) Démontrer que sur $[a\,;\alpha]$, $F' = f$.

b) Posons $F_1 : x \mapsto \displaystyle\int_\alpha^x f(t)\,dt$ définie sur $[\alpha\,;b]$. Exprimer F en fonction de F_1 puis démontrer que sur $[\alpha\,;b]$, $F' = f$.

On généralise en procédant de même, intervalle par intervalle, pour une fonction admettant un nombre fini de changements de signes sur $[a\,;b]$.

90 **Fonction gamma**

Pour tout réel $x > 0$, on définit la fonction Γ par :

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= \int_0^{+\infty} e^{(x-1)\ln t} e^{-t}\,dt \\ &\underset{\text{def.}}{=} \lim_{\substack{b \to +\infty \\ a \to 0}} \int_a^b e^{(x-1)\ln t} e^{-t}\,dt. \end{aligned}$$

1) Un résultat général d'intégration.
Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle $[a\,;b]$.

a) Rappeler la formule de la dérivée du produit uv.

b) On peut alors en déduire que :

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Cette formule est appelée formule d'Intégration Par Partie (IPP).

2) Établissement d'une formule de récurrence.
En procédant à une IPP, tout en choisissant judicieusement les fonctions u et v', démontrer que :

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

3) a) Calculer $\Gamma(1)$.

b) Calculer ensuite $\Gamma(2)$, $\Gamma(3)$, $\Gamma(4)$ et plus si nécessaire afin de pouvoir établir une conjecture.

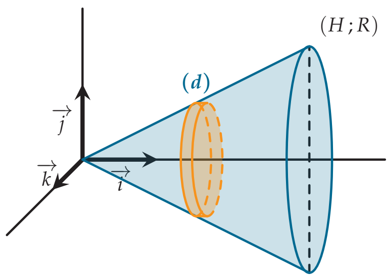
c) La démontrer.

91 Calculs de volumes

On se place dans un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ orthonormé direct de l'espace.

Partie A : Un exemple

Dans le plan $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, on considère la droite (d) passant par l'origine du repère et le point de coordonnées $(H\,;R)$, où H et R sont deux réels strictement positifs. Soit $\mathscr{D}$ le domaine compris entre (d), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = H$. On considère le cône de révolution engendré par la rotation de $\mathscr{D}$ autour de l'axe des abscisses.



Pour calculer le volume engendré, on découpe l'intervalle $[0\,;H]$ en $n \in \mathbb{N}^*$ intervalles de même amplitude, que l'on note I_k pour $k = 0,\ldots,n-1$, et sur chaque intervalle, on construit le cylindre intérieur au cône.

1) Quelle est l'amplitude des intervalles I_k ?

2) On note $I_k = [x_k\,;x_{k+1}]$. Pour tout $k = 0,\ldots,n$, exprimer x_k en fonction de H, k et n.

3) Pour tout $k = 0,\ldots,n-1$, démontrer que le volume du cylindre construit sur l'intervalle I_k est :

$$\mathscr{V}_k = \frac{1}{n^3}\pi R^2 H k^2.$$

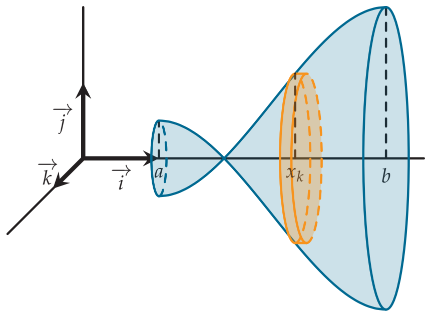
4) Démontrer que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathscr{V}_k = \frac{\pi R^2 H}{6} \times \frac{(n-1)(2n-1)}{n^2}.$$

5) En déduire le volume du cône.

Partie B : Généralisation

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I = [a\,;b]$ et $\mathscr{D}$ le domaine compris entre $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$. On considère le corps de révolution engendré par la rotation de $\mathscr{D}$ autour de l'axe des abscisses.



Alors, le volume du corps considéré est :

$$\mathscr{V} = \lim_{n\to+\infty} \pi \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)^2\,\Delta x.$$

Préciser les valeurs de x_k et Δx en fonction de a, b et n.

En terme d'intégrale, on a alors : $\mathscr{V} = \pi\int_a^b f(x)^2\,dx$.

Partie C : Application

Dans chacun des cas suivants :

1) représenter l'objet obtenu par la révolution du domaine $\mathscr{D}$ défini comme dans la partie **B** ;

2) nommer cet objet (on pourra effectuer des recherches sur le Web) ;

3) calculer son volume.

a) $f : x \mapsto x+1$, où $I = [1\,;5]$.

b) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$, où $I = [a\,;b]$ avec $0 < a < b$.

c) $f : x \mapsto \sqrt{x}$, où $I = [0\,;h]$ avec $h > 0$.

d) $f : x \mapsto \sqrt{R^2 - x^2}$, où $I = [0\,;R]$ avec $R > 0$.

e) $f : x \mapsto \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, où $I = [-a\,;a]$ avec $a > 0$ et $b > 0$.

À la fin de ce chapitre, je dois être capable de :

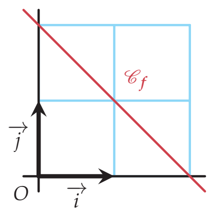
- Calculer l'intégrale d'une fonction positive simple
- Déterminer des primitives des fonctions usuelles
- Déterminer des primitives des fonctions composées
- Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive
- Encadrer une intégrale
- Déterminer une aire en utilisant le calcul intégral

QCM d'auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

Pour chaque question, plusieurs réponses sont proposées. Déterminer celles qui sont correctes.

Pour les exercices 92 à 94, on considère le domaine $\mathscr{D}$ compris entre $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.



92 L'aire de $\mathscr{D}$ est égale à :

a) 1 u.a. b) 2 u.a. c) 4 u.a.

93 Si l'unité graphique est de 1 cm pour une unité sur chaque axe, alors l'aire de $\mathscr{D}$ est égale à :

a) 1 cm² b) 2 cm² c) 4 cm²

94 Si l'unité graphique est de 0,5 cm pour une unité pour l'axe des abscisses et de 4 cm pour une unité sur l'axe des ordonnées, alors l'aire de $\mathscr{D}$ est égale à :

a) 1 cm² b) 2 cm² c) 4 cm²

95 Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$ est :

a) $x \mapsto \ln(x)$ b) on ne sait pas c) $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$ d) $x \mapsto \ln(-x)$

96 Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0\,;+\infty[$ est :

a) $x \mapsto \sqrt{x}$ b) $x \mapsto -\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$ c) on ne sait pas d) $x \mapsto 2\sqrt{x}$

97 Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$ sur $]-\infty\,;0[$ est :

a) $x \mapsto \dfrac{1}{2x^2}$ b) $x \mapsto -\dfrac{1}{2x^2}$ c) $x \mapsto \dfrac{1}{3x^2}$ d) $x \mapsto -\dfrac{1}{3x^2}$

98 Une primitive de $x \mapsto x^8$ sur $\mathbb{R}$ est :

a) $x \mapsto 8x^7$ b) $x \mapsto 9x^7$ c) $x \mapsto \dfrac{x^9}{9}$ d) $x \mapsto \dfrac{x^9}{8}$

99 Une primitive de $x \mapsto -\cos(x)$ sur $\mathbb{R}$ est :

a) $x \mapsto \sin(x)$ b) $x \mapsto -\sin(x)$ c) $x \mapsto \sin(-x)$ d) $x \mapsto -\sin(-x)$

100 Une primitive de $x \mapsto \sin(2x+7)$ sur $\mathbb{R}$ est :

a) $x \mapsto 2\cos(2x+7)$ b) $x \mapsto -2\cos(2x+7)$ c) $x \mapsto \frac{1}{2}\cos(2x+7)$ d) $x \mapsto -\frac{1}{2}\cos(2x+7)$

101 Une primitive de $x \mapsto \mathrm{e}^{x^2}$ sur $\mathbb{R}$ est :

a) $x \mapsto \mathrm{e}^{x^2}$ b) $x \mapsto 2x\mathrm{e}^{x^2}$ c) on ne sait pas

102 Une primitive de $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{1-\cos(x)}$ sur $]0\,;2\pi[$ est :

a) $x \mapsto \ln(1-\cos(x))$ b) $x \mapsto \sqrt{1-\cos(x)}$ c) $x \mapsto \dfrac{1}{(1-\cos(x))^2}$ d) $x \mapsto \dfrac{1}{1-\cos(x)}$

103 Une primitive de $x \mapsto -\dfrac{\sin(x)}{(1-\cos(x))^2}$ sur $]0\,;2\pi[$ est :

a) $x \mapsto \ln(1-\cos(x))$ b) $x \mapsto \sqrt{1-\cos(x)}$ c) $x \mapsto \dfrac{1}{(1-\cos(x))^2}$ d) $x \mapsto \dfrac{1}{1-\cos(x)}$

104 Une primitive de $x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ sur $]-\infty\,;0[$ est :

a) $x \mapsto \ln(x)$ b) on ne sait pas c) n'existe pas d) $x \mapsto -\ln(-x)$

On considère f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$.

105 $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t =$

a) $\displaystyle\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t$ b) $\displaystyle-\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t$ c) $\displaystyle-\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ d) $\displaystyle\int_b^a (-f)(t)\,\mathrm{d}t$

106 Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$, alors le signe de f sur $[a\,;b]$ est :

a) négatif b) positif c) on ne sait pas

Soient f une fonction continue sur un intervalle $[0\,;1]$ et (u_n) la suite définie pour $n \geqslant 0$ par $u_n = \displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t$.

107 Si f est positive alors (u_n) est :

a) croissante b) décroissante c) non monotone

108 Si $f(t) = \mathrm{e}^t$ alors (u_n) :

a) est minorée par 0 b) est majorée par e c) n'est ni minorée, ni majorée

109 Si $f(t) = -1$ alors (u_n) :

a) est négative b) converge vers 0 c) diverge vers $+\infty$

Travaux pratiques

Il est en général assez difficile, voire impossible, pour une fonction continue quelconque, d'en donner une primitive et par conséquent d'en calculer l'intégrale sur un intervalle $[a\,;b]$ donné. Il existe cependant des méthodes d'intégration numérique.

On considèrera pour cette section la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

TP 1 Méthode de Monte-Carlo

INFO ALGO

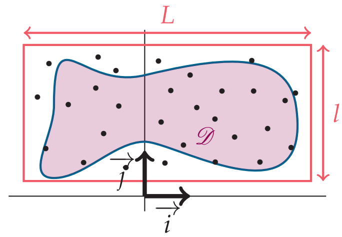
On cherche à évaluer $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. On note $\mathscr{D}$ le domaine décrit par cette intégrale.

A Principe de la méthode

1) Dans un plan muni d'un repère orthogonal, on considère un domaine $\mathscr{D}$, d'aire $\mathscr{A}$, autour duquel on considère un rectangle de dimensions, et donc d'aire $\mathscr{R}$, connues.

2) On choisit aléatoirement N points dans ce rectangle et on compte le nombre n de points qui appartiennent à $\mathscr{D}$.

3) Si le choix des points est suffisamment aléatoire, il semble assez naturel que l'aire de $\mathscr{D}$ est proportionnelle au nombre de points appartenant à $\mathscr{D}$.



On pourra se reporter au chapitre Lois à densité, p. 384 pour une approche probabiliste de cette méthode.

B Mise en application

On considère l'algorithme suivant :

```
Liste des variables utilisées
  N,n,i : entiers
  x,y : réels
Entrées
  Saisir N
  Donner à n la valeur 0
Traitements
  Pour i variant de 1 à N faire
    Donner à x la valeur NombreAléatoireEntre(...;...)
    Donner à y la valeur NombreAléatoireEntre(...;...)
    Si ............ Alors
      Donner à n la valeur n+1
    Fin Si
  Fin Pour
Sortie
  Afficher « L'aire de 𝒟 est proche de ...... u.a. »
Fin de l'algorithme
```

1) a) Étudier f sur $[0\,;1]$ et en déduire les dimensions du « meilleur » rectangle contenant le domaine $\mathscr{D}$.

b) Compléter en conséquence les lignes 9. et 10. de l'algorithme.

2) Déterminer la relation de proportionnalité reliant $\mathscr{A}$ et n et compléter en conséquence la ligne 16. de l'algorithme.

3) Déterminer à quelle condition un point de coordonnées $(x\,;y)$ appartient à $\mathscr{D}$ et compléter la ligne 11.

4) Tester cet algorithme à l'aide d'un logiciel adapté et donner une valeur approchée de I.

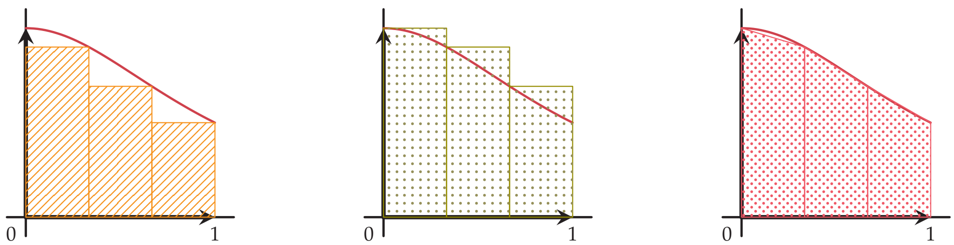
TP 2 Méthode des trapèzes

INFO ALGO

On cherche à évaluer $I = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. On note $\mathscr{D}$ le domaine décrit par cette intégrale.

A Principe de la méthode

Dans l'activité d'introduction p. 180, la figure géométrique simple utilisée pour approximer un domaine était le rectangle, son aire étant très facile à calculer.
Le trapèze est une autre figure géométrique simple dont l'aire est aussi facile à calculer et graphiquement, il semble proposer une meilleure approximation du domaine que le rectangle :



On suppose que l'on découpe l'intervalle $[0\,;1]$ en n intervalles égaux, pour $n \in \mathbb{N}^*$ ($n = 3$ sur les schémas ci-dessus) et sur chaque intervalle $[a\,;b]$, on construit le trapèze dont les longueurs des bases sont $f(a)$ et $f(b)$.

B Mise en application

1) a) Faire un schéma du cas général.

b) Quelle est la forme des intervalles $[a\,;b]$ et quel est leur nombre ?

c) Rappeler la formule de l'aire du trapèze puis en déduire l'aire de chaque trapèze construit.

2) En s'inspirant de l'activité d'introduction p. 180, écrire un algorithme permettant de donner une valeur approchée de I.

Cette méthode peut être comprise comme une méthode d'approximation affine puisque sur chaque intervalle $[a\,;b]$, on approxime $\mathscr{C}_f$ par le segment joignant les points de coordonnées $(a\,;f(a))$ et $(b\,;f(b))$.

TP 3 Approximation par un polynôme de degré 2

INFO

On cherche à évaluer $I = \displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

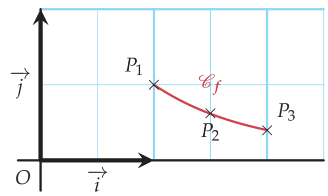
A Principe de la méthode

1) Sur un intervalle $[a\,;b]$, on approxime au mieux f par un polynôme P de degré 2.

2) On calcule $\displaystyle\int_a^b P(x)\,\mathrm{d}x$ qui donne alors une valeur approchée de $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

B Mise en application

Sur l'intervalle $[1\,;2]$, on choisit un nombre fini de points appartenant à $\mathscr{C}_f$ par lesquels on veut faire passer une parabole représentant un polynôme $P : x \mapsto ax^2 + bx + c$.



1) Pourquoi choisit-on trois points ?

2) Déterminer les trois équations du système dont sont solutions a, b et c en fonction de P et f.

3) **a)** Résoudre ce système (avec un logiciel de calcul).

b) En déduire l'expression de $P(x)$.

4) Représenter f et P sur $[1\,;2]$ et vérifier que P est une bonne approximation de f.

5) En déduire une valeur approchée de I.

C Limites du procédé

1) En suivant le même principe, approximer f sur l'intervalle $[0\,;1]$.

2) Représenter f et P sur l'intervalle $[0\,;1]$ et discuter de la qualité de cette approximation.

3) Que pourrait-on faire pour améliorer cette approximation ?

Récréation, énigmes

1) Un procédé ancien de calcul de longueurs, d'aires et de volumes porte le nom de « méthode d'exhaustion ».

a) Expliquer le postulat d'Antiphon, ses limites mises en avant par ses détracteurs et enfin expliquer pourquoi le postulat d'Eudoxe résout le problème.

b) Plus précisément, comment s'appelle la recherche de l'aire d'une surface ? Expliquer le nom.

c) Quelle est celle qui est réputée impossible ?

d) Quelle est celle qui a un lien avec le logarithme népérien ?

e) Quels sont les deux mathématiciens qui améliorèrent grandement ce procédé en faisant le lien avec la notion de dérivation ?

2) En mathématiques, il y a deux grandes théories de l'intégration, dues à Bernhard Riemann (1826 - 1866) et Henri-Léon Lebesgue (1875 - 1941). Quelle est la différence d'approche entre ces deux théories ?

PRÉPARER LE BACCALAURÉAT

Présentation de l'épreuve

Durée : 4 heures **Coefficient** : 7

L'épreuve comporte **3 à 5 exercices indépendants**, notés sur 3 à 10 points.

Ces exercices abordent une grande partie des connaissances envisagées dans le programme. Certains vous demanderont une **restitution organisée de connaissances** (comme la rédaction d'une démonstration figurant au programme), d'autres l'**application directe** de résultats ou de méthodes. Enfin, certaines **questions ouvertes** pourront amener à l'étude d'une situation conduisant à choisir un modèle simple, à émettre une conjecture, à expérimenter, à formuler un raisonnement.

Conseils

La veille de l'épreuve

Pensez à préparer : votre calculatrice (piles neuves et en mode Examen – à partir de 2018), une règle, un compas, plusieurs stylos de couleurs différentes (attention à ne pas utiliser le rouge) et une bouteille d'eau.

Les 5 premières minutes

Quand vous recevez le sujet, lisez bien les indications de la première page et vérifiez le nombre de pages, la quantité d'exercices et les points associés. L'exercice portera clairement la mention « obligatoire » ou « spécialité ». Lisez une première fois les énoncés et choisissez dans quel ordre vous allez faire les exercices : par ordre croissant de difficulté (pour vous).

Au cours de l'épreuve

Lisez attentivement les énoncés. Si vous n'arrivez pas à résoudre la question, ne perdez pas de temps : allez à la question suivante ou à un autre exercice. Vous pourrez revenir à cette question plus tard. Changer de page pour un nouvel exercice et laisser de l'espace pour revenir à une question non traitée.

Les 10 dernières minutes

Quand vous avez terminé, relisez votre copie. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision de votre raisonnement seront prises en compte dans l'appréciation de votre copie. Soignez votre écriture. Encadrez les résultats.

À la fin de l'épreuve, vérifiez que vous avez bien indiqué votre nom dans le cartouche adéquat et que toutes vos pages sont dans la chemise.

Des problèmes et QCM pour préparer le bac

Ce chapitre regroupe un ensemble d'activités qui utilisent les notions de différents chapitres et permettent de développer les compétences utiles pour le bac :
- consolider vos connaissances et les organiser ;
- mettre en œuvre une recherche de façon autonome ;
- mener des raisonnements ;
- avoir une attitude critique vis-à-vis des résultats obtenus ;
- communiquer à l'écrit.

Problèmes ouverts

Les **problèmes ouverts** se définissent comme des « énoncés courts qui n'induisent ni la méthode, ni la solution ». Il est possible de s'engager dans des essais, des conjectures, des projets de résolution, des contre-exemples.

Problèmes de synthèse

Ils font appel à des notions étudiées dans différents chapitres avec des questions qui s'enchaînent. Ils permettent de réactiver un ensemble de connaissances et d'établir des liens entre les chapitres.

QCM de synthèse

Les **questionnaires à choix multiples** permettent de vérifier l'acquisition des connaissances et des raisonnements en s'affranchissant de la rédaction.

PROBLÈMES OUVERTS

1 Trouver une suite strictement décroissante et convergente vers 2.

2 En 2015, Fanta dépose 1 000 € sur un compte en banque rémunéré à 2 % par an.

Par ailleurs, chaque année, elle prévoit d'ajouter 200 € supplémentaires (on considère que les intérêts et l'ajout de ces 200 € interviennent au même moment).

Écrire un algorithme :

- demandant à l'utilisateur de rentrer une somme d'argent S ;
- déterminant l'année à partir de laquelle la somme d'argent sur le compte de Fanta est supérieure à S.

3 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 0{,}5u_n + 1$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

On considère la suite (S_n) définie pour tout entier $n \geqslant 0$ par $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

Déterminer la limite de la suite (S_n).

4 On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^{x+1} + e^{1-x}}{2}$ et $g(x) = \dfrac{e^{x+1} - e^{1-x}}{2}$.

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f et $\mathscr{C}_g$ celle de g.

Pour tout réel a, on note A le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a et $\mathscr{T}_A$ la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A, B le point de $\mathscr{C}_g$ d'abscisse a et $\mathscr{T}_B$ la tangente à $\mathscr{C}_g$ et $M(x_M\ ;\ y_M)$ le point d'intersection des tangentes $\mathscr{T}_A$ et $\mathscr{T}_B$.

Déterminer le lieu géométrique $\mathscr{E}$ du point M lorsque a varie dans $\mathbb{R}$.

5 Donner et représenter une fonction polynôme de degré 3 :

1) s'annulant une fois
2) s'annulant deux fois
3) s'annulant trois fois

6 Soient f et g deux fonctions définies et dérivables en un nombre réel a telles que $f(a) = g(a) = 0$ et $g'(a) \neq 0$.

1) Montrer que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(a)}{g'(a)}$.
   Indication : Considérer le taux d'accroissement des fonctions f et g en a.
2) En vous aidant de la question précédente, déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(5x) - \cos(3x)}{\sin(4x) - \sin(3x)}$

7 Soit f une fonction continue d'un intervalle $[a\ ;\ b]$ dans $[a\ ;\ b]$.

Démontrer que la courbe représentative de f coupe au moins une fois la droite d'équation $y = x$.

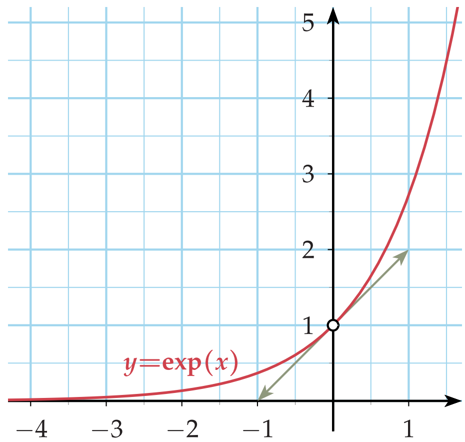
8 Soit n un entier naturel non nul et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 e^x.$$

Conjecturer une formule pour la dérivée n^e de f et la démontrer ensuite.

9 **D'après Bac Liban 2015**

On considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = e^x$ tracée ci-dessous.



Pour tout réel m strictement positif, on note $\mathcal{D}_{\Updownarrow}$ la droite d'équation $y = mx$.

A l'aide de la représentation graphique ci-dessus, conjecturer le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite $\mathcal{D}_{\Updownarrow}$ puis le démontrer.

10 **Intégrales de Wallis**

John Wallis est un mathématicien anglais, né en 1616, mort en 1703.

On appelle intégrales de Wallis les termes de la suite (W_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt$$

1) Démontrer que (W_n) est convergente.
2) a) Pour des valeurs de n comprises entre 1 et 100, représenter graphiquement, à l'aide d'un logiciel approprié, la suite de fonctions $(x \mapsto \sin^n x)$.
   b) Que peut-on conjecturer sur la limite de (W_n) ?

3) On souhaite démontrer cette conjecture, c'est-à-dire que W_n est aussi proche de 0 que l'on veut, dès que n est suffisamment grand.
En d'autres termes, cela revient à montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$ (de préférence petit) $W_n \leqslant \varepsilon$ dès que $n \geqslant n_0$, n_0 étant à déterminer.
   a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on souhaite découper W_n en deux de telle sorte que :
$$W_n \leqslant a \sin^n a + \frac{\varepsilon}{2}.$$
   En observant à nouveau l'évolution de la suite de fonction $(x \mapsto \sin^n x)$, où est-il astucieux de choisir un réel $a \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ permettant d'obtenir la majoration ci-dessus ?
   b) Démontrer algébriquement cette inégalité en précisant l'intervalle auquel appartient a.
   c) Démontrer qu'il existe un réel n_0 répondant au problème posé et conclure.

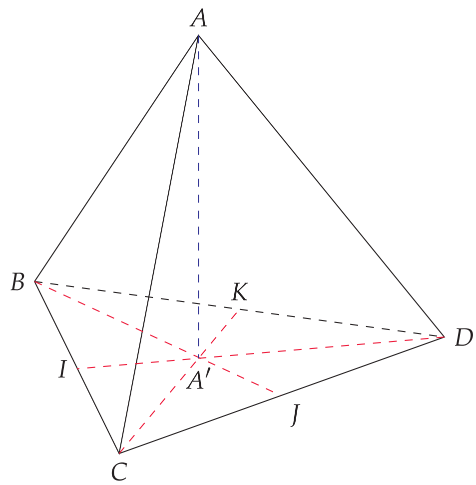
11 On considère les fonctions f et g définies sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \ln x$ et $g(x) = x - \ln x$.
On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives dans un repère orthonormé.
Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ admettent-elles des tangentes communes ?

12 On pose $M = 2015^{2016}$ et $N = 2016^{2015}$.
Comparer les deux entiers M et N.

13 On lance une pièce de monnaie équilibrée n fois (avec $n \geqslant 1$).
Comment doit-on choisir n pour que la probabilité d'obtenir au moins une fois pile soit supérieure à 0,999 ?

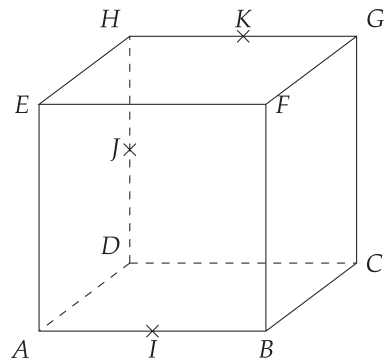
14 Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,; \vec{i}, \vec{j}\right)$.
On considère la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = \ln x$.
Montrer qu'il existe un unique point M de $\mathscr{C}$ situé à une distance minimale de l'origine et préciser la position de ce point.

15 On appelle médianes d'un tétraèdre $ABCD$ les droites qui relient un sommet avec le centre de gravité de la face opposée.
Ci-dessous, on a représenté la médiane (AA').



Démontrer que les médianes d'un tétraèdre régulier sont concourantes, et que leur point d'intersection est le centre d'une sphère circonscrite au tétraèdre.

16 $ABCDEFGH$ est un cube. I est le milieu de $[AB]$, J est le milieu de $[HD]$ et K est le milieu de $[HG]$.
On se place dans le repère $(A\,; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



1) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{CE}$ est un vecteur normal au plan (IJK).
2) Démontrer que la droite (BD) est parallèle au plan (IJK).
3) Soit M un point de la droite (CE). Quelle est la position du point M sur la droite (CE) pour laquelle le plan (BDM) est parallèle au plan (IJK) ?

17 **Intersection de trois plans**
On considère trois plans de l'espace.
Quelle peut être la nature de l'intersection de ces trois plans ? Donner un ou des exemples de chaque cas.

18 Soit $A(3\,;\,2\,;\,1)$, $B(2\,;\,4\,;\,0)$, $C(0\,;\,2\,;\,3)$ et $D(-1\,;\,2\,;\,2)$ quatre points de l'espace dans un repère orthonormé $(O\,; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

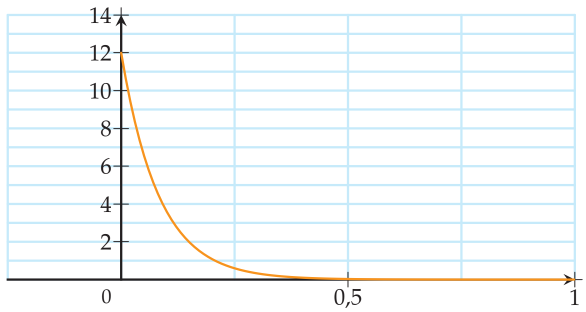
1) Montrer que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.
2) Existe-t-il une droite (d) qui soit perpendiculaire à la fois à (AB) et à (DC) ? La déterminer.
3) Démontrer que la distance minimale entre les droites (AB) et (CD) est la distance MN avec M intersection de (d) et (AB) et N intersection de (d) et (CD).

19 On choisit au hasard un nombre complexe de l'ensemble des nombres de la forme $z = a + ib$ où a et b sont deux nombres entiers tels que $0 \leqslant a \leqslant 10$ et $0 \leqslant b \leqslant 10$.
On considère les évènements suivants :
- A : « le nombre z vérifie $|z| \leqslant 5$ » ;
- B : « le nombre z vérifie $\text{Re}(z) \leqslant 5$ ».

Déterminer les probabilités $P_B(A)$ et $P_A(B)$.

20 Pour une soirée organisée chez elle, Mira a préparé des verres à l'avance : 60 % de jus d'orange et 40 % de punch. Sur les verres de jus d'orange, elle a mis une ombrelle une fois sur deux ; sur ceux de punch, trois fois sur cinq.
Comme les deux boissons ont la même couleur, on ne peut pas les discerner. Nicolas qui préférerait du punch doit-il plutôt choisir un verre avec ombrelle ou non ?

21 Diane et Camilla se téléphonent régulièrement.
On admet que la variable aléatoire donnant le temps (en années) qui s'écoule entre deux coups de téléphone suit une loi à densité connue (uniforme, exponentielle ou normale) dont la courbe donnée-ci dessous passe par le point de coordonnées $(0\ ;\ 12)$.



Déterminer la probabilité qu'il s'écoule plus de deux mois entre deux coups de téléphone.

22 La maison d'Aga et Manu se trouve au bord d'une rivière et, parfois, la rivière s'approche dangereusement de leur jardin.
On appelle D la variable aléatoire donnant la distance minimale observée (en mètres) entre la rivière et le jardin durant une année.
Par exemple, si durant une année :
- la rivière s'est approchée au plus proche à 1,5 m du jardin, on a $D = 1{,}5$;
- la rivière est rentrée de 2 m dans le jardin, on a $D = -2$.

Tous deux statisticiens, Aga et Manu ont modélisé la situation à l'aide d'une variable aléatoire D suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(1\ ;\ 0{,}7^2\right)$.
Déterminer la probabilité que, sur une période de dix ans, ils subissent moins de 2 inondations dans le jardin (on précisera quelle hypothèse « raisonnable » on devra faire sur le fait d'avoir une inondation une année par rapport aux autres).

23 Les enquêteurs sont très ennuyés... Un témoin a formellement identifié l'auteure d'un vol mais celle-ci a une sœur jumelle qui lui ressemble en tout point.
- L'une des deux sœurs est basketteuse professionnelle (et plutôt douée, 51 % de réussite au tir la saison passée !) et elle participait à un match hier soir au moment du vol.
- L'autre est professeure de S.V.T et assure qu'elle corrigeait des copies au moment du vol.

L'inspecteur chargé de l'enquête, après avoir consulté la feuille du match d'hier soir et constaté que la basketteuse avait inscrit 9 paniers sur 30 tentatives, s'exclame : « vous êtes toutes les deux complices, et je peux le prouver ! (enfin, au risque d'erreur de 5 %) ».

Expliquer le raisonnement de l'inspecteur.

PROBLÈMES DE SYNTHÈSE

1 On considère la suite définie par $u_0 = \ln(2)$ et $u_{n+1} = \ln\left(2\mathrm{e}^{u_n} - 1\right)$ pour tout entier $n \geqslant 0$. On admet que cette suite est définie pour tout entier naturel n.

Partie A

Dans cette question on utilisera les **prérequis** suivants :

- On dit qu'une suite (v_n) est non majorée si pour tout réel M, il existe un entier n_0 tel que $v_{n_0} > M$;
- la définition d'une suite croissante ;
- la définition d'une suite qui tend vers $+\infty$.

Démontrer la propriété suivante :
Si une suite (v_n) est croissante et non majorée alors (v_n) a pour limite $+\infty$.

Partie B

1) Calculer u_1 et u_2.
2) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \ln(2\mathrm{e}^x - 1)$.
   a) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
   b) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
3) Montrer par récurrence que $u_{n+1} \geqslant u_n \geqslant 0$ pour tout $n \geqslant 0$.
4) Dans cette question on va montrer que la suite (u_n) n'est pas majorée en raisonnant par l'absurde. On suppose donc dans cette question que la suite (u_n) est majorée.
   a) En déduire que (u_n) est convergente vers une limite ℓ.
   b) En admettant que la limite ℓ vérifie $\ell = \ln(2\mathrm{e}^{\ell} - 1)$, déterminer ℓ.
   c) En déduire que la suite (u_n) ne peut pas être majorée.
5) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Partie C

On considère la suite (v_n) définie par $v_n = \mathrm{e}^{u_n} - 1$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

1) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 2 dont on déterminera le premier terme.
2) En déduire que $u_n = \ln\left(1 + 2^n\right)$.
3) Retrouver d'une autre manière la limite de la question 5 de la partie B.
4) Déterminer la valeur de a telle que
$$\sum_{k=0}^{5} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_5 = \ln(a).$$

2 **D'après Bac (Polynésie - 2012)**

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

```
Entrée
Saisir le nombre entier naturel non nul N
Traitement
Affecter à U la valeur 0
Pour k allant de 0 à N − 1
     Affecter à U la valeur 3u − 2k + 3
Fin pour
Sortie
Afficher U
```

Quel est l'affichage en sortie lorsque $N = 3$?

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.

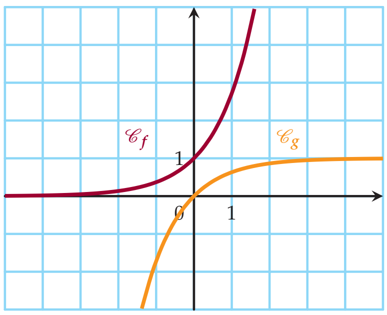
1) Calculer u_1 et u_2.
2) a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$.
   b) En déduire la limite de la suite (u_n).
3) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
4) Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - n + 1$.
   a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
   b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 3^n + n - 1$.
5) Soit p un entier naturel non nul.
   a) Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 10^p$?
   On s'intéresse maintenant au plus petit entier n_0.
   b) Justifier que $n_0 \leqslant 3p$.
   c) Déterminer à l'aide de la calculatrice cet entier n_0 pour la valeur $p = 3$.
   d) Proposer un algorithme qui, pour une valeur de p donnée en entrée, affiche en sortie la valeur du plus petit entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, on ait $u_n \geqslant 10^p$.

3 D'après Bac (Asie - 2013)

On considère les fonctions f et g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^x \quad \text{et} \quad g(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}.$$

Ci-dessous, on donne les courbes représentatives de ces deux fonctions :



Graphiquement, ces deux courbes semblent admettre deux tangentes communes.
Notons $(\mathscr{T})$ une droite qui est à la fois tangente à $\mathscr{C}_f$ en un point d'abscisse a et à $\mathscr{C}_g$ en un point d'abscisse b.

PARTIE A : Analyse

Dans cette partie, on va analyser la situation et trouver des conditions nécessaires sur a et b.

1) a) Déterminer en fonction de a une équation de $(\mathscr{T})$.
   b) Déterminer en fonction de b une équation de $(\mathscr{T})$.
   c) En déduire que, d'une part, $a = -b$ et que d'autre part, a est solution de l'équation :

$$2(x-1)\mathrm{e}^x + 1 = 0.$$

2) On pose φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = 2(x-1)\mathrm{e}^x + 1$.
   a) Dresser le tableau de variation complet de φ.
   b) En déduire que le réel a possède deux valeurs possibles.
   c) À l'aide de la calculatrice, donner des valeurs approchées à 10^{-2} de ces valeurs.

PARTIE B : Synthèse

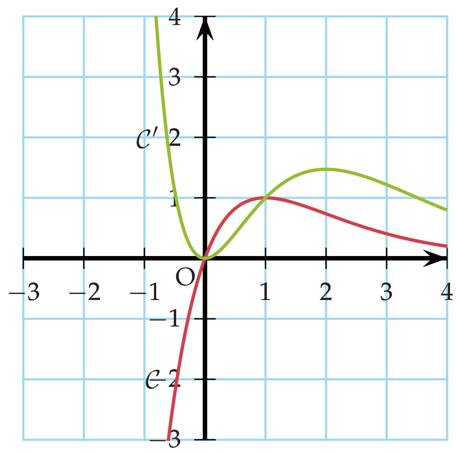
Dans cette partie, on va effectuer la synthèse du raisonnement et montrer qu'il suffit que a et b satisfassent les deux conditions trouvées pour que $(\mathscr{T})$ soit tangente à la fois à $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
Soient donc a et b deux réels tels que $a = -b$ et $2(a-1)\mathrm{e}^a + 1 = 0$.

Démontrer que l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en un point d'abscisse a est identique à l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_g$ en un point d'abscisse b.

4

Soient f et g les fonctions définies sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par : $f(x) = x\,\mathrm{e}^{1-x}$ et $g(x) = x^2\,\mathrm{e}^{1-x}$.

Les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ sont respectivement notées $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.



1) **Étude des fonctions f et g**
   a) Déterminer les limites des fonctions f et g en $-\infty$.
   b) Justifier le fait que fonctions f et g ont pour limite 0 en $+\infty$.
   c) Étudier le sens de variation de chacune des fonctions f et g et dresser leurs tableaux de variation respectifs.
2) **Calcul d'intégrales**
   Pour tout entier naturel n, on définit l'intégrale I_n par :
   $I_n = \int_0^1 x^n\,\mathrm{e}^{1-x}\,dx$ (en particulier $I_0 = \int_0^1 \mathrm{e}^{1-x}\,dx$).
   a) Calculer la valeur exacte de I_0.
   b) Pour tout réel x et tout entier naturel n, on pose $g_n(x) = x^n\,\mathrm{e}^{1-x}$ (en particulier $g_0 = \mathrm{e}^{1-x}$).
   Établir que pour tout réel x et tout entier naturel n, $g'_{n+1}(x) = (n+1)g_n(x) - g_{n+1}(x)$.
   En déduire que pour tout entier naturel n :
   $I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n$.
   c) En déduire la valeur exacte de I_1, puis celle de I_2.

3) **Calcul d'une aire plane**

a) Étudier la position relative des courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

b) On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire, exprimée en unité d'aire, de la partie du plan comprise d'une part entre les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, d'autre part entre les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.
En exprimant $\mathcal{A}$ comme différence de deux aires que l'on précisera, démontrer l'égalité :
$\mathcal{A} = 3 - \mathrm{e}$.

4) **Étude de l'égalité de deux aires**

Soit a un réel strictement supérieur à 1.
On désigne par $S(a)$ l'aire, exprimée en unité d'aire, de la partie du plan comprise d'une part entre les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, d'autre part entre les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = a$.
On admet que $S(a)$ s'exprime par :
$S(a) = 3 - \mathrm{e}^{1-a}\left(a^2 + a + 1\right)$.

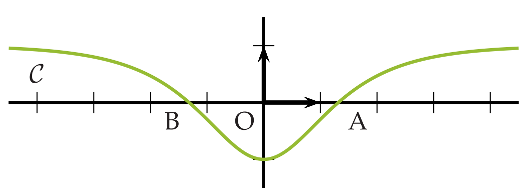
L'objectif de cette question est de prouver qu'il existe une et une seule valeur de a pour laquelle les aires $\mathcal{A}$ et $S(a)$ sont égales.

a) Démontrer que l'équation $S(a) = \mathcal{A}$ est équivalente Ã l'équation :
$\mathrm{e}^a = a^2 + a + 1$.

b) *Dans cette question, toute trace d'argumentation, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Conclure, quant à l'existence et l'unicité du réel a, solution du problème posé.

5 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = 1 - \dfrac{4\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+1}$.
On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Sur le graphique ci-dessous on a tracé la courbe $\mathcal{C}$. Elle coupe l'axe des abscisses aux points A et B.



Partie A

L'objet de cette partie est de démontrer certaines propriétés de la fonction f que l'on peut conjecturer à partir du graphique.

1) La fonction f semble croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

a) Vérifier que pour tout reel x, $f'(x) = \dfrac{4\,\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^{2x}-1\right)}{\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right)^2}$.

b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

2) La droite d'équation $x = 0$ semble être un axe de symétrie de la courbe $\mathcal{C}$.
Démontrer que cette conjecture est vraie.

3) On désigne par a l'abscisse du point A et on pose $c = \mathrm{e}^a$.

a) Démontrer que le réel c est une solution de l'équation $x^2 - 4x + 1 = 0$.
En déduire la valeur exacte de a.

b) Donner le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

Partie B

L'objet de cette partie est d'étudier quelques propriétés de la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

1) Déterminer les variations de la fonction F sur $\mathbb{R}$.

2) Interpréter géométriquement le réel $F(a)$. En déduire que $-a \leqslant F(a) \leqslant 0$.

3) On cherche la limite éventuelle de F en $+\infty$.

a) Démontrer que pour tout réel positif t, $f(t) \geqslant 1 - 4\,\mathrm{e}^{-t}$.

b) En déduire que pour tout réel positif x, $F(x) \geqslant x - 4$ et déterminer la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

4) *Dans cette question. toute trace de recherche ou d'initiative, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Déterminer la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.

6 D'après Bac (Antilles-Guyane - 2013)

Partie A

Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :
$$f(x) = (x+1)\mathrm{e}^x.$$
Dresser le tableau de variations complet de f.

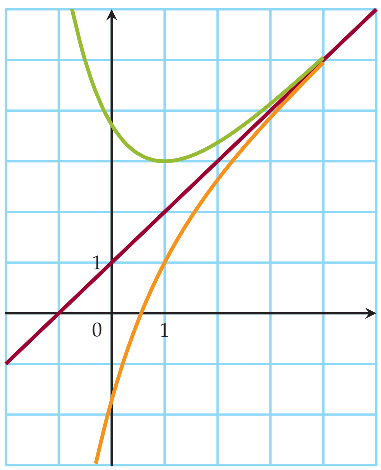
Partie B

On définit la famille de fonctions g_m sur $\mathbb{R}$ par :
$$g_m(x) = x + 1 - m\mathrm{e}^{-x}$$
et on note $\mathscr{C}_m$ la courbe de g_m dans un repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ du plan.

1) a) Démontrer que $g_m(x) = 0$ si et seulement si $f(x) = m$.

   b) Déduire de la partie **A** le nombre de points d'intersection entre la courbe $\mathscr{C}_m$ et l'axe des abscisses en fonction du réel m.

2) Ci-dessous, on a représenté les courbes $\mathscr{C}_0$, $\mathscr{C}_\mathrm{e}$ et $\mathscr{C}_{\text{-e}}$.



Identifier chacune de ces courbes, en justifiant.

3) Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}_m$ par rapport à la droite (d) d'équation $y = x + 1$ selon les valeurs de m.

4) À partir de cette question, a désigne un réel positif et on appelle $\mathscr{D}_a$ le domaine du plan compris entre $\mathscr{C}_\mathrm{e}$ et $\mathscr{C}_{\text{-e}}$, l'axe (Oy) et la droite d'équation $x = a$. Enfin, on désigne par $\mathscr{A}(a)$ l'aire de $\mathscr{D}_a$, exprimée en unités d'aires.

   a) Hachurer $\mathscr{D}_2$ et calculer son aire.

   b) Démontrer que pour tout réel positif a : $\mathscr{A}(a) = 2\mathrm{e} - 2\mathrm{e}^{1-a}$.

   c) Déterminer la limite de $\mathscr{A}(a)$ lorsque a tend vers $+\infty$.

7 D'après Bac (Métropole - 2012)

Partie A

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$ par :
$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

1) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2) Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[1\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{x(x+1)^2}$.
   Dresser le tableau de variation de la fonction f.

3) En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$.

Partie B

On considère la suite u définie pour tout entier strictement positif n par :
$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

1) Démontrer que pour tout entier strictement positif n,
$$u_{n+1} - u_n = f(n)$$
   où f est la fonction définie dans la partie A.
   En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

2) a) Soit k un entier strictement positif.
   Justifier l'inégalité $\displaystyle\int_k^{k+1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x \geqslant 0$.
   En déduire que $\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k}$.
   Démontrer l'inégalité $\ln(k+1) - \ln k \leqslant \dfrac{1}{k}$ (1).

   b) Écrire l'inégalité (1) en remplaçant successivement k par $1, 2, \ldots, n$ et démontrer que pour tout entier strictement positif n,
$$\ln(n+1) \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

   c) En déduire que pour tout entier strictement positif n, $u_n \geqslant 0$.

3) Prouver que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas de calculer sa limite.

8 Travail sur la logique - D'après Bac (Nouvelle-Calédonie - 2015)

Soient x, y et z trois nombres réels. On considère les implications (P_1) et (P_1) suivantes :

$$(P_1) \qquad (x+y+z=1) \Rightarrow \left(x^2+y^2+z^2 \geqslant \frac{1}{3}\right)$$

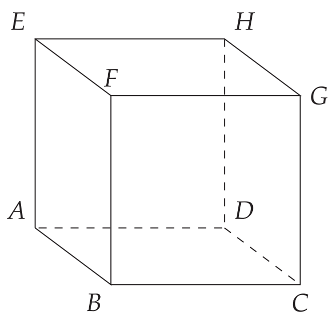
$$(P_2) \qquad \left(x^2+y^2+z^2 \geqslant \frac{1}{3}\right) \Rightarrow (x+y+z=1)$$

PARTIE A

1) Que peut-on dire de (P_2) par rapport à (P_1) ?
2) L'implication (P_2) est-elle vraie ?

PARTIE B

Dans l'espace, on considère le cube $ABCDEFGH$, représenté ci-dessous, et on définit le repère orthonormé $\left(A\,; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.



1) a) Vérifier que le plan d'équation $x+y+z=1$ est le plan (BDE).
   b) Montrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE).
   c) Montrer que l'intersection de la droite (AG) avec le plan (BDE) est le point K de coordonnées $\left(\frac{1}{3}\,; \frac{1}{3}\,; \frac{1}{3}\right)$.
2) Quelle est la nature du triangle BDE ?
3) Soit M un point de l'espace.
   a) Démontrer que si M appartient au plan (BDE), alors $AM^2 = AK^2 + MK^2$.
   b) En déduire que si M appartient au plan (BDE), alors $AM^2 \geqslant AK^2$.
   c) Soient x, y et z des réels quelconques. En appliquant le résultat de la question précédente au point M de coordonnées $(x\,;y\,;z)$, montrer que l'implication (P_1) est vraie.

9 Vrai ou faux - D'après Bac (Amérique du Sud - 2015)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\,; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Les points A, B, C sont définis par leurs coordonnées :

$$A(3\,;\,-1\,;\,4), \quad B(-1\,;\,2\,;\,-3), \quad C(4\,;\,-1\,;\,2).$$

Le plan $(\mathscr{P})$ a pour équation cartésienne :

$$2x - 3y + 2z - 7 = 0.$$

La droite (Δ) a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x &= -1+4t \\ y &= 4-t \\ z &= -8+2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Affirmation 1

Les droites Δ et (AC) sont orthogonales.

Affirmation 2

Les points A, B et C déterminent un plan et ce plan a pour équation cartésienne $2x+5y+z-5=0$.

Affirmation 3

Tous les points dont les coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ sont données par :

$$\begin{cases} x &= 1+s-2t \\ y &= 1-2s+t \\ z &= 1-4s+2t \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad t \in \mathbb{R}.$$

appartiennent au plan $(\mathscr{P})$.

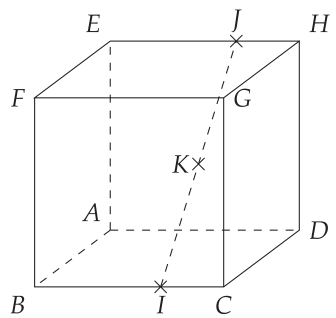
Affirmation 4

Il existe un plan parallèle au plan $(\mathscr{P})$ qui contient la droite (Δ).

10 Dans l'espace, on considère le cube $ABCDEFGH$ d'arête 1, représenté ci-dessous. Les points I et J sont définis par $\overrightarrow{BI} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{EJ} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{EH}$.

Le point K est le milieu du segment $[IJ]$ et le point P est le projeté orthogonal de G sur (FIJ).

Le but de l'exercice est de construire le point P.



1) a) Démontrer que (KFG) est le plan médiateur du segment $[IJ]$.
   b) En déduire que (IJ) est orthogonale à (FGK).
   c) Démontrer que (IJ) est orthogonale à (FGP).
   d) Démontrer que $P \in (FGK)$.
   e) En déduire que les points F, P et K sont alignés.
2) On se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$ et on appelle N le point d'intersection de la droite (GP) et du plan (ABD). Il existe donc deux réels x et y tels que $N(x\,;\,y\,;\,0)$. Le but de cette question est de déterminer les coordonnées du point N.
   a) Donner les coordonnées des points F, G, I et J.
   b) Montrer que la droite (GN) est orthogonale aux droites (FI) et (FJ).
   c) Exprimer les produits scalaires $\overrightarrow{GN} \cdot \overrightarrow{FI}$ et $\overrightarrow{GN} \cdot \overrightarrow{FJ}$ en fonction de x et y.
   d) En déduire les valeurs de x et de y.
3) Reproduire la figure et construire le point P.

11 Le « paradis de la farce » est un magasin de farces et attrapes et de déguisements.
Dans l'exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-3} près si nécessaire.

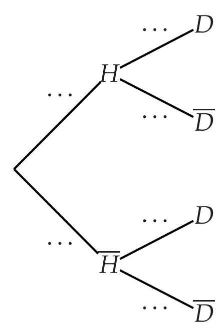
Partie A : À Halloween

Le « paradis de la farce » effectue 40 % de ses ventes pour Halloween dont 75 % de déguisements et 25 % de farces et attrapes.
Le reste de l'année, 80 % des ventes sont des farces et attrapes et 20 % des déguisements.

Dans les factures de l'année, on considère une vente prise au hasard et on définit les événements suivants :

- H : « la vente a été réalisée pour Halloween » ;
- D : « l'article vendu est un déguisement ».

1) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



2) Déterminer $P\left(\overline{H} \cap D\right)$.
3) Montrer que $P(D) = 0{,}42$.
4) Déterminer la probabilité que la vente n'ait pas eu lieu à Halloween sachant que l'article vendu est un déguisement.

Partie B : Après l'ouverture

Le magasin ouvre tous les jours du lundi au samedi à 9 h.
Le temps qui s'écoule (en minutes) avant l'arrivée du premier client suit un loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1) Déterminer λ sachant qu'en moyenne, le premier client arrive à 9 h 20.
2) Déterminer la probabilité que le premier client se présente avant 10 h.
3) Aucun client ne s'est présenté à 9 h 30.
   Quelle est la probabilité qu'il n'y ait toujours pas eu de client à 9 h 45 ?

Partie C : Boulettes et sarbacane

Le magasin dispose d'un stock de boulettes (à mettre dans les sarbacanes) dont 85 % sont colorées et les autres blanches.
Un client se présente et achète un sachet de 250 boulettes prises dans le stock (que l'on suppose suffisamment grand pour que l'on puisse assimiler le prélèvement à des tirages indépendants).
On appelle F la variable aléatoire donnant la fréquence de boulettes colorées dans le sachet.

1) Donner l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de F.
2) En déduire un encadrement par deux entiers du nombre de boulettes colorées que l'on peut s'attendre à obtenir dans le sachet au seuil de 95 %.

Partie D : Diablotins sautillants

1) Soit X une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$.

   À l'aide d'une calculatrice, déterminer le réel a tel que $P(X \leqslant \mu + a\sigma) = 0{,}99$.

   Dans la suite, on prendra $a = 2{,}3$.
2) Le jouet star de cette année est un diablotin en boîte (quand on ouvre la boîte, un diablotin sur ressort jaillit de la boîte !).
   On appelle X la variable aléatoire donnant la hauteur (en cm) à laquelle s'élève le diablotin quand on ouvre la boîte et on suppose que X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\,2)$ avec $\mu \in \mathbb{R}^{+*}$.
   a) À cause d'un problème de conception, le jouet se casse si X est supérieure à deux fois son espérance $E(X)$.

      Déterminer μ pour que la probabilité que le jouet ne se casse pas lors d'une utilisation soit de 0,99.
   b) Quelle est alors la probabilité que le diablotin s'élève entre 7 cm et 10 cm ?

QCM BILAN

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \dfrac{9}{6 - v_n} \end{cases}$.

1 Parmi les trois algorithmes suivants, lequel affiche, pour un entier naturel n donné, tous les termes de la suite, du rang 0 au rang n ?

ⓐ

```
Variables :
v est un réel
i et n sont des entiers
naturels
Début de l'algorithme :
Lire n
v prend la valeur 1
Pour i allant de 1 à n
faire
  v prend la valeur 9/(6 − v)
Fin pour
Afficher v
Fin algorithme
```

ⓑ

```
Variables :
v est un réel
i et n sont des entiers
naturels
Début de l'algorithme :
Lire n
Pour i allant de 1 à n
faire
  v prend la valeur 1
  Afficher v
  v prend la valeur 9/(6 − v)
Fin pour
Fin algorithme
```

ⓒ

```
Variables :
v est un réel
i et n sont des entiers
naturels
Début de l'algorithme :
Lire n
v prend la valeur 1
Pour i allant de 1 à n
faire
  Afficher v
  v prend la valeur 9/(6 − v)
Fin pour
Afficher v
Fin algorithme
```

2 La suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \displaystyle\int_1^n e^{x^2}\,dx$ est :

ⓐ croissante ⓑ décroissante ⓒ convergente ⓓ divergente vers $+\infty$

On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $I_n = \displaystyle\int_1^n \frac{\ln(x)}{x}\,dx$ (on peut observer que $\dfrac{\ln(x)}{x} = \dfrac{1}{2} \times 2 \times \dfrac{1}{x} \times \ln(x)$).

3 (I_n) est une suite :

ⓐ croissante majorée ⓑ croissante minorée ⓒ décroissante majorée ⓓ décroissante minorée

4 La suite (I_n) :

ⓐ a pour limite 0 ⓑ diverge vers $+\infty$ ⓒ a pour limite 1 ⓓ n'admet pas de limite

5 Quand n tend vers $+\infty$, la limite de $\dfrac{I_n}{n^2}$ est :

ⓐ 0 ⓑ 1 ⓒ $+\infty$ ⓓ $\dfrac{1}{n^2}$

On considère les suites (z_n) et (u_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $\begin{cases} z_0 = 5 \\ z_{n+1} = (2+2\mathrm{i})z_n \end{cases}$ et $u_n = |z_n|$.

6 La suite (u_n) est :

(a) arithmétique (b) géométrique (c) ni arithmétique ni géométrique

7 Le terme général de la suite (u_n) est :

(a) $5\,(2+2\mathrm{i})^n$ (b) $5\,|2+2\mathrm{i}|^n$ (c) $5 \times \left(\sqrt{8}\right)^n$ (d) $\left(5\sqrt{8}\right)^n$

8 Le césium 137 est un élément radioactif qui constitue l'une des principales sources de radioactivité des déchets des réacteurs nucléaires. Le temps T, en années, durant lequel un atome de césium 137 reste radioactif peut être assimilé à une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = \dfrac{\ln 2}{30}$.
Quelle est la probabilité qu'un atome de césium 137 reste radioactif durant au moins 60 ans ?

(a) 0,125 (b) 0,25 (c) 0,75 (d) 0,875

9 Une entreprise souhaite obtenir une estimation de la proportion de personnes de plus de 60 ans parmi ses clients, au niveau de confiance de 95 %, avec un intervalle d'amplitude inférieure à 0,05.
Quel est le nombre minimum de clients à interroger ?

(a) 400 (b) 800 (c) 1 600 (d) 3 200

10 Dans un hypermarché, 75 % des clients sont des hommes.
Un homme sur cinq achète un article au rayon bricolage, alors que sept femmes sur dix le font.
Une personne, choisie au hasard, a fait un achat au rayon bricolage. La probabilité que cette personne soit une homme a pour valeur arrondie au millième :

(a) 0,750 (b) 0,150 (c) 0,462 (d) 0,700

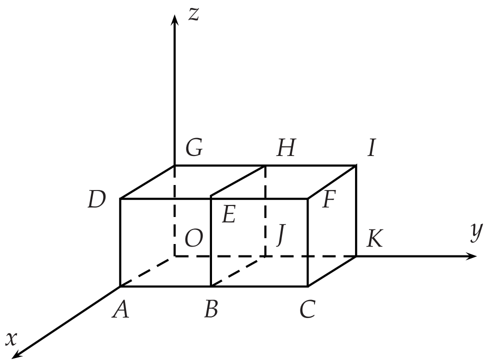
On considère l'algorithme :

```
1.  A et C sont des entiers naturels
2.  C prend la valeur 0
3.  Répéter 9 fois
4.    A prend une valeur aléatoire entière entre 1 et 7
5.      Si A > 5 alors C prend la valeur de C+1
6.      Fin Si
7.  Fin répéter
8.  Afficher C
```

11 Dans l'expérience aléatoire simulée par l'algorithme précédent, on appelle X la variable aléatoire prenant la valeur C affichée. Quelle loi suit X ?

(a) la loi $\mathscr{B}\left(9\,;\,\dfrac{2}{7}\right)$ (b) la loi $\mathscr{B}\left(9\,;\,\dfrac{3}{7}\right)$ (c) la loi $\mathscr{B}\left(9\,;\,\dfrac{4}{7}\right)$ (d) la loi $\mathscr{B}\left(9\,;\,\dfrac{5}{7}\right)$

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points : $A(1\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $B(1\ ;\ 1\ ;\ 0)$, $C(1\ ;\ 2\ ;\ 0)$, $D(1\ ;\ 0\ ;\ 1)$, $E(1\ ;\ 1\ ;\ 1)$, $F(1\ ;\ 2\ ;\ 1)$, $G(0\ ;\ 0\ ;\ 1)$, $H(0\ ;\ 1\ ;\ 1)$, $I(0\ ;\ 2\ ;\ 1)$, $J(0\ ;\ 1\ ;\ 0)$, $K(0\ ;\ 2\ ;\ 0)$ comme indiqués sur la figure ci-dessous :



12 Le triangle GBI est :

(a) isocèle (b) équilatéral (c) rectangle

13 Le produit scalaire $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{FC}$ est égal à :

(a) 1 (b) -1 (c) 2

14 La mesure en degré de l'angle $\widehat{DAH}$ est à un degré près :

(a) 2 degrés (b) 125 degrés (c) 45 degrés

15 Les points B, C, I, H :

(a) sont non coplanaires (b) forment un rectangle (c) forment un carré

16 Une représentation paramétrique de paramètre $t \in \mathbb{R}$ de la droite (KE) est :

(a) $\begin{cases} x = t \\ y = 2+t \\ z = t \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x = 3+4t \\ y = t \\ z = 4t \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x = 1-t \\ y = 1+t \\ z = 1-t \end{cases}$

17 Une équation cartésienne du plan (GBK) est :

(a) $2x+2y-z-2=0$ (b) $x+y-3=0$ (c) $x+y+2z=2$

18 Le volume du tétraèdre $HJKB$ est égal à :

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{6}$ (c) $\frac{1}{3}$

19 Les droites (AI) et (HB) :

(a) sont parallèles (b) ne sont pas coplanaires (c) se coupent au point de coordonnées $\left(\frac{1}{2}\ ;\ 1\ ;\ \frac{1}{2}\right)$

20 Les droites (AI) et (DJ) :

(a) sont parallèles (b) ne sont pas coplanaires (c) se coupent au point de coordonnées $\left(\frac{2}{3}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{3}\right)$

21 Le plan (OAE) et la droite (GC) :

(a) sont parallèles

(b) sont orthogonaux

(c) se coupent au point de coordonnées $\left(\frac{1}{3}\,;\,\frac{2}{3}\,;\,\frac{2}{3}\right)$

22 Le plan (OAE) et la droite (BI) :

(a) sont parallèles

(b) ne sont pas parallèles

23 Les plans (OAE) et (ECH) :

(a) sont parallèles

(b) sont orthogonaux

24 Les plans (OAE) et (DCG) :

(a) sont orthogonaux

(b) se coupent selon la droite d'équation $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1 \\ y & = & \frac{2}{3}+\frac{2}{3}t \\ z & = & \frac{2}{3}+\frac{2}{3}t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$

(c) se coupent selon la droite d'équation $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+t \\ y & = & \frac{2}{3} \\ z & = & \frac{2}{3} \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x\ln x$.

25 Pour tout réel $x > 0$, $f'(x) =$:

(a) $\frac{1}{x}$

(b) $\ln x$

(c) $2\ln x$

(d) $1+\ln x$

26 La fonction f est strictement croissante sur :

(a) $]0\,;\,\mathrm{e}]$

(b) $\left]0\,;\,\frac{1}{\mathrm{e}}\right]$

(c) $\left[\frac{1}{\mathrm{e}}\,;\,+\infty\right[$

(d) $]0\,;\,+\infty[$

27 Dans $]0\,;\,+\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ admet :

(a) aucune solution

(b) une unique solution

(c) exactement deux solutions

(d) au moins trois solutions

28 Une primitive de f sur $[1\,;\,+\infty[$ est F définie par :

(a) $F(x) = \frac{1}{2}x^2\ln x$

(b) $F(x) = \int_1^x t\ln t\,\mathrm{d}t$

(c) $F(x) = \frac{x^2}{4}(2\ln x - 1)$

(d) $F(x) = \ln x - x$

29 On pose $I = \int_1^{\mathrm{e}} t\ln t\,\mathrm{d}t$. On a :

(a) $I = 2{,}097$

(b) $I = \frac{\mathrm{e}^2+1}{4}$

(c) $I \leqslant \int_1^{\mathrm{e}} t\,\mathrm{d}t$

(d) $I \geqslant \int_1^{\mathrm{e}} \ln t\,\mathrm{d}t$

GÉOMÉTRIE

1

Nombres complexes

Connaissances nécessaires à ce chapitre

- Factoriser une expression
- Utiliser les formules de géométrie dans les repères
- Représenter des angles sur un cercle trigonométrique
- Connaître les définitions et les valeurs particulières pour le sinus et le cosinus des angles de vecteurs

Auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

1

1) Factoriser les expressions suivantes lorsque c'est possible :

$$A(x) = 4 - x^2 \quad B(x) = 4x^2 - 16 \quad C(x) = x^2 + 25.$$

2) En utilisant le discriminant donner, lorsque c'est possible, une factorisation des expressions suivantes :

$$F(x) = x^2 - 5x + 6 \ ; \ G(x) = x^2 - 5x + 7.$$

2 On se place dans un repère orthonormé $\left(O\,;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\right)$. On considère les points $A(-3\ ;\ 7)$, $B(-2\,;\,1)$ et le vecteur $\vec{u}(1\,;\,-2)$.

1) Déterminer les coordonnées des vecteurs suivants :

a) $\overrightarrow{AB}$

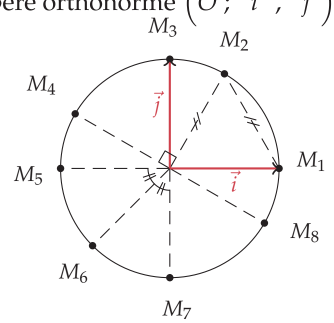
b) $\overrightarrow{AB} + \vec{u}$

c) $\overrightarrow{AB} - \vec{u}$

d) $2\overrightarrow{AB} + 3\vec{u}$

2) Déterminer $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$, $\|\vec{u}\|$ et $\left\|\overrightarrow{AB} + \vec{u}\right\|$.

3 On considère le cercle trigonométrique ci-contre dans un repère orthonormé $\left(O\,;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\right)$.



1) Donner une valeur en radians pour les angles : $(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM_i}})$ pour i de 1 à 8.

2) Placer sur le cercle les points tels que :

$$\left(\widehat{\vec{i}\ , \overrightarrow{OP}}\right) = -\pi/3, \quad \left(\widehat{\vec{i}\ , \overrightarrow{OR}}\right) = 11\pi/4$$

3) On pose $\alpha_i = (\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM_i}})$. Déterminer $\cos(\alpha_i)$ et $\sin(\alpha_i)$.

4 Déterminer une solution des équations suivantes :

1) $\cos(x) = \dfrac{1}{2}$ **2)** $\sin(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Voir solutions p. 419

ACTIVITÉ 1 L'imagination est sans limite !

1) L'ensemble de nombres le plus simple est celui de nombres entiers naturels, noté $\mathbb{N}$ et qui contient les nombres que vous connaissez depuis longtemps : 0 ; 1 ; 2 ; 3...

a) Quel est le nombre entier naturel qui ajouté à 7 donne 12 ?

b) Quel est le nombre entier naturel qui ajouté à 12 donne 7 ?

2) L'exemple précédent montre que l'ensemble $\mathbb{N}$ est « insuffisant » car certaines équations simples n'y trouvent pas de solution. On peut alors utiliser l'ensemble des entiers relatifs, noté $\mathbb{Z}$, et qui contient $\mathbb{N}$ et les opposés des entiers naturels (par exemple : -3 ; -2).

a) Résoudre dans $\mathbb{N}$ puis dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $2x + 8 = 0$.

b) Même question avec l'équation : $2x + 7 = 0$.

3) De nouveau l'ensemble $\mathbb{Z}$ est en quelque sorte insuffisant pour exprimer les solutions de certaines équations.

a) De quel autre ensemble de nombres a-t-on au minimum besoin pour que l'équation du $2x + 7 = 0$ ait une solution ?

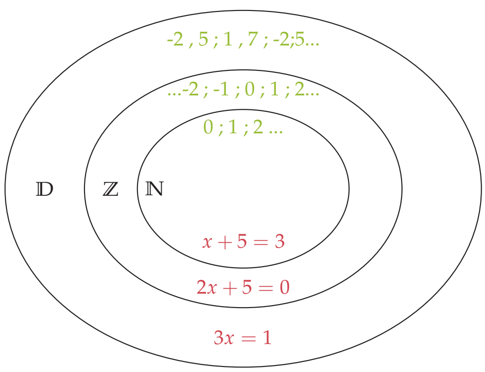
b) Dans ce nouvel ensemble quelles sont les solutions de l'équation : $9x^2 = 16$?

c) Décrire l'ensemble de nombres dont on a besoin au minimum pour que l'équation précédente ait une solution. On notera $\mathbb{Q}$ cet ensemble.

4) Modifier l'équation précédente pour qu'elle n'admette pas de solution dans l'ensemble des rationnels. Dans quel ensemble faut-il travailler pour pouvoir dire qu'elle a deux solutions ?

5) Que pouvez-vous dire de l'équation $x^2 + 1 = 0$ en terme de solutions dans les ensembles de nombres précédents ?

6) Compléter le schéma commencé ci-dessous, qui montre les inclusions successives des ensembles de nombres en donnant à chaque fois une équation qui n'a pas de solution dans l'ensemble, mais en a une dans le suivant.



ACTIVITÉ 2 Une vieille histoire... l'équation de Bombelli

À l'époque de la Renaissance, les mathématiciens Girolamo Cardano (1501-1576), Scipione Del Ferro (1465-1526) et Niccolò Fontana (1499-1557) trouvèrent une méthode pour résoudre les équations de degré trois du type $x^3 + px + q = 0$. Le principe général était acquis mais butait sur des cas comme l'équation de Bombelli (1526-1572) : $x^3 - 15x - 4 = 0$. Or pour cette dernière, Raffaello Bombelli savait qu'il y avait trois solutions dont une évidente !

1) **Point de départ de la méthode dite de Cardan**

a) On pose $x = u + v$. Et on cherche les valeurs de x telles que $x^3 - 15x - 4 = 0$. En utilisant que $(u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3vu^2 + v^3$, démontrer que u et v doivent satisfaire l'équation :

$$(u^3 + v^3) + 3uv(u+v) - 15(u+v) - 4 = 0.$$

b) En déduire que u et v sont solutions de l'équation :

$$(u^3 + v^3) - 4 + (3uv - 15)(u+v) = 0.$$

c) Expliquer pourquoi on aura trouvé une solution dès que l'on obtient u et v solutions du système :

$$\begin{cases} u^3 + v^3 & = & 4 \\ u \times v & = & 15 \end{cases}$$

d) Démontrer alors que les nombres u^3 et v^3 sont solutions de l'équation : $X^2 - 4X + 125 = 0$. Puis expliquer pourquoi on ne pourra pas ainsi déterminer u et v (et par conséquent la solution connue).

2) **Le tour de passe-passe de Bombelli**.

a) Néanmoins des solutions existaient et Bombelli pensait que la méthode devait les donner. Il décida alors de terminer le calcul en utilisant un nombre « imaginaire » que nous noterons $\sqrt{-1}$. À l'aide de cette notation, expliquer pourquoi l'équation $X^2 - 4X + 125 = 0$ a alors deux solutions : $2 - 11\sqrt{-1}$ et $2 + 11\sqrt{-1}$.

b) Vérifier alors que : $(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 - 11\sqrt{-1}$ et que $(2 - \sqrt{-1})^3 = 2 + 11\sqrt{-1}$.

c) En déduire que la méthode permet bien de retrouver une solution attendue pour l'équation de Bombelli.

d) À l'aide d'un logiciel de calcul formel comme Xcas effectuer une résolution de l'équation et comparer aux résultats obtenus.

ACTIVITÉ 3 Repérage par angle et rayon

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{u},\vec{v}\right)$.

1) Représenter dans ce repère les points suivants :

a) les points M tels que $\|\overrightarrow{OM}\| = \frac{3}{2}$, puis N tels que $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{ON}}\right) = \frac{\pi}{4}$;

b) le point E vérifiant les deux conditions précédentes ;

c) les points P tels que $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OP}}\right) = -\frac{5\pi}{6}$;

d) le point A tel que $\|\overrightarrow{OA}\| = 2$ et $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OA}}\right) = \frac{\pi}{6}$;

e) le point B tel que $\|\overrightarrow{OB}\| = 1$ et $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OA}}\right) = -\frac{2\pi}{3}$;

f) le point C tel que $\|\overrightarrow{OC}\| = 2$ et $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OA}}\right) = \frac{3\pi}{4}$.

2) Donner les coordonnées des points A, B et C.

3) Proposer une formule générale permettant de calculer les coordonnées d'un point M connaissant $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}}\right)$ et $\|\overrightarrow{OM}\|$.

1. Forme algébrique et représentation d'un nombre complexe

A. Définition et vocabulaire

THÉORÈME

Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$ appelé **ensemble des nombres complexes** qui possède les propriétés suivantes :
- $\mathbb{C}$ contient l'ensemble des nombres réels ;
- il contient un nombre i tel que $\mathrm{i}^2 = -1$;
- il est muni d'une **addition et d'une multiplication** qui ont les **mêmes propriétés que dans** $\mathbb{R}$, l'ensemble des nombres réels.

Exemples
- Les nombres -1 ; 0 ; $3/4$; $\sqrt{2}$ sont des nombres réels donc ce sont aussi des éléments de $\mathbb{C}$.
- À l'aide du nombre i et de la multiplication : $-\mathrm{i}$; $2\mathrm{i}$; $\mathrm{i}\sqrt{2}$... sont aussi dans $\mathbb{C}$.
- Avec les additions, les nombres suivants sont aussi dans $\mathbb{C}$: $-1+\mathrm{i}$; $\sqrt{2}+2\mathrm{i}$.

DÉFINITION

Tout nombre complexe peut s'écrire sous la forme : $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.
Cette écriture est appelée **forme algébrique de** z :
- a est appelée **partie réelle** de z, notée $\mathrm{Re}(z)$.
- b est appelée **partie imaginaire** de z, notée $\mathrm{Im}(z)$.

Remarques :
- Lorsque $\mathrm{Im}(z) = 0$, $z = a$ est réel.
- Lorsque $\mathrm{Re}(z) = 0$, $z = ib$ est appelé **imaginaire pur**.

MÉTHODE 1 Réduire un complexe à sa forme algébrique

► Ex. 11 p. 249

Exercice d'application Soient $z_1 = 1 + 2\mathrm{i}$, $z_2 = -1 + \mathrm{i}$, des nombres complexes. Déterminer les parties réelles et imaginaires des complexes : $z_3 = z_1 \times z_2$, $z_4 = z_1^2$.

Correction $z_3 = (1+2\mathrm{i})(-1+\mathrm{i}) = -1 + \mathrm{i} - 2\mathrm{i} + 2\mathrm{i}^2 = -1 - \mathrm{i} - 2 = -3 - \mathrm{i}$.
Donc $\mathrm{Re}(z_3) = -3$ et $\mathrm{Im}(z_3) = -1$.
$z_4 = (1+2\mathrm{i})^2 = 1 + 4\mathrm{i} + (2\mathrm{i})^2 = 1 + 4\mathrm{i} - 4 = -3 + 4\mathrm{i}$. Donc $\mathrm{Re}(z_4) = -3$ et $\mathrm{Im}(z_4) = 4$.

THÉORÈME

Soient $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$ deux nombres complexes :

$$z_1 = z_2 \iff \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$$

L' écriture algébrique d'un nombre complexe est **unique**.

PREUVE

Soient $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$ deux complexes tels que $z_1 = z_2$.

$$z_1 = z_2 \iff a_1 + ib_1 = a_2 + ib_2 \iff a_1 - a_2 = \mathrm{i}(b_2 - b_1) \qquad (1)$$

Raisonnons par l'absurde : si $b_2 \neq b_1$ alors $\dfrac{a_1 - a_2}{b_2 - b_1} = \mathrm{i}$.

$\dfrac{a_1 - a_2}{b_2 - b_1}$ étant un réel, on aboutit à une contradiction.

Donc $b_1 = b_2$ et on déduit alors de (1) que $a_1 - a_2 = 0$ donc $a_1 = a_2$.

La réciproque est claire.

Exemple Soit $z = 2x - 1 + \mathrm{i}(3 - y)$, $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, un complexe.

On a $z = 0$ si et seulement si $2x - 1 = 0$ et $3 - y = 0$ c'est-à-dire $x = \dfrac{1}{2}$ et $y = 3$.

B. Représentation graphique des complexes

Le plan est muni d'un repère **orthonormé direct** : $\left(O\,;\overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OV}\right) = (O\,;\vec{u}, \vec{v})$.

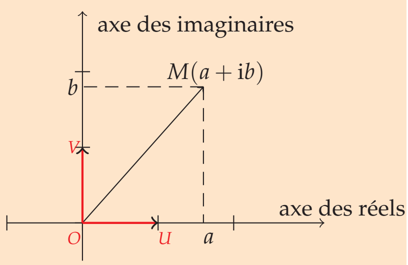
DÉFINITION

Tout nombre complexe $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ peut être représenté dans ce repère par :

- un unique point : $M\,(a\,;\,b)$, appelé **image ponctuelle** de $z = a + ib$.
- un unique vecteur : $\overrightarrow{OM}\,(a\,;\,b)$ appelé **image vectorielle** de $z = a + ib$.

On dit que $z = a + ib$ est l'**affixe** du point M et du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

On note souvent $M(z)$ ou $M(a + ib)$ et $\overrightarrow{OM}(z)$ ou $\overrightarrow{OM}(a + ib)$.



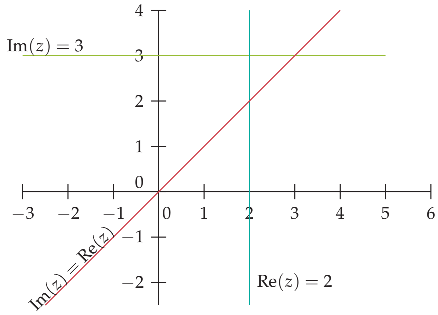
REMARQUES :

- Les complexes $z = a \in \mathbb{R}$ sont les nombres réels et sont représentés sur **l'axe des abscisses**.
- Les complexes $z = ib$, $b \in \mathbb{R}$ sont les **imaginaires purs** et sont représentés sur **l'axe des ordonnées**.
- Le plan est alors appelé **plan complexe**.

Exemple

Dans le plan complexe, on a représenté ci-contre les points d'affixe z tels que

- $\mathrm{Re}(z) = 2$
- $\mathrm{Im}(z) = 3$
- $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)$.



2. Addition, multiplication par un réel et géométrie

On se place dans le repère orthonormé $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$.

A. Addition

THÉORÈME

- Si $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$ alors $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + \mathrm{i}(b_1 + b_2)$.
- Si z_1 est l'affixe de $\vec{w_1}$ et z_2 celle de $\vec{w_2}$ alors $z_1 + z_2$ est l'affixe de $\vec{w_1} + \vec{w_2}$.

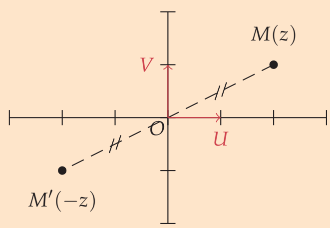
PREUVE La première règle est en réalité une définition de l'addition des nombres complexes et la seconde une conséquence directe de la formule des coordonnées de la somme des deux vecteurs $\vec{w}_1\,(a_1\,;\,b_1)$ et $\vec{w}_2\,(a_2\,;\,b_2)$.

REMARQUE : Dans la pratique, on se passe aisément de la formule en calculant avec les règles habituelles puisque : $(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = a_1 + ib_1 + a_2 + ib_2 = a_1 + a_2 + \mathrm{i}(b_1 + b_2)$.

B. Opposé d'un nombre complexe

THÉORÈME

- L'opposé du nombre complexe $z = a + ib$ est : $-z = (-a) + \mathrm{i}(-b) = -a - ib$.
- z est l'affixe du point M. **L'opposé** de z noté $-z$ est l'affixe du **symétrique** de M par rapport à **l'origine**.
- si z est l'affixe de $\vec{w}$ alors $-z$ est l'affixe de $-\vec{w}$.



PREUVE

- On vérifie que $z + (-z) = 0$. En effet, $z + (-z) = a + ib + ((-a) + (-b)\mathrm{i}) = 0$.
- Les points M et N d'affixes respectives z et $-z$ ont pour coordonnées $(a\,;\,b)$ et $(-a\,;\,-b)$. La formule des coordonnées du milieu donne : le milieu des deux points est bien l'origine du repère $O\,(0\,;\,0)$.
- La preuve résulte directement des coordonnées de l'opposé d'un vecteur dans un repère.

C. Soustraction

THÉORÈME

- Si $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$ alors $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (a_1 - a_2) + \mathrm{i}(b_1 - b_2)$.
- Si $\vec{w_1}$ et $\vec{w_2}$ sont d'affixes respectives z_1 et z_2 alors $\vec{w_1} - \vec{w_2}$ est d'affixe $z_1 - z_2$.
- Si A et B sont d'affixes z_A et z_B alors $z_B - z_A$ est l'affixe de $\overrightarrow{AB}$.

PREUVE Elle résulte des définitions et des formules des coordonnées de vecteurs dans les repères.

MÉTHODE 2 Utiliser les complexes en géométrie

► Ex. 17 p. 249

La méthode générale consiste à :

1) Transformer les données géométriques du texte ou les questions en terme de vecteurs puis de nombres complexes.
2) Utiliser les règles de calcul pour résoudre le problème.

Exercice d'application

On considère trois points A, B, C d'affixes :

$$z_A = -3 + 2\text{i}, z_B = 1 + \text{i} \text{ et } z_C = 3 - 4\text{i}.$$

1) Déterminer l'affixe du point D pour que $ABCD$ soit un parallélogramme.
2) Déterminer les coordonnées du centre de ce parallélogramme.

Correction

1) $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ c'est-à-dire :
$z_B - z_A = z_C - z_D \iff z_D = z_C - z_B + z_A$.
On en déduit en remplaçant par les données :
$z_D = 3 - 4\text{i} - 1 - \text{i} - 3 + 2\text{i} = -1 - 3\text{i}$.
2) I est le centre du parallélogramme équivaut à :
$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IC} \iff z_I - z_A = z_C - z_I$.
On isole alors l'inconnue z_I et on obtient :

$$2z_I = z_A + z_C \iff z_I = \frac{z_A + z_C}{2}.$$

En remplaçant par les données : $z_I = -\text{i}$

D. Multiplication d'un complexe par un réel

THÉORÈME

Soit $z \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\overrightarrow{w}$ d'affixe z. Le complexe λz est l'affixe du vecteur $\lambda \overrightarrow{w}$.

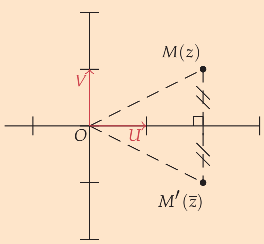
Exemple Soit A, B deux points du plan d'affixe $z_A = 3 - \text{i}$ et $z_B = -2 + 3\text{i}$. Le vecteur $2\overrightarrow{AB}$ a pour affixe : $2(z_B - z_A) = 2(-5 + 4\text{i}) = -10 + 8\text{i}$.

3. Inverse et quotient de nombres complexes

A. Conjugué d'un nombre complexe

DÉFINITION

- Le **conjugué d'un nombre complexe** $z = a + ib$ est le complexe $\boldsymbol{a - ib}$, noté $\bar{z}$.
- Si z est l'affixe de M, $\bar{z}$ est l'affixe du symétrique de M par rapport à l'axe des réels.



PREUVE On prouve la seconde partie de la définition. Soit M d'affixe $z = a + ib$ et N d'affixe $\overline{z} = a - ib$. En termes de coordonnées on a $M\,(a\,;\,b)$ et $N\,(a\,;\,-b)$. Donc :

- d'une part, le milieu de $[MN]$ a pour coordonnées $(a\,;\,0)$ et appartient donc à l'axe des réels ;
- d'autre part, on a $\overrightarrow{MN}\,(0\,;\,2b)$, et donc $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u} = 0$.

Donc, soit $M = N$ et dans ce cas $b = 0$, ce qui signifie que les deux points sont confondus sur l'axe des réels ; soit $M \neq N$ et les deux constatations précédentes montrent que l'axe des réels est la médiatrice du segment $[MN]$. Dans les deux cas cela prouve le résultat.

THÉORÈME

1) $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$; $z - \overline{z} = 2\mathrm{i}\mathrm{Im}(z)$.
2) z est réel si et seulement si $\overline{z} = z$.
3) z est imaginaire pur si et seulement si $\overline{z} = -z$.

PREUVE

1) On écrit z sous sa forme algébrique $z = a + ib$ et on a donc $\overline{z} = a - ib$. On en déduit :

$$z + \overline{z} = a + ib + a - ib = 2a = 2\,\mathrm{Re}(z).$$

La seconde partie se prouve de la même façon.

2) On a $\overline{z} = z \iff \overline{z} - z = 0 \iff 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z) = 0$ ce qui équivaut à $z \in \mathbb{R}$.
3) Même méthode qu'au 2).

B. Inverse d'un nombre complexe

THÉORÈME

Pour tout nombre complexe z non nul, il existe un nombre complexe z' tel que $zz' = 1$.
Ce nombre s'appelle l'inverse de z, noté $\frac{1}{z}$ et il est tel que :

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z \times \overline{z}}.$$

Si $z = a + ib \neq 0$ alors la forme algébrique de $\frac{1}{z}$ est : $\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \mathrm{i}\frac{-b}{a^2 + b^2}$.

PREUVE Soit $z \neq 0$. $z \times \overline{z} = (a + \mathrm{i}b)(a - \mathrm{i}b) = a^2 - (\mathrm{i}b)^2 = a^2 + b^2$ est un réel positif non nul. Il admet donc un inverse dans $\mathbb{R}$ que l'on note $\frac{1}{z \times \overline{z}}$.
On a donc $(z \times \overline{z}) \times \frac{1}{z \times \overline{z}} = 1$ et donc $z \times \left(\overline{z} \times \frac{1}{z \times \overline{z}}\right) = 1$. Le nombre complexe z admet donc un inverse dans $\mathbb{C}$ qui est $\overline{z} \times \frac{1}{z \times \overline{z}}$ et on en déduit facilement la forme algébrique.

Exemple Dans la pratique, on effectue une multiplication par le conjugué du dénominateur pour se ramener à un dénominateur réel.

1) $z = 2\mathrm{i}$. On a $\frac{1}{z} = \frac{1}{2\mathrm{i}} = \frac{-2\mathrm{i}}{2\mathrm{i} \times (-2\mathrm{i})} = \frac{-2\mathrm{i}}{4} = -\frac{1}{2}\mathrm{i}$.
2) $z = \frac{1}{2 + 3\mathrm{i}} = \frac{(2 - 3\mathrm{i})}{(2 + 3\mathrm{i})(2 - 3\mathrm{i})} = \frac{2 - 3\mathrm{i}}{4 + 9} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}\mathrm{i}$.

C. Quotient d'un nombre complexe

DÉFINITION

Soient z_1 et $z_2 \neq 0$ deux nombres complexes. On définit leur quotient par : $\dfrac{z_1}{z_2} = z_1 \times \dfrac{1}{z_2}$.

MÉTHODE 3 Calculer et utiliser le quotient des nombres complexes

► Ex. 45 p. 252

Exercice d'application Résoudre l'équation : $(1+\mathrm{i})z - 2 = 3 + 2\mathrm{i}$.

Correction On procède comme pour les nombres réels en isolant l'inconnue z :

$$(1+\mathrm{i})z - 2 = 3 + 2\mathrm{i} \iff (1+\mathrm{i})z = 5 + 2\mathrm{i} \iff z = \frac{5+2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \frac{(5+2\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})} = \frac{7-3\mathrm{i}}{2}.$$

L'unique solution est donc le nombre complexe : $z = \dfrac{7}{2} - \dfrac{3}{2}\mathrm{i}$.

D. Opérations avec les conjugués des nombres complexes

THÉORÈME

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes.

1) $\overline{\overline{z_1}} = z_1$

2) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

3) $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$

4) $\overline{z_1^n} = \left(\overline{z_1}\right)^n$, n entier naturel.

5) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, $z_2 \neq 0$.

PREUVE

- On prouve la troisième égalité, les deux premières se faisant de la même manière dans un contexte plus simple.
  On écrit les complexes z_1 et z_2 sous forme algébrique : $z_1 = a_1 + \mathrm{i}b_1$ et $z_2 = a_2 + \mathrm{i}b_2$.
  On a alors : $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{(a_1a_2 - b_1b_2) + \mathrm{i}(a_1b_2 + a_2b_1)} = (a_1a_2 - b_1b_2) - \mathrm{i}(a_1b_2 + a_2b_1)$.
  D'autre part :
  $$\begin{aligned} \overline{z_1} \times \overline{z_2} &= (a_1 - \mathrm{i}b_1)(a_2 - \mathrm{i}b_2) \\ &= (a_1a_2 + b_1b_2\mathrm{i}^2) - \mathrm{i}(a_1b_2 + a_2b_1) \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2) - \mathrm{i}(a_1b_2 + a_2b_1) \end{aligned}$$
  Ce qui donne bien l'égalité cherchée.
- L'égalité 4) se démontre par récurrence (voir exercice 36).
- Pour l'égalité 5) : $\overline{z_2} \times \overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{z_2 \times \dfrac{z_1}{z_2}} = \overline{z_1}$ d'après la propriété 3). Donc en redivisant par $\overline{z_2} \neq 0$ on obtient bien le résultat du 5).

Exemple Démontrons que $S = (1+\mathrm{i})^5 + (1-\mathrm{i})^5$ est un nombre réel.
On a $\overline{(1+i)^5} = \left(\overline{1+i}\right)^5 = (1-i)^5$. Donc $S = z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$ avec $z = (1+i)^5$. S est donc bien un nombre réel.

4. Équations du second degré

THÉORÈME

Pour tout nombre réel non nul a, l'équation $z^2 = a$ admet deux racines dans $\mathbb{C}$:

- Si $a > 0$, les racines sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.
- Si $a < 0$, les racines sont $\mathrm{i}\sqrt{|a|}$ et $-\mathrm{i}\sqrt{|a|}$.

Exemples : Les solutions de : $z^2 = 16$ sont 4 et -4. Les solutions de $z^2 = -5$ dans $\mathbb{C}$ sont $\mathrm{i}\sqrt{5}$ et $-\mathrm{i}\sqrt{5}$ (alors que cette équation n'a aucune solution dans $\mathbb{R}$)

THÉORÈME

Soit $az^2 + bz + c = 0$, $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$. $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de cette équation.

- Si $\Delta = 0$, l'équation a une unique solution dans $\mathbb{R}$: $z_0 = \dfrac{-b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions dans $\mathbb{R}$: $z_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- $\Delta < 0$, l'équation a deux solution dans $\mathbb{C}$ qui sont conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

PREUVE Les deux premiers cas ont été traités en classe de Première. Pour le dernier, on part de l'écriture canonique :

$$az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right].$$

Si $\Delta < 0$ alors $\dfrac{\Delta}{4a^2}$ est strictement négatif mais on peut l'écrire sous la forme d'un carré :

$$\frac{\Delta}{4a^2} = \left(\mathrm{i}\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2.$$

On peut donc poursuivre la factorisation à partir de la forme canonique à l'aide de l'identité $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$:

$$az^2 + bz + c = a\left(z + \frac{b}{2a} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z + \frac{b}{2a} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right).$$

Comme $a \neq 0$, l'utilisation de théorème sur les produits de facteurs nuls donne bien le résultat.

Remarques :

- Toute expression $Q(z) = az^2 + bz + c$, $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$, se factorise dans $\mathbb{C}$ et :

$$Q(z) = az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2).$$

- $Q(z) = az^2 + bz + c = a\left(z^2 + \dfrac{b}{a}z + \dfrac{c}{a}\right) = a\left(z^2 - Sz + P\right)$ avec :

$$S = z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \text{ et } P = z_1 \times z_2 = \frac{c}{a}.$$

MÉTHODE 4 **Résoudre une équation du second degré dans $\mathbb{C}$**

► Ex. 51 p. 252

Exercice d'application

Résoudre l'équation : $z^2 - 2z = -3$.

Correction

On ramène à un second membre nul : $z^2 - 2z + 3 = 0$.
On peut alors calculer le discriminant : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 3 = -8$.
Le discriminant est strictement négatif, il y a donc deux solutions dans $\mathbb{C}$:

$$z_1 = \frac{2 - \mathrm{i}\sqrt{8}}{2} = 1 - \mathrm{i}\sqrt{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{2 + \mathrm{i}\sqrt{8}}{2} = 1 + \mathrm{i}\sqrt{2}$$

qui sont bien complexes conjuguées.

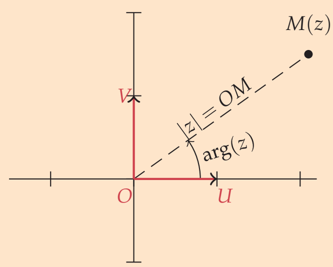
5. Module et argument d'un nombre complexe

A. Définition géométrique

DÉFINITION

Soit z un complexe. M (ou $\overrightarrow{w}$) un point (ou un vecteur) d'affixe z.

- On appelle **module** de z la distance OM (ou la norme $||\overrightarrow{w}||$). Le module de z est noté $|z|$.
- Si $z \neq 0$, on appelle **argument** de z une mesure en radians de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}}\right)$ (ou $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}})$).
  Un argument de z est noté $\arg(z)$.
- Le complexe nul n'a pas d'argument et a pour module 0.



REMARQUE :
$\arg(z)$ peut prendre une infinité de valeurs différentes : si θ est une mesure de $\arg(z)$ alors $\theta + k2\pi$ est une autre mesure de $\arg(z)$ pour $k \in \mathbb{Z}$. On notera : $\arg(z) = \theta\ [2\pi]$ et on dit que l'argument de z vaut θ « modulo 2π » ou « à 2π près ».

Exemples

- $|\mathrm{i}| = OV = 1$ et $\arg(\mathrm{i}) = \left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OV}}\right) = \frac{\pi}{2}$.
- Soit M_1 d'affixe -4 on a ; $|-4| = OM_1 = 4$ et $\arg(-4) = \left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM_1}}\right) = \pi$.
- Soit M_2 d'affixe $1 + i$ on a :
  $|1 + \mathrm{i}| = OM_2 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ d'après la formule des distances
  $\arg(1 + \mathrm{i}) = \left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM_2}}\right) = \frac{\pi}{4}$ la diagonale du carré OUM_2V étant la bissectrice de $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$.

MÉTHODE 5 Déterminer un ensemble de points

► Ex. 60 p. 253

Exercice d'application Déterminer dans le repère orthonormé $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

1) $|z| = 3$

2) $\arg(z) = -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

Correction

1) $|z| = 3 \iff OM = 3$.
Donc l'ensemble des points M tel que $|z| = 3$ est un cercle de centre O et de rayon 3.

2) $\arg(z) = -\frac{\pi}{3}\ [2\pi] \iff \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}}\right) = -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.
Donc l'ensemble des points M tel que $\arg(z) = -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ est une demi-droite d'origine O, privé de O, de vecteur directeur $\vec{u_1}$ tel que $\left(\widehat{\vec{u},\vec{u_1}}\right) = -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

B. Calcul algébrique du module et d'un argument

THÉORÈME

Soit $z = a + ib$ un complexe.

- $|z| = \sqrt{z \times \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Si $z \neq 0$ alors $\theta = \arg(z)$ peut être déterminé par :

$$\begin{cases} \cos(\theta) & = & \dfrac{a}{|z|} \\ \sin(\theta) & = & \dfrac{b}{|z|} \end{cases}$$

MÉTHODE 6 Déterminer le module et un argument d'un nombre complexe

► Ex. 61 p. 253

Exercice d'application

Déterminer le module et un argument du complexe $z = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.

Correction

1) On calcule d'abord le module : $|z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$.

2) On cherche donc $\theta = \arg(z)$ tel que $\begin{cases} \cos(\theta) & = & \dfrac{-1}{2} \\ \sin(\theta) & = & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

$$\cos(\theta) = \frac{-1}{2} \iff \cos(\theta) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \iff \begin{cases} \theta & = & \dfrac{2\pi}{3}[2\pi] \\ \text{ou} & & \\ \theta & = & -\dfrac{2\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$$

Or $\sin(\theta) > 0$ donc $\arg(z) = \theta = \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.

C. Égalité de deux nombres complexes par module et argument

THÉORÈME

Deux nombres complexes non nuls sont égaux si et seulement si ils ont même module et même argument.

PREUVE La preuve résulte directement des formules précédentes.

REMARQUES :

- $|z| = 0 \iff z = 0$.
- $z \in \mathbb{R} \iff \arg(z) = 0$ ou π $[2\pi]$ ou $z = 0$.
- z est un imaginaire pur $\iff \arg(z) = \dfrac{\pi}{2}$ $[2\pi]$ ou $z = 0$.
- Attention, pour l'égalité des arguments, il faut la penser « à 2π » près.

6. Forme trigonométrique d'un nombre complexe

A. Définition

DÉFINITION

Tout nombre complexe non nul peut s'écrire sous la forme $z = r(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))$ avec $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$ $[2\pi]$.
Cette forme s'appelle **forme trigonométrique** de z.

REMARQUES :

1) Dans l'écriture sous forme trigonométrique, on peut remplacer θ par n'importe quelle valeur $\theta + k2\pi$, k entier relatif.
2) **ATTENTION** dans l'écriture $z = r(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))$ il est crucial d'avoir $r > 0$.
Par exemple : $z = -2\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$ n'est pas une forme trigonométrique car -2 n'est pas strictement positif.

B. Passage d'une forme à l'autre

THÉORÈME

Soit z un complexe non nul. $z = a + \mathrm{i}b = r\left(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)\right)$

$$\left\{\begin{array}{rcl} |z| & = & \sqrt{a^2+b^2} \\ \cos(\theta) & = & \dfrac{a}{|z|} \\ \sin(\theta) & = & \dfrac{b}{|z|} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & r\cos(\theta) \\ b & = & r\sin(\theta) \end{array}\right.$$

REMARQUE : Pour déterminer la forme trigonométrique $z = r(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))$ d'un complexe, on reprend la méthode 6 pour la détermination de r et de θ.

7. Module, argument et opérations avec les nombres complexes

Dans les deux théorèmes qui suivent z et z' sont des nombres complexes.

THÉORÈME

1) $z \times \overline{z} = |z|^2$
2) $|-z| = |z|$ $\qquad$ $\arg(-z) = \arg(z) + \pi \ [2\pi]$ pour $z \neq 0$.
3) $|z| = |\overline{z}|$ $\qquad$ $\arg(\overline{z}) = -\arg(z) \ [2\pi]$ pour $z \neq 0$.
4) $|z \times z'| = |z| \times |z'|$ $\qquad$ $\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z') \ [2\pi]$ pour $z \neq 0$ et $z' \neq 0$.
5) $|z^n| = |z|^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ $\qquad$ $\arg(z^n) = n\arg(z) \ [2\pi]$ si $z \neq 0$.

PREUVE

1) Ce point a été déjà prouvé précédemment.
2) Il suffit d'utiliser la propriété de symétrie par rapport à l'origine.
3) De même avec la symétrie par rapport l'axe des ordonnées.
4) Si $z = 0$ ou $z' = 0$, alors $|zz'| = 0$ et $|z||z'| = 0$ d'où l'égalité.
Si $z, z' \in \mathbb{C}^*$ alors : $z = r(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))$ et $z = r'(\cos(\theta') + \mathrm{i}\sin(\theta'))$.
$zz' = rr'(\cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') + \mathrm{i}(\cos(\theta)\sin(\theta') + \cos(\theta')\sin(\theta))$.
Ce qui donne d'après les formules d'addition pour sinus et cosinus :
$$zz' = rr'(\cos(\theta + \theta') + \mathrm{i}\sin(\theta + \theta')).$$
Or, $rr' > 0$ donc $zz' = rr' = |z||z'|$ et $\arg(zz') = \theta + \theta' = \arg(z) + \arg(z') \ [2\pi]$. Ce qui prouve bien le point 4).
5) Ces égalités se montrent par récurrence.

THÉORÈME

1) $z \neq 0 : \left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$ $\qquad$ $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg(z) \ [2\pi]$
2) $z' \neq 0 : \left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$ $\qquad$ $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \ [2\pi]$ pour $z \neq 0$

PREUVE

1) z est un complexe non nul. On a $z \times \dfrac{1}{z} = 1$ qui donne d'une part $\left|z \times \dfrac{1}{z}\right| = 1$ c'est-à-dire $|z| \times \left|\dfrac{1}{z}\right| = 1$. Et enfin $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$.
D'autre part, $\arg\left(z \times \dfrac{1}{z}\right) = \arg(1)[2\pi]$ donne $\arg(z) + \arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = 0[2\pi]$.
On en conclut le point 1).
2) z et z' deux complexes avec $z' \neq 0$
$\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \left|z \times \dfrac{1}{z'}\right| = |z| \times \left|\dfrac{1}{z'}\right| = |z| \times \dfrac{1}{|z'|} = \dfrac{|z|}{|z'|}$
et si $z \neq 0$: $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg\left(z \times \dfrac{1}{z'}\right) = \arg(z) + \arg\left(\dfrac{1}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \ [2\pi]$.

MÉTHODE 7 **Comment utiliser les propriétés des modules et arguments** ► Ex. 80 p. 255

Exercice d'application

1) $z_1 = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$ et $z_2 = \dfrac{1}{6} - \dfrac{\sqrt{3}}{6}\mathrm{i}$ deux nombres complexes. Déterminer le module et un argument de $z_1 z_2$.

2) Déterminer la forme algébrique de $\left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^{2016}$.

Correction

1) • $|z_1| = \sqrt{3+1} = 2$ et $|z_2| = \sqrt{\dfrac{1}{36} + \dfrac{3}{36}} = \dfrac{1}{3}$. Donc : $|z_1 z_2| = |z_1||z_2| = 2 \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$.

• $\theta_1 = \arg(z_1)$ est tel que $\begin{cases} \cos(\theta_1) &= \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta_1) &= \dfrac{1}{2} \end{cases}$

$\sin(\theta_1) = \dfrac{1}{2} \iff \theta_1 = \dfrac{\pi}{6}\,[2\pi]$ ou $\dfrac{5\pi}{6}\,[2\pi]$, or $\cos(\theta_1) < 0$ donc $\theta_1 = \dfrac{5\pi}{6}[2\pi]$

$\theta_2 = \arg(z_2)$ est tel que $\begin{cases} \cos(\theta_2) &= \dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} \\ \sin(\theta_2) &= \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{6}}{\frac{1}{3}} \end{cases} \iff \begin{cases} \cos(\theta_2) &= \dfrac{1}{2} \\ \sin(\theta_2) &= \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

$\cos(\theta_2) = \dfrac{1}{2} \iff \theta_2 = \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$ ou $\dfrac{-\pi}{3}[2\pi]$, or $\sin(\theta_2) > 0$ donc $\theta_2 = \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$.

Donc : $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) = \dfrac{5\pi}{6} + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{7\pi}{6}\,[2\pi]$.

2) On remarque : $z = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} = -3z_2$ et donc :

$$|z| = 3 \times |z_2| = 1 \quad \text{et} \quad \arg(z) = \arg(z_2) + \pi[2\pi] = -\frac{2\pi}{3}[2\pi]$$

$\arg\left(z^{2016}\right) = 2016 \times \arg(z) = 2016 \times \dfrac{2\pi}{3}[2\pi] = 672 \times 2\pi[2\pi] = 0[2\pi]$.

De plus $|z| = 1$ donc $\left|z^{2016}\right| = |z|^{2016} = 1$.

On en déduit : $z^{2016} = 1 \times (\cos(0) + \mathrm{i}\sin(0)) = 1$.

8. Applications des nombres complexes à la géométrie

THÉORÈME

- Soient A et B deux points distincts d'affixes respectives z_A et z_B.

  $AB = ||\overrightarrow{AB}|| = |z_B - z_A|$ et $\arg(z_B - z_A) = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB}\right)\,[2\pi]$.

- Soient A, B, C et D quatre points distincts d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D.

  $\arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)\,[2\pi]$.

PREUVE

- Soient A et B deux points distincts d'affixes respectives z_A et z_B.
Il existe un unique point M d'affixe z tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$. Les affixes de ces deux vecteurs sont donc égales ce qui donne : $z = z_B - z_A$.
On en déduit que $|z| = |z_B - z_A|$ et $\arg(z) = \arg(z_B - z_A)[2\pi]$.
Donc $OM = AB = |z_B - z_A|$ et $\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}}\right) = \left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AB}}\right) = \arg(z_B - z_A)[2\pi]$.
- Soient A, B, C et D quatre points distincts d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D.
Par les propriétés de l'argument on a :
$$\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \arg(z_D - z_C) - \arg(z_B - z_A).$$
Ce qui donne par définition de l'argument :
$$\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{CD}}\right) - \left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AB}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \vec{u}}\right) + \left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{CD}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}\right)[2\pi]$$
la dernière égalité résultant de la relation de Chasles pour les angles de vecteurs.

MÉTHODE 8 Ensembles de points

► Ex. 64 p. 253

Exercice d'application

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble des points M d'affixe z satisfaisant la condition :

- $|z + 1 - \mathrm{i}| = 3$.
- $|z - 3| = |z + 2 + 3\mathrm{i}|$.
- $\arg(z - 1 - \mathrm{i}) = \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$.
- $\arg\left(\dfrac{z - 1 + 2\mathrm{i}}{z + 1}\right) = \dfrac{\pi}{2}[\pi]$.

Correction

- $|z + 1 - \mathrm{i}| = 3 \iff |z - (-1 + \mathrm{i})| = 3 \iff AM = 3$ avec A point d'affixe $z_A = -1 + \mathrm{i}$.
Donc M appartient au cercle de centre $A\,(-1\,;\,1)$ et de rayon 3.
- $|z - 3| = |z + 2 + 3\mathrm{i}| \iff |z - 3| = |z - (-2 - 3\mathrm{i})| \iff BM = CM$ avec B d'affixe $z_B = 3$ et C d'affixe $z_C = -2 - 3\mathrm{i}$.
Donc M appartient à la médiatrice de $[BC]$.
- $\arg(z - 1 - \mathrm{i}) = \dfrac{\pi}{4}[2\pi] \iff \arg(z - (1 + \mathrm{i})) = \dfrac{\pi}{4}[2\pi] \iff \left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{EM}}\right) = \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$ avec E d'affixe $z_E = 1 + \mathrm{i}$.
Donc M appartient à la demi-droite d'origine E privé de E, de vecteur directeur $\vec{u_1}$ tel que $\left(\widehat{\vec{u}, \vec{u_1}}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.
- $\arg\left(\dfrac{z - 1 + 2\mathrm{i}}{z + 1}\right) = \dfrac{\pi}{2}\,[\pi] \iff \left(\widehat{\overrightarrow{GM}, \overrightarrow{FM}}\right) = \dfrac{\pi}{2}[\pi]$ avec F d'affixe $z_F = 1 - 2\mathrm{i}$ et G d'affixe $z_G = -1$.
Donc M appartient au cercle de diamètre $[FG]$ privé des points F et G.

Remarques :

1) Trois points distincts sont alignés si et seulement si : $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) = 0\ [\pi]$ ce qui équivaut à :
$\arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = 0\ [\pi] \iff \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est un réel non nul.

2) Un triangle ABC est rectangle en A si et seulement si : $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) = \dfrac{\pi}{2}[\pi]$; c'est-à-dire :
$\arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$ et $B \neq A$ et $C \neq A \iff \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est un imaginaire pur non nul.

MÉTHODE 9 **Nombres complexes et configurations géométriques** ► Ex. 72 p. 254

Exercice d'application

A, B, C trois points d'affixes respectives : $z_A = 2\mathrm{i}$, $z_B = 2 + \mathrm{i}$, $z_C = 1 - \mathrm{i}$.
Démontrer que le triangle ABC est isocèle rectangle en B.

Correction

$AB = |z_B - z_A| = |2 - \mathrm{i}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$ et $BC = |z_C - z_B| = |-1 - 2\mathrm{i}| = |1 + 2\mathrm{i}| = \sqrt{5}$
donc ABC isocèle en B. D'autre part :

$$\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \frac{-2 + \mathrm{i}}{-1 - 2\mathrm{i}} = \frac{(-2 + \mathrm{i})(-1 + 2\mathrm{i})}{1 + 4} = -\mathrm{i}.$$

Donc $\left(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}\right) = \arg\left(\dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right) = \arg(\mathrm{i}) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ donc ABC est rectangle en B.

9. Forme exponentielle

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(\theta) = \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)$.

$f(\theta)$ est un nombre complexe de module 1 et d'argument θ. Grâce aux formules d'addition pour le sinus et le cosinus on montre que :

$$f(\theta + \theta') = f(\theta) \times f(\theta'),$$

ce qui est la propriété fondamentale de la fonction exponentielle dans $\mathbb{R}$. Comme de plus $f(0) = 1$, on convient de noter par analogie : $\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta) = e^{\mathrm{i}\theta}$.

A. Écriture exponentielle des complexes de module 1

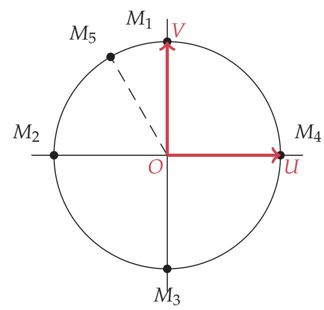
DÉFINITION

Tout nombre complexe de module 1 et d'argument θ peut s'écrire sous la forme :

$$\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

Exemples

1) Placer sur le cercle trigonométrique les points M_i d'affixes z_i tels que : $z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}}$; $z_2 = e^{i\pi}$; $z_3 = e^{i\frac{3\pi}{2}}$; $z_4 = e^{i2\pi}$; $z_5 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.



2) La forme algébrique des complexes précédents est :

$z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$;

$z_2 = e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1$;

$z_3 = e^{i\frac{3\pi}{2}} = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -i$;

$z_4 = e^{i2\pi} = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = 1$;

$z_5 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. Cas général

DÉFINITION

Tout complexe $z \neq 0$ s'écrit sous la forme $z = re^{i\theta}$ avec $r = |z|$ et $\theta \equiv \arg(z)[2\pi]$.
Cette écriture est appelée « **forme exponentielle du complexe** z ».
Réciproque : Si $z \in \mathbb{C}^*$ et $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ alors $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)[2\pi]$.

Remarque : Pour déterminer la forme exponentielle d'un complexe z, on reprend la méthode 6 pour la détermination de r et de θ.

Exemples

1) Déterminons la forme exponentielle de $z_1 = -2i$ et $z_2 = 1 + i$.
On peut déterminer le module et un argument par la méthode précédemment donnée mais on peut aussi opérer de la manière suivante :

$$z_1 = -2i = 2(-1 + 0i) = 2\left(\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$z_2 = 1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

2) Déterminons la forme algébrique de $z_3 = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$:

$$z_3 = 4\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 4\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -2 + 2i\sqrt{3}.$$

C. Calculs avec la notation exponentielle

THÉORÈME

Pour tous nombres réels θ_1, θ_2 :

1) $e^{i\theta_1} \times e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

2) $\left(e^{i\theta_1}\right)^n = e^{in\theta_1}, \quad n \in \mathbb{Z}$

3) $\frac{1}{e^{i\theta_1}} = e^{-i\theta_1} = \overline{e^{i\theta_1}}$

4) $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

Remarques :

- Ces propriétés sont admises. Elles résultent du fait que $|e^{i\theta}| = 1$ et des propriétés des arguments.
- La propriété 2) s'appelle *formule de Moivre* quand on l'écrit sous la forme $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta), n \in \mathbb{Z}$

MÉTHODE 10 Utilisation de la forme exponentielle

▶ Ex. 86 p. 256

Exercice d'application

1) Mettre sous forme exponentielle : $z_1 = -\sqrt{3} + i$, $z_2 = e^{-i\frac{\pi}{6}} z_1^2$, $z_3 = \dfrac{2z_1}{e^{-i\frac{\pi}{6}}}$.

2) Déterminer les entiers n tels que $(-z_1)^n$ est un nombre réel.

3) Soit $Z = \dfrac{1+i}{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}$ un complexe.
   a) Déterminer la forme exponentielle du complexe Z.
   b) Déterminer la forme algébrique du complexe Z. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Correction

1) En employant la méthode 6 on trouve $|z_1| = 2$ puis $\arg(z_1) = \dfrac{5\pi}{6}\ [2\pi]$. Donc $z_1 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

On en déduit : $z_2 = e^{-i\frac{\pi}{6}} \times \left(2e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^2 = 4e^{-i\frac{\pi}{6}} \times e^{\frac{2\times 5\pi}{6}} = 4ie^{i\frac{9\pi}{6}} = 4e^{i\frac{3\pi}{2}} = -4i$

et $z_3 = \dfrac{2\times 2e^{i\frac{5\pi}{6}}}{5e^{-i\frac{5\pi}{6}}} = \dfrac{4}{5}e^{i\left(\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)} = \dfrac{4}{5}e^{i\pi} = -\dfrac{4}{5}$.

2) $z_1 = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$ et donc $(-z_1)^n = \left(2e^{i\frac{-\pi}{6}}\right)^n = 2^n e^{i\frac{-n\pi}{6}}$.

$(-z_1)^n$ est réel $\iff \dfrac{-n\pi}{6} = 0[\pi] \iff$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\dfrac{-n\pi}{6} = k\pi \iff n = -6k$.

Donc $(-z_1)^n$ est réel si et seulement si n est un multiple de 6.

3) a) On a : $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $\sqrt{6} + i\sqrt{2} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$ donc

$Z = \dfrac{1+i}{\sqrt{6}+i\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}} = \dfrac{1}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)} = \dfrac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$ est la forme exponentielle de Z.

b) $Z = \dfrac{(1+i)(\sqrt{6}-i\sqrt{2})}{8} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8} + i\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}$ est la forme algébrique de Z.

On a donc : $\dfrac{1}{2}e^{i\dfrac{\pi}{12}} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8} + i\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}$.

D'où : $\dfrac{1}{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\right) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8} + i\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}$.

On en déduit : $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Remarque :

La notation exponentielle permet de retrouver les formules d'addition pour le cosinus et le sinus. Voir l'exercice 91.

Activités mentales

1 Pour chacun des nombres suivants, dire s'il est réel, imaginaire pur ou complexe quelconque. Déterminer ses parties réelles et imaginaires.

1) $z_1 = 2$.

2) $z_2 = 1 + 2\mathrm{i}$.

3) $z_3 = \sqrt{3}$.

4) $z_4 = \mathrm{i}\sqrt{2} - 3$

5) $z_5 = \dfrac{3\mathrm{i}}{4}$.

6) $z_6 = -5 - \dfrac{2}{3}\mathrm{i}$.

7) $z_7 = \dfrac{1}{7} - \mathrm{i}$

8) $z_8 = -\mathrm{i} - 3 + \mathrm{i}$

2 Mettre les résultats des opérations suivantes sous forme algébrique :

1) $(1 + 2\mathrm{i}) + (3 - \mathrm{i})$

2) $3(2 - \mathrm{i})$

3) $(4 - \mathrm{i}) - (6 - \mathrm{i})$

4) $\dfrac{2 + \mathrm{i}}{2}$

3 Mettre les résultats des opérations suivantes sous forme algébrique :

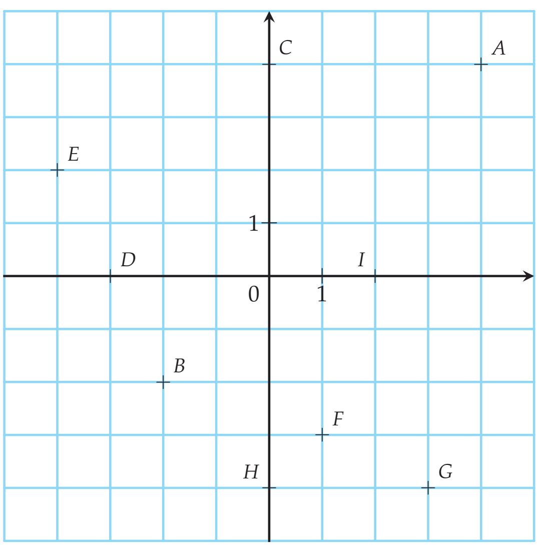
1) $z_1 = \mathrm{i}(1 + 2\mathrm{i})$

2) $z_2 = (\sqrt{2} + \mathrm{i})(\sqrt{2} - \mathrm{i})$

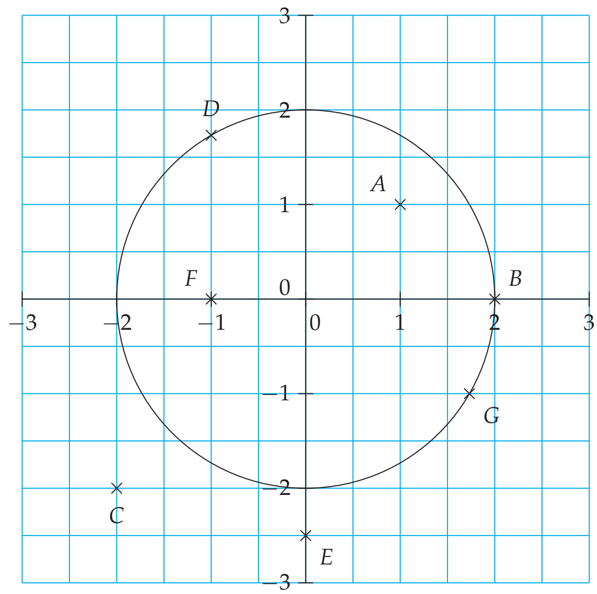
3) $z_3 = (5 - \mathrm{i})(5 + \mathrm{i}^2)$

4) $z_4 = (1 + \mathrm{i})^2$

4 Déterminer les affixes des points repérés ci-dessous.



5 Sur le graphique suivant, on a représenté des points et le cercle de centre l'origine et de rayon 2. Donner le module et un argument de leurs affixes.



6 Pour chacun des nombres complexes suivants, dire s'il est sous forme trigonométrique et déterminer, si c'est le cas, son module et son argument.

1) $z_1 = 5\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

2) $z_2 = -2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

3) $z_3 = \cos\dfrac{\pi}{5} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{5}$

4) $z_4 = 3\left(\cos\dfrac{\pi}{4} - \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

5) $z_5 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

6) $z_6 = 3\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{2}$

7) $z_7 = \dfrac{3}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

8) $z_8 = 4\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + \sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

7 Mettre les résultats des opérations suivantes sous forme exponentielle :

1) $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} \times \mathrm{e}^{3\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$

2) $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{7}}}$

3) $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{5}}}{\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\frac{\pi}{5}}}$

4) $\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\frac{\pi}{9}}\right)^2$

5) $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)^3$

6) $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$

Sommes et produits de complexes

8 Calculer les sommes suivantes, donner le résultat sous forme algébrique :

1) $(2-4\mathrm{i})+(2-3\mathrm{i})$
2) $(1-5\mathrm{i})+(2+\mathrm{i})$
3) $(3+3\mathrm{i})+(1-\mathrm{i})$
4) $\left(2+\frac{1}{3}\mathrm{i}\right)+\left(-3+\frac{4}{3}\mathrm{i}\right)$

9 Calculer les sommes suivantes, donner le résultat sous forme algébrique :

1) $\left(1+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)+(3+\mathrm{i})$
2) $(-3+2\mathrm{i})-(4+\mathrm{i})$
3) $\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\mathrm{i}\right)+(-2-2\mathrm{i})$
4) $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\mathrm{i}\right)$

10 Calculer les sommes suivantes, donner le résultat sous forme algébrique :

1) $(2+\mathrm{i}\sqrt{5})+(3-2i\sqrt{5})$
2) $3\mathrm{i}-1+2(\sqrt{2}-\mathrm{i})$
3) $2+\mathrm{i}+\mathrm{i}(3-2\mathrm{i})$
4) $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\mathrm{i}\right)$

11 ► MÉTHODE 1 p. 232

Calculer les expressions suivantes, donner le résultat sous forme algébrique :

1) $2(1+2\mathrm{i})$
2) $\mathrm{i}(3+\mathrm{i})$
3) $2\mathrm{i}(3-2\mathrm{i})$
4) $(1+2\mathrm{i})(-2-2\mathrm{i})$

12 Calculer les expressions suivantes, donner le résultat sous forme algébrique :

1) $(3+\mathrm{i})^2$
2) $(1+\mathrm{i}\sqrt{2})^2$
3) $(5-2\mathrm{i})(5+2\mathrm{i})$
4) $(\sqrt{2}+2\mathrm{i})(3-\sqrt{2}\mathrm{i})$

13 Calculer les expressions suivantes, donner le résultat sous forme algébrique :

1) $(3-\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})+5-\mathrm{i}$
2) $(5-2\mathrm{i})(5+2\mathrm{i})$
3) $(2-\mathrm{i})(\mathrm{i}+1)$
4) $(\sqrt{2}+2\mathrm{i})(3-\sqrt{2}\mathrm{i})$
5) $(1+2\mathrm{i})(3-\mathrm{i})(-3-3\mathrm{i})$
6) $(7\mathrm{i}-3)(7-3\mathrm{i})$
7) $(1-2\mathrm{i})^3$

14

1) Simplifier au maximum les expressions suivantes :
   a) i^2 b) i^3 c) i^4 d) i^5 e) i^{12} f) i^{13}
2) Conjecturer une règle donnant i^n en fonction de n et la démontrer par récurrence.
3) En déduire la valeur de i^{2713}.

15 ALGO

1) Si $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$, donner la formule calculant la partie réelle puis la partie imaginaire de leur produit.
2) Écrire un algorithme qui permet de calculer ces parties réelles et imaginaires lorsqu'on entre celles des complexes z_1 et z_2.

Le plan complexe

Dans toute cette série d'exercices, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

16

1) Placer les points A, B et C dont les affixes respectives sont : $z_A = -3-2\mathrm{i}$, $z_B = 5+2\mathrm{i}$ et $z_C = 1-3\mathrm{i}$.
2) Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.
3) Le quadrilatère $OABC$ est-il un parallélogramme ?

17 ► MÉTHODE 2 p. 235

On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $1+\mathrm{i}$, $2-3\mathrm{i}$ et $-2-\mathrm{i}$.

1) Déterminer l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
2) Déterminer l'affixe du point I centre du parallélogramme.
3) Placer tous ces points dans un repère orthonormal.

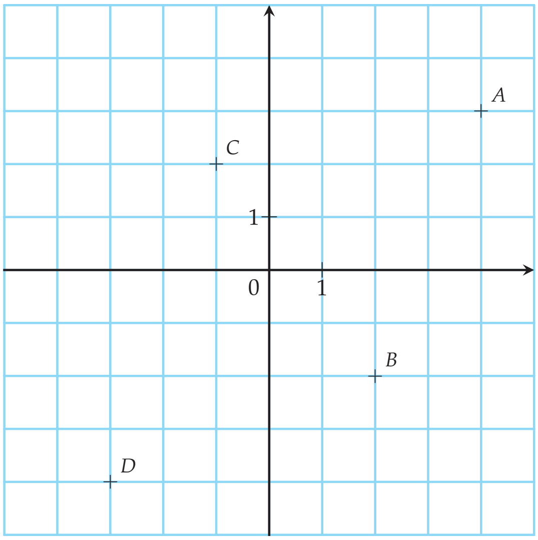
18 Soient A, B et C trois points du plan d'affixes respectives : $\frac{3-2\mathrm{i}}{2}$, $\frac{1}{3}-\mathrm{i}$ et $-3-\mathrm{i}$.

1) Déterminer l'affixe du milieu du segment $[AB]$.
2) Déterminer l'affixe du symétrique de A par rapport à C.
3) Déterminer l'affixe de l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

19 On considère les points M et N d'affixes respectives $z_M = -3-\mathrm{i}$ et $z_N = \frac{3+\mathrm{i}}{3}$.

1) Les points O, M, N sont-ils alignés ? Démontrer votre réponse.
2) On considère le point P d'affixe $3\mathrm{i}$. Déterminer l'affixe du point Q tel que $MNQP$ soit un parallélogramme.

20



Sans effectuer de calculs

1) Lire l’affixe z_A du point A.
2) Construire le point dont l’affixe est $\bar{z}_A$.
3) Construire le point dont l’affixe est $-z_A$.
4) Construire le point dont l’affixe est $z_A + 2$.
5) Construire le point dont l’affixe est $z_A - \mathrm{i}$.
6) Mêmes questions pour les points B, C et D

21 On se place dans le plan complexe, et on considère trois points A, B, C d’affixes respectives a, b, c.

1) Faire une figure dans le cas où : $a = 2 + 3\mathrm{i}$, $b = 5 + \mathrm{i}$ et $c = 3 + 5\mathrm{i}$.
2) On considère le point G du plan tel que

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}.$$

   a) Démontrer que $z_G = \dfrac{1}{3}(a + b + c)$.
   b) Placer le point G dans le cas particulier du 1.

22 Déterminer les affixes et les normes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ sachant que

- $z_A = 1 - 3\mathrm{i}$
- $z_B = 2 - \mathrm{i}$
- $z_C = 3$

23 Déterminer les affixes et les normes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ sachant que

- $z_A = 3 - \sqrt{2}\mathrm{i}$
- $z_B = 1 + \mathrm{i}$
- $z_C = \dfrac{\mathrm{i}}{2}$

24 Les points A, B, C et D ont pour affixes respectives $z_A = 3 + 2\mathrm{i}$, $z_B = 1 - \mathrm{i}$, $z_C = 2 + 2\mathrm{i}$ et $z_D = -\mathrm{i}$.

1) Déterminer les affixes des vecteur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.
2) En déduire la nature de $ABDC$.
3) Déterminer les affixes respectives du milieu I de $[AD]$ et du milieu J de $[BC]$.
4) En déduire une autre preuve du résultat de la question 2.

25 On considère les points A, B, C et D d’affixes respectives $z_A = 8$, $z_B = 8\mathrm{i}$, $z_C = 4\sqrt{2}(1 + \mathrm{i})$ et $z_D = 4(-1 - \mathrm{i}\sqrt{3})$

1) Calculer le module et un argument de z_A , puis de z_B, z_C et z_D.
2) Démontrer que les points A, B, C et D sont sur un même cercle, dont on précisera le centre et le rayon.

26 Soit la fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$f(z) = z^2.$$

Dans chacun des cas suivants, représenter l’ensemble des points M du plan dont l’affixe remplie la condition demandée

1) $f(z) \in \mathbb{R}$
2) $f(z)$ imaginaire pur

27 Soit la fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$f(z) = z(\bar{z} + 1).$$

Dans chacun des cas suivants, représenter l’ensemble des points M du plan dont l’affixe remplie la condition demandée

1) $f(z) \in \mathbb{R}$
2) $f(z)$ imaginaire pur
3) $\mathrm{Re}(f(z)) = 4$
4) $\mathrm{Re}(f(z)) = \mathrm{Im}(f(z))$

28 Soient A, B et C les points d’affixes respectives : $z_A = 3$, $z_B = \dfrac{5}{2} + \dfrac{7}{2}\mathrm{i}$ et $z_C = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$.

1) Placer ces points sur une figure.
2) Calculer $|z_B - z_A|$, $|z_A - z_C|$ et $|z_C - z_B|$.
3) Démontrer que le triangle ABC est rectangle isocèle.
4) Déterminer l’affixe du milieu I du segment $[BC]$.
5) En déduire l’affixe du point D tel que le $ABDC$ soit un carré.

29 Soit la fonction f de $\mathbb{C} - \{-1\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$f(z) = \frac{z-1}{z+1}.$$

Dans chacun des cas suivants, représenter l'ensemble des points M du plan dont l'affixe remplie la condition demandée.

1) On pose $z = x + iy$ avec x ; y réels. Déterminer l'expression de $f(z)$ en fonction de x et y.

2) a) $f(z) = 2$ c) $f(z)$ imaginaire pur
b) $f(z) \in \mathbb{R}$ d) $f(z)$

30 On considère les deux points du plan complexe $A(\mathrm{i})$ et $B(2-\mathrm{i})$.

1) Résoudre l'équation : $\dfrac{z-\mathrm{i}}{z-(2-\mathrm{i})} = 3.$
On notera M le point qui a pour affixe la solution.

2) Démontrer que A, B et M sont alignés.

3) Expliquer pourquoi, pour tout nombre réel λ, le point dont l'affixe est solution de l'équation :

$$\frac{z-\mathrm{i}}{z-(2-\mathrm{i})} = \lambda$$

est aligné avec A et B.

Conjugué d'un complexe

31 Calculer les conjugués des nombres complexes suivants :

1) $9 + \mathrm{i}$ 3) $\dfrac{3 - \mathrm{i}\sqrt{7}}{7}$
2) $5\mathrm{i} - 2$ 4) $\sqrt{7} + \mathrm{i}\pi$

32 Calculer les conjugués des nombres complexes suivants :

1) $7 - \left(3 + \dfrac{5}{3}\mathrm{i}\right)$ 3) $\dfrac{3}{2} + 3\mathrm{i} + (1-\mathrm{i})$
2) $(3 - 5\mathrm{i}) + \sqrt{2}$ 4) $(5-\mathrm{i})\left(\sqrt{2} + 3\mathrm{i}\right)$

33 Résoudre les équations suivantes :

1) $\bar{z} = 2\bar{z} + 1$ 3) $\dfrac{\bar{z}+1}{\bar{z}-1} = 2\mathrm{i}$
2) $-\bar{z} = 1 + \mathrm{i}$ 4) $(\bar{z}+1)(2+3\bar{z}-\mathrm{i}) = 0$

34 On pose pour tout $z = a + bi \in \mathbb{C}$,

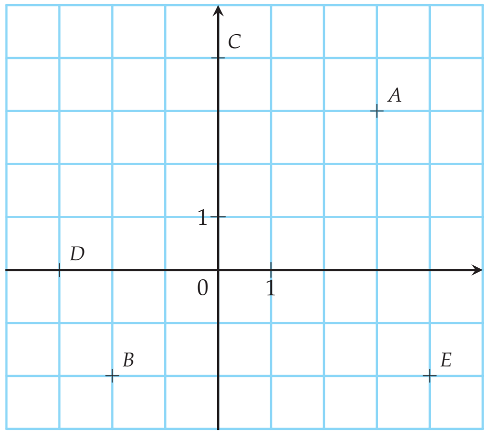
$$f(z) = 3\bar{z} + \mathrm{i} - 2$$

1) Écrire $\mathrm{Re}(f(z))$ et $\mathrm{Im}(f(z))$ en fonction de a et b.

2) L'équation $f(z) = z$ admet-elle des solutions ?

35 Pour tout $z = a + bi \in \mathbb{C}$, on pose $f(z) = -\bar{z}$.

1) On considère les points suivants dans le plan complexe :



Placer dans le plan les points dont les affixes sont les images de ceux de A, B, C, D et E.

2) Quelle semble être la transformation géométrique réalisée par f ?

3) Déterminer pour tout z la forme algébrique de $f(z)$.

4) Démontrer la conjecture précédente.

36 ROC

On pourra utiliser comme prérequis que pour tous nombres complexes z_1 et z_2 on a :

$$\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}.$$

1) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ on a $\overline{z^n} = \bar{z}^n$

2) En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ et pour tout nombre complexe z : $z^n + \bar{z}^n$ est un nombre réel.

3) Démontrer que pout tout entier naturel n le complexe $(2-\mathrm{i})^{2n} + (3-4\mathrm{i})^n$ est un nombre réel.

37 Soit z, un nombre complexe, déterminer les conjugués des nombres complexes suivants :

1) $3z$ 4) $\dfrac{z+1}{3}$
2) $z + 5 - \mathrm{i}$ 5) $\mathrm{i}z + 2$
3) $z^2 + 2z$ 6) $\dfrac{\mathrm{i}-z}{z+1}$

38 Soit z, un nombre complexe, déterminer les conjugués des nombres complexes suivants :

1) $2z - \bar{z}$ 4) $\mathrm{i}\bar{z}$
2) $z + \dfrac{1}{\bar{z}}$ 5) $z + \mathrm{i}\bar{z}$
3) $z^2 + \bar{z}^2$ 6) $-2\bar{z}$

Inverses et quotients

39 Déterminer les inverses des nombres complexes suivants :

1) $3+2\mathrm{i}$
2) $-2\mathrm{i}+3$
3) $-2\mathrm{i}$
4) $\sqrt{2}-\mathrm{i}\sqrt{2}\mathrm{i}$
5) $3-\mathrm{i}(2+\mathrm{i})$
6) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

40 Mettre les quotients des nombres complexes suivants sous forme algébrique :

1) $\dfrac{1-\mathrm{i}}{2+3\mathrm{i}}$
2) $\dfrac{7}{\mathrm{i}}$
3) $\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$
4) $\dfrac{3+2\mathrm{i}}{\mathrm{i}-2}$
5) $\dfrac{1+\sqrt{2}\mathrm{i}}{1-\sqrt{2}\mathrm{i}}$
6) $\dfrac{\mathrm{i}(1+2\mathrm{i})}{3-\mathrm{i}}$

41 Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

1) $\left(\dfrac{1}{1-\mathrm{i}}\right)^2$
2) $\dfrac{1}{2-\mathrm{i}\sqrt{2}}+\dfrac{2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$
3) $(3+\mathrm{i})\dfrac{3-2\mathrm{i}}{5-\mathrm{i}}$
4) $\dfrac{27+13\mathrm{i}}{21-2\mathrm{i}}$
5) $7+\dfrac{3+10\mathrm{i}}{5-5\mathrm{i}}$
6) $\dfrac{5+\mathrm{i}}{5-\mathrm{i}}+\mathrm{i}$
7) $\dfrac{2-\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}}-\dfrac{2}{1-\mathrm{i}}$
8) $\dfrac{6-\mathrm{i}}{3-3\mathrm{i}}\times\dfrac{2+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$

42

1) Montrer de deux façons différentes que pour tout $z\neq 0$, $\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{\bar{z}}$ est un réel.
2) Montrer de deux façons différentes que pour tout $z\neq 0$, $\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{\bar{z}}$ est un imaginaire pur.

43 Démontrer les propriétés suivantes :

1) Le quotient de deux complexes de module 1 est un complexe de module 1.
2) Le quotient de deux imaginaires purs est un réel.
3) Le quotient de deux complexes d'arguments opposés est un réel.
4) L'inverse d'un complexe de module supérieur à 1 est un complexe de module inférieur à 1 et réciproquement.

44 Soit z un nombre complexe non nul.

1) Déterminer le module et un argument de $\dfrac{z}{\bar{z}}$.
2) Si z est un imaginaire pur, que peut-on dire de $\dfrac{z}{\bar{z}}$?

Équations et nombres complexes

45 ► MÉTHODE 3 p. 237

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes. On donnera les solutions sous forme algébrique.

1) $(1+\mathrm{i})z=1-\mathrm{i}$.
2) $\dfrac{z+1}{z-1}=2\mathrm{i}$.
3) $(2z+1-\mathrm{i})(\mathrm{i}z+3)=0$.
4) $\dfrac{\mathrm{i}z+1}{z-3\mathrm{i}}=2+\mathrm{i}$

46 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $-2\mathrm{i}z=3z+1$.
2) $\dfrac{2\mathrm{i}z+\mathrm{i}}{z-1-\mathrm{i}}=3$.
3) $(z-\mathrm{i})^2=(z+1+\mathrm{i})^2$.
4) $\dfrac{2}{z}+3\mathrm{i}=-2-5\mathrm{i}$.

47 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $\bar{z}+z=3\mathrm{i}$
2) $(3+\mathrm{i})\bar{z}+2z=0$
3) $-2\bar{z}=(-2-\mathrm{i})\bar{z}+1$
4) $2\mathrm{i}\bar{z}=3\mathrm{i}+2\mathrm{i}z$

48 Résoudre les équations suivantes avec la méthode la mieux adaptée :

1) $\bar{z}-2\mathrm{i}z=3$
2) $z-\mathrm{i}=\bar{z}$
3) $\mathrm{i}\bar{z}=3z-2\mathrm{i}$
4) $2\mathrm{i}\bar{z}=\dfrac{\bar{z}-\mathrm{i}}{2}$
5) $\dfrac{z}{\bar{z}+1}=3$
6) $\dfrac{\bar{z}}{z-1}=2$

49 On pose pour tout $z=a+b\mathrm{i}\in\mathbb{C}$,

$$f(z)=z+3\bar{z}-5\mathrm{i}+1.$$

1) Écrire $\mathrm{Re}(f(z))$ et $\mathrm{Im}(f(z))$ en fonction de a et b.
2) Résoudre l'équation $f(z)=0$.

50 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes d'équations suivants :

1) $\begin{cases} z+z' &= 2-5\mathrm{i} \\ z+3z' &= \mathrm{i}-1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2z+3z' &= 1 \\ z-z' &= \mathrm{i} \end{cases}$

3) $\begin{cases} -2z+2z' &= 1+\mathrm{i} \\ z+3z' &= 5 \end{cases}$

4) $\begin{cases} z+\mathrm{i}z' &= 2 \\ 2z+2z' &= 2+3\mathrm{i} \end{cases}$

Équations du second degré

51 ► MÉTHODE 4 p. 239

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $z^2-3z=0$
2) $4z^2-4z+5=0$
3) $z^2+z+1=0$
4) $-2z^2+6z+5=0$

52 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $z^2 = -7z$
2) $2z^2 = 3z - 2$
3) $-2z + z^2 + 2 = 0$
4) $-8 = 3z^2$

53 Déterminer deux nombres complexes z_1 et z_2 tels que :

$$\begin{cases} z_1 + z_2 & = & 3 \\ z_1 \times z_2 & = & 5 \end{cases}$$

54 Résoudre les équations suivantes. Écrire les solutions sous la forme la plus simplifiée possible :

1) $3z^2 - 2z = 1$
2) $\dfrac{z^2+9}{3} = 0$
3) $2z^2 = z + 3$
4) $\dfrac{3-z^2}{z} = 3$

55 Résoudre les équations suivantes. Écrire les solutions sous la forme la plus simplifiée possible :

1) $\dfrac{3+z}{3-z} = z$
2) $(z-2)^2 = -4$
3) $(z-2)^2 = (3+iz)^2$
4) $z^2 = 3iz$

56 Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose

$$P(z) = z^3 - 5z^2 + 9z - 9.$$

1) Démontrer que pour tout nombre complexe z, on a $P(z) = (z-3)(z^2 - 2z + 3)$.
2) En déduire les solutions de l'équation $P(z) = 0$.
3) Écrire P comme un produit de facteurs du premier degré.

57 Déterminer deux nombres complexes z_1 et z_2 dont la somme et le produit valent 2.

58 On se propose de résoudre l'équation

$$z^2 + 2iz - 2 = 0 \qquad \text{(E)}$$

1) Développer $(z + i)^2$.
2) En déduire que l'équation E est équivalente à

$$(z+i)^2 - 1 = 0.$$

3) En déduire les solutions de (E).

59 On étudie l'équation :

$$z^2 + iz + c = 0 \qquad \text{(E')}$$

où c est un réel.

1) Développer $\left(z + \dfrac{i}{2}\right)^2$.
2) En déduire que l'équation E′ est équivalente à

$$\left(z + \frac{i}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} + c = 0.$$

3) Quelle condition sur c faut-il imposer pour que les solutions de (E′) soient des imaginaires purs ?
4) Déterminer dans ce cas les solutions de (E′).

Module et argument

60 ► MÉTHODE 5 p. 240

Dans le plan complexe représenter, dans chacun des cas suivants, les points M dont les affixes z remplissent la condition donnée :

1) $\arg(z) = \dfrac{\pi}{3}$
2) $|z| = 5$
3) $|z| = 3$ et $\arg(z) = \pm\pi$
4) $\arg(z) = -\pi$

61 ► MÉTHODE 6 p. 240

Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

1) $z_1 = 7$
2) $z_2 = 2i$
3) $z_3 = \dfrac{-1+i}{3}$
4) $z_4 = \sqrt{3} + i$

62 Dans chacun des cas suivants, déterminer le module et un argument du complexe donné :

1) $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$
2) $z_2 = i(1+i)$
3) $z_3 = (3-i)(2i+1)$
4) $z_4 = i\sqrt{3} + 1$

63 Dans chacun des cas suivants, déterminer de deux manières différentes le module et l'argument du nombre complexe proposé

1) $z_1 = \left(\sqrt{3} - i\right)(-1-i)$
2) $z_2 = \dfrac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}$
3) $z_3 = i\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)$
4) $z_4 = \left(\dfrac{3i}{1+i\sqrt{3}}\right)^2$

64 ► MÉTHODE 8 p. 244

Dans le plan complexe, représenter les points M d'affixe z satisfaisant les conditions suivantes :

1) $\arg(z-1) = \dfrac{\pi}{2}$
2) $|z-3| = 2$
3) $|z-i| = 5$
4) $2\arg(z) = 0$

65 Dans chacun des cas suivants, représenter l'ensemble des points M dont l'affixe z satisfait la condition proposée.

1) $|z| = 3$
2) $\arg(z) = \dfrac{2\pi}{3}$
3) $|z-2| = 4$
4) $\arg(z-i) = -\dfrac{\pi}{4}$

66 Dans chacun des cas suivants, représenter l'ensemble des points M dont l'affixe z satisfait la condition proposée.

1) $|z+i|=5$
2) $\arg(z-1-2\mathrm{i})=\dfrac{\pi}{3}$
3) $|z-2|=|z-8|$
4) $\arg(z-3\mathrm{i}+1)=\dfrac{3\pi}{2}$

67 Dans le plan complexe, représenter dans chacun des cas suivants les points M dont l'affixe z vérifie :

1) $\arg(\mathrm{i}z)=\dfrac{\pi}{3}$
2) $|2z-\mathrm{i}|=1$
3) $|z-3|=|z+4|$
4) $\arg\left(\dfrac{\mathrm{i}}{\pi z}\right)=\dfrac{\pi}{2}$
5) $\dfrac{|3z-2|}{|z+3\mathrm{i}|}=1$
6) $\arg(3\mathrm{i}z)=\dfrac{\pi}{3}$
7) $\left|\dfrac{z+1}{z+2}\right|=1$
8) $\arg(\mathrm{i}z^2)=\dfrac{4\pi}{3}$

68

1) Traduire géométriquement la condition $z\bar{z}=4$.
2) Représenter dans le plan complexe l'ensemble des points dont l'affixe z est telle que $z\bar{z}=4$.

69

1) Traduire géométriquement la condition

$$(z-i)\overline{(z-i)}=9$$

2) Développer et simplifier autant que possible l'expression $(z-i)\overline{(z-i)}$.
3) Représenter dans le plan complexe l'ensemble des points dont l'affixe z vérifie $|z|^2-2\,\mathrm{Im}\,z=8$.

70 **D'après concours Geipi-2015**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On considère les points A, B d'affixes respectives : $z_A=1$ et $z_B=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$. Soit C le symétrique de B par rapport à l'axe des abscisses.

1) a) Faire une figure en prenant pour unité 4 cm.
   b) Donner l'affixe du point C.
   c) Calculer $|z_B-z_A|$ en détaillant le calcul.
   d) Calculer $|z_C-z_A|$ et $|z_C-z_B|$.
   e) Quelle est la nature du triangle ABC ?
2) On note I, J, K les projetés orthogonaux du point O sur les droites (BC), (AC) et (AB). On désigne par z_I, z_J et z_K leurs affixes.
   a) Déterminer z_I, z_J et z_K et donner leurs modules.
   b) En déduire $L_O=OI+OJ+OK$ en justifiant la réponse.

71 ROC

On rappelle les prérequis suivants :
Pour tous nombres complexes z et z' on a

$$\arg(z\times z')=\arg(z)+\arg(z')\ [2\pi].$$

1) Démontrer que pout tout entier naturel n :
$$\arg(z^n)=n\arg(z)\ [2\pi].$$
2) Déterminer un argument du complexe $z=3-3\mathrm{i}$ et en déduire que z^n est un nombre réel si et seulement si n est un multiple de 4.

72 ► MÉTHODE 9 p. 245

Soient A, B, C, D quatre points du plan distincts deux à deux. On note z_A, z_B, z_C, z_D leurs affixes respectives.

1) Démontrer qu'une mesure en radians de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}}\right)$ est donnée par $\arg\left(\dfrac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)$.
2) Dans chacun des cas suivants, utiliser le résultat précédent pour vérifier si le triangle ABC est rectangle en B.
   a) $A(3+2\mathrm{i})$, $B(0)$ et $C\left(-1+\dfrac{3}{2}\mathrm{i}\right)$;
   b) $A(2-\mathrm{i})$, $B(1-4\mathrm{i})$ et $C(-2-3\mathrm{i})$;
   c) $A(-4)$, $B(-2+3\mathrm{i})$ et $C(4-\mathrm{i})$.
3) Dans les cas où il est rectangle vérifier s'il est isocèle.

Forme trigonométrique

73 Donner la forme trigonométrique des nombres complexes suivants :

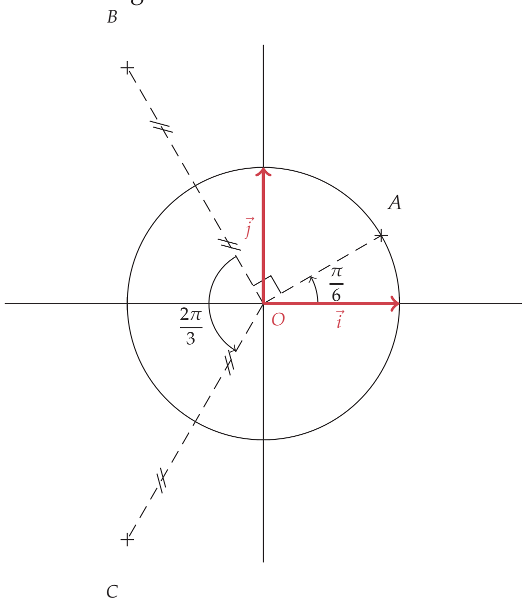
1) 7
2) $5\mathrm{i}$
3) $-2-2\mathrm{i}$
4) $\mathrm{i}+\sqrt{3}$
5) -5
6) $-2+2\mathrm{i}\sqrt{3}$
7) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{i}{2}$
8) $\dfrac{1}{3}-\dfrac{i}{3}$

74 Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

1) $2\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$
2) $5\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$
3) $\cos(\pi)+\mathrm{i}\sin(\pi)$
4) $3\left(\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)\right)$
5) $\sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)$
6) $\dfrac{2}{3}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$
7) $2\left(\cos\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)\right)$
8) $\cos\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)$

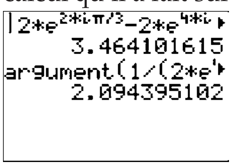
75 INFO

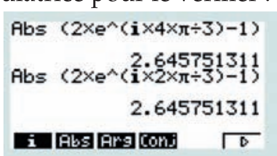
On donne la figure ci-dessous :



1) À l'aide des éléments codés sur la figure, déterminer les formes trigonométriques puis algébriques des affixes des points A, B, C

2) On note D le point d'affixe 1. Un élève affirme que le triangle BCD est équilatéral. On donne ci-dessous le calcul qu'il a fait sur sa calculatrice pour le vérifier :



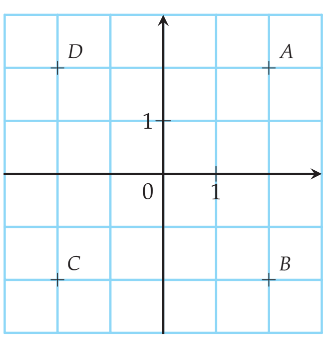


a) Expliquer le calcul fait.

b) Faire le calcul vous même.

76 **Question ouverte**

On considère les points suivants dans le plan complexe



Déterminer une écriture sous forme trigonométrique des affixes des points A, B, C et D.

77 Donner une valeur approchée au centième d'un argument de chacun des nombres complexes suivants :

1) $4-3\mathrm{i}$

2) $1+2\mathrm{i}$

3) $-2+\mathrm{i}$

4) $-3-\mathrm{i}$

78 On considère le nombre complexe $z=\dfrac{2}{1-i}$.

1) Déterminer sa forme trigonométrique de deux façons différentes.

2) En déduire que z^8 est un nombre réel.

3) Généraliser le calcul précédent.

79 On considère un nombre complexe z tel que

$$\begin{cases} |z| & =2 \\ \arg(z) & =\dfrac{5\pi}{6} \end{cases}$$

1) Déterminer les écritures trigonométriques et algébriques de z.

2) Déterminer l'écriture algébrique de $\dfrac{1}{z}$.

3) Déterminer, par deux méthodes différentes, l'écriture algébrique de $\dfrac{1}{\bar{z}}$.

80 ► MÉTHODE 7 p. 243

On considère les nombres complexes

$$z=\frac{\sqrt{6}-\mathrm{i}\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad z'=1-\mathrm{i}$$

1) Déterminer le module et un argument de z, z' et $\dfrac{z}{z'}$.

2) Déterminer la forme algébrique de $\dfrac{z}{z'}$.

3) En déduire que

$$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

et

$$\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Forme exponentielle

81 Mettre les nombres complexes suivants sous forme exponentielle :

1) $-2+2\mathrm{i}$

2) $1-\mathrm{i}$

3) $-3-3\mathrm{i}$

4) $\sqrt{3}+\mathrm{i}$

5) $3\mathrm{i}$

6) 3

7) $-\mathrm{i}$

8) $2+2\mathrm{i}\sqrt{3}$

82 Mettre les nombres complexes suivants sous forme exponentielle :

1) $1+\mathrm{i}$
2) $3-3\mathrm{i}$
3) $\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2}$
4) $-\sqrt{6}+\mathrm{i}\sqrt{2}$
5) 2713
6) $\frac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{3}$
7) $\frac{\mathrm{i}-1}{1+\mathrm{i}}$
8) $\mathrm{i}\sqrt{2}$

83 Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

1) $4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$
2) $3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$
3) $\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$
4) $2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi}$
5) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$
6) $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$

84 Effectuer les calculs suivants. Donner le résultat sous forme exponentielle

1) $5\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$
2) $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\times 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$
3) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}(-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi})$
4) $\frac{8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}$
5) $\frac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}}$
6) $\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}$

85 Effectuer les calculs suivants. Donner le résultat sous forme exponentielle

1) $\frac{8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}\times\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}$
2) $\frac{2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\times 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}$
3) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$
4) $\frac{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right)^2}{(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi})^2}$

86 ▶ MÉTHODE 10 p. 247

Effectuer les calculs suivants en utilisant la forme exponentielle.

1) $\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$
2) $\left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^3$
3) $(1+\mathrm{i}\sqrt{2})^2$
4) $(1+\mathrm{i}\sqrt{2})^3$
5) $(1-\mathrm{i}\sqrt{5})^4$
6) $\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}\,\frac{\sqrt{6}-\mathrm{i}\sqrt{2}}{1+\mathrm{i}}$

87 On considère le nombre complexe $z=1-\mathrm{i}$.

1) Mettre z sous forme exponentielle.
2) Démontrer que pour tout entier naturel n multiple de 4, z^n est un nombre entier pair.

88 Dans le plan complexe on considère le point A d'affixe $z_A=\sqrt{3}-\mathrm{i}$. On pose $r=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

1) Déterminer la forme exponentielle de $z'_A=z_A\times r$.
2) En déduire le module et un argument de z'_A.
3) Plus généralement pour un complexe z quelconque, on considère le complexe $z'=r\times z$. Déterminer le module et un argument de z' en fonction de ceux de z.
4) Donner un procédé de construction géométrique permettant de construire facilement le point d'affixe z' à partir du point d'affixe z.

89 **Les formules d'Euler**

Soit $\theta\in\mathbb{R}$

1) En utilisant la forme trigonométrique, montrer que
$$\cos\theta=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}.$$
2) Montrer de même que
$$\sin\theta=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}.$$

90 En utilisant les formules d'Euler (exercice 89), établir les identités suivantes :

1) $\cos^2(\theta)=\frac{1+\cos 2\theta}{2}$
2) $\sin^2(\theta)=\frac{1-\cos 2\theta}{2}$
3) $\sin^2(\theta)\cos^2(\theta)=\frac{1-\cos 4\theta}{8}$
4) $\cos^3(\theta)=\frac{3\cos\theta+\cos 3\theta}{4}$

91 Soient a et b deux nombres réels. On pose $z_a=\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}$ et $z_b=\mathrm{e}^{\mathrm{i}b}$.

1) Donner la forme exponentielle du complexe :
$$Z=z_a\times z_b.$$
2) Calculer de deux façons la forme algébrique de Z et en déduire les formules d'addition pour $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$.

92 Pour tout $\theta\in\mathbb{R}$ on considère le complexe
$$z_\theta=1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

1) À l'aide d'une factorisation par $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$ démontrer que $z_\theta=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}\times 2\cos\theta$ (on pourra employer les formules de l'exercice 89).
2) En déduire le module et l'argument de z_θ en fonction de θ pour $\theta\in]-\pi;\pi]$.
3) Démontrer que tous les points M_θ d'affixe z_θ se trouve sur le cercle de centre $A(1)$ et rayon 1.

93 D'après Bac (Polynésie - 2015)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. À tout point M d'affixe z du plan, on associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = z^2 + 4z + 3.$$

1) Un point M est dit invariant lorsqu'il est confondu avec le point M' associé.
Démontrer qu'il existe deux points invariants. Donner l'affixe de chacun de ces points sous forme algébrique, puis sous forme exponentielle.

2) Soit A le point d'affixe $\dfrac{-3-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ et B le point d'affixe $\dfrac{-3+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.
Montrer que OAB est un triangle équilatéral.

3) Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y sont réels, tels que le point M' associé soit sur l'axe des réels.

4) Dans le plan complexe, représenter les points A et B ainsi que l'ensemble $\mathcal{E}$.

94 D'après Bac (Asie - 2015)

Le plan est muni du repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

On donne le nombre complexe $\mathrm{j} = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Le but de cet exercice est d'étudier quelques propriétés du nombre j et de mettre en évidence un lien de ce nombre avec les triangles équilatéraux.

Partie A

1) a) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$z^2 + z + 1 = 0.$$

b) Vérifier que le nombre complexe j est une solution de cette équation.

2) Déterminer le module et un argument du nombre complexe j, puis donner sa forme exponentielle.

3) Démontrer les égalités suivantes :
a) $\mathrm{j}^3 = 1$;
b) $\mathrm{j}^2 = -1 - \mathrm{j}$.

4) On note P, Q, R les images respectives des nombres complexes 1, j et j^2 dans le plan.
Quelle est la nature du triangle PQR ? Justifier la réponse.

Partie B

Soit a, b, c trois nombres complexes vérifiant l'égalité $a + \mathrm{j}b + \mathrm{j}^2c = 0$.

On note A, B, C les images respectives des nombres a, b, c dans le plan.

1) En utilisant la question A) 3b, démontrer l'égalité : $a - c = \mathrm{j}(c - b)$.

2) En déduire que $AC = BC$.

3) Démontrer l'égalité : $a - b = \mathrm{j}^2(b - c)$.

4) En déduire que le triangle ABC est équilatéral.

95 D'après Bac (Antilles - Guyane - 2013) ALGO

On considère la suite (z_n) à termes complexes définie par $z_0 = 1 + \mathrm{i}$ et, pour tout entier naturel n, par :

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{3}.$$

Pour tout entier naturel n, on pose : $z_n = a_n + \mathrm{i}b_n$, où a_n est la partie réelle de z_n et b_n est la partie imaginaire de z_n.
Le but de cet exercice est d'étudier la convergence des suites (a_n) et (b_n).

Partie A

1) Donner a_0 et b_0.

2) Calculer z_1, puis en déduire que $a_1 = \dfrac{1+\sqrt{2}}{3}$ et $b_1 = \dfrac{1}{3}$.

3) On considère l'algorithme suivant :

```
Variables:
  A et B des nombres réels
  K et N des nombres entiers
Initialisation:
  Affecter à A la valeur 1
  Affecter à B la valeur 1
Traitement:
Entrer la valeur de N
  Pour K variant de 1 à N
    Affecter à A la valeur (A + √(A² + B²))/3
    Affecter à B la valeur B/3
  FinPour
Afficher A
```

a) On exécute cet algorithme en saisissant $N = 2$. Recopier et compléter le tableau ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme (on arrondira les valeurs calculées à 10^{-4} près).

K	A	B
1		
2		

b) Pour un nombre N donné, à quoi correspond la valeur affichée par l'algorithme par rapport à la situation étudiée dans cet exercice ?

Partie B

1) Pour tout entier naturel n, exprimer z_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
En déduire l'expression de a_{n+1} en fonction de a_n et b_n, et l'expression de b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

2) Quelle est la nature de la suite (b_n) ?
En déduire l'expression de b_n en fonction de n, et déterminer la limite de (b_n).

3) a) On rappelle que pour tous nombres complexes z et z' :

$$|z + z'| \leqslant |z| + |z'| \qquad \text{(inégalité triangulaire)}.$$

Montrer que pour tout entier naturel n,

$$|z_{n+1}| \leqslant \frac{2\,|z_n|}{3}.$$

b) Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$.
Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$u_n \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}.$$

En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite que l'on déterminera.

c) Montrer que, pour tout entier naturel n, $|a_n| \leqslant u_n$. En déduire que la suite (a_n) converge vers
une limite que l'on déterminera.

96 D'après Bac (Antilles - Guyane - 2014)

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On prendra comme unité 2 cm sur chaque axe.

Le graphique sera fait sur une feuille de papier millimétré et complété au fur et à mesure des questions.

On considère la fonction f qui à tout nombre complexe z associe

$$f(z) = z^2 + 2z + 9.$$

1) Calculer l'image de $-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ par la fonction f.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 5$.
Écrire sous forme exponentielle les solutions de cette équation.
Construire alors sur le graphique, à la règle et au compas, les points A et B dont l'affixe est solution de l'équation (A étant le point dont l'affixe a une partie imaginaire positive).
On laissera les traits de construction apparents.

3) Soit λ un nombre réel. On considère l'équation $f(z) = \lambda$ d'inconnue z.
Déterminer l'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles l'équation $f(z) = \lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées.

4) Soit (F) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie :

$$|f(z) - 8| = 3.$$

Prouver que (F) est le cercle de centre $\Omega(-1\,;\,0)$ et de rayon $\sqrt{3}$.
Tracer (F) sur le graphique.

5) Soit z un nombre complexe, tel que $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y sont des nombres réels.

a) Montrer que la forme algébrique de $f(z)$ est

$$x^2 - y^2 + 2x + 9 + \mathrm{i}(2xy + 2y).$$

b) On note (E) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z est telle que $f(z)$ soit un nombre réel.
Montrer que (E) est la réunion de deux droites D_1 et D_2 dont on précisera les équations.
Compléter le graphique de l'annexe en traçant ces droites.

6) Déterminer les coordonnées des points d'intersection des ensembles (E) et (F).

ALGO

97 D'après Bac (Amérique-du-Nord - 2015)

On se place dans un repère orthonormé et, pour tout entier naturel n, on définit les points (A_n) par leurs coordonnées $(x_n\ ;\ y_n)$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} x_0 & = & -3 \\ y_0 & = & 4 \end{cases}$$

et pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} x_{n+1} & = & 0,8x_n - 0,6y_n \\ y_{n+1} & = & 0,6x_n + 0,8y_n \end{cases}$$

1) a) Déterminer les coordonnées des points A_0, A_1 et A_2.

b) Pour construire les points A_n ainsi obtenus, on écrit l'algorithme suivant :

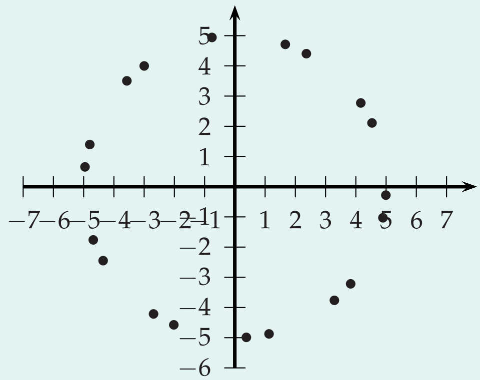
```
Variables :
i, x, y,  t : nombres réels

Initialisation :
x prend la valeur  − 3
y prend la valeur 4

Traitement :
Pour i allant de 0 à 20
 Construire le point de coordonnées (x ; y)
 t prend la valeur x
 x prend la valeur ....
 y prend la valeur  ....
Fin Pour
```

Recopier et compléter cet algorithme pour qu'il construise les points A_0 à A_{20}.

c) À l'aide d'un tableur, on a obtenu le nuage de points suivant :



Identifier les points A_0, A_1 et A_2..
Quel semble être l'ensemble auquel appartiennent les points A_n pour tout n entier naturel ?

2) Le but de cette question est de construire géométriquement les points A_n pour tout n entier naturel.
Dans le plan complexe, on nomme, pour tout entier naturel n, $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$ l'affixe du point A_n.

a) Soit $u_n = |z_n|$. Montrer que, pour tout entier naturel n : $u_n = 5$. Quelle interprétation géométrique peut-on faire de ce résultat ?

b) On veut démontrer qu'il existe un réel θ tel que $\cos(\theta) = 0,8$ et $\sin(\theta) = 0,6$.

i) Démontrer qu'il existe un nombre réel $\theta \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $\cos(\theta) = 0,8$.

ii) Que vaut $\sin(\theta)$? Justifier votre réponse.

c) Montrer que, pour tout entier naturel n :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z_n = z_{n+1}.$$

d) Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$z_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} z_0.$$

e) Montrer que $\theta + \dfrac{\pi}{2}$ est un argument du nombre complexe z_0.

f) Pour tout entier naturel n, déterminer, en fonction de n et θ, un argument du nombre complexe z_n.
Expliquer, pour tout entier naturel n, comment construire le point A_{n+1} à partir du point A_n.

98 **D'après Bac (Pondichéry - 2013)**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1) **Proposition** : Pour tout entier naturel n :

$$(1+\mathrm{i})^{4n} = (-4)^n.$$

2) Soit (E) l'équation $(z-4)\left(z^2-4z+8\right) = 0$ où z désigne un nombre complexe.
Proposition : Les points dont les affixes sont les solutions, dans $\mathbb{C}$, de (E) sont les sommets d'un triangle d'aire 8.

3) **Proposition** : Pour tout nombre réel α :

$$1+\mathrm{e}^{2i\alpha} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\cos(\alpha).$$

4) Soit A le point d'affixe $z_A = \dfrac{1}{2}(1+\mathrm{i})$ et M_n le point d'affixe $(z_A)^n$ où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Proposition : si $n-1$ est divisible par 4, alors les points O, A et M_n sont alignés.

5) Soit j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{2\pi}{3}$.
Proposition : $1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2 = 0$.

6) Soient A, B, C trois points d'affixes a, b, c distinctes deux à deux.
Proposition : Le triangle ABC est isocèle en A si et seulement si $\left|\dfrac{b-a}{c-a}\right| = 1$.

99

Dans cet exercice les deux parties peuvent être traitées indépendamment.

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on appelle A le point d'affixe 1 et $\mathcal{C}$ le cercle de centre A et de rayon 1.

La figure sera réalisée sur une feuille de papier millimétré avec 4 cm pour unité graphique.

Partie A

On considère l'équation

$$(E):\quad z^2-2z+2=0,$$

où z est un nombre complexe. On appelle z_1 et z_2 les solutions de (E).

1) Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.
2) On appelle M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z_1 et z_2 dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. Montrer que M_1 et M_2 appartiennent au cercle $\mathcal{C}$.

Partie B

On considère l'application f du plan complexe qui à tout point M d'affixe z distinct de A associe le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = \frac{2z-1}{2z-2}.$$

1) Placer le point A et tracer le cercle $\mathcal{C}$ sur une figure que l'on complètera au fur et à mesure.
2) Montrer que pour tout complexe z distinct de 1 on a

$$(z'-1)(z-1) = \frac{1}{2}.$$

3) Montrer que pour tout point M distinct de A on a :
   - $AM \times AM' = \dfrac{1}{2}$;
   - $M' \neq A$;
4) On considère le point P d'affixe $z_P = 1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$. Construire le point P.
5) En utilisant la question 3, expliquer comment construire le point P$'$, image de P par f, et réaliser cette construction.
6) *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Soit un point M appartenant à la droite D d'équation $x = \dfrac{3}{4}$. Soit M' son image par f.
   a) Montrer que le point M' appartient au cercle $\mathcal{C}'$ de centre O de rayon 1.
   b) Tout point de $\mathcal{C}'$ a-t-il un antécédent par f ?

Équations

100 On s'intéresse dans cet exercice à la notion de *racine carrée* dans les nombres complexes.

1) Pour les nombres z_i suivants, donner un nombre complexe dont le carré fait z_i :

$$z_1 = 4\ ,\ z_2 = -16\ ,\ z_3 = -15.$$

2) Soit $Z_0 = 1 + i$, on se propose de déterminer un nombre complexe z tel que $z^2 = Z_0$.

a) Mettre Z_0 sous forme exponentielle.

b) À l'aide des règles sur les puissances, en déduire l'écriture exponentielle puis algébrique d'un complexe z tel que $z^2 = Z_0$.

3) Un autre exemple. On considère le nombre complexe $Z_1 = 10 - 6\mathrm{i}$.

a) Expliquer pourquoi on ne peut pas reprendre la méthode de la question précédente.

b) Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. Écrire le système d'équations que doivent satisfaire a et b pour que $z^2 = Z_1$.

c) En déduire a et b.

4) Démontrer que pour tout nombre complexe Z, il existe un nombre complexe z tel que $z^2 = Z$.

101 **Une équation de degré 3**

On considère l'équation d'inconnue $z \in C$:

$$z^3 - z^2 + 2 = 0 \quad (E)$$

1) Vérifier que $z^3 - z^2 + 2 = (z+1)(z^2 - 2z + 2)$ pour tout nombre complexe z.

2) En déduire la résolution de l'équation (E).

3) Placer dans un repère orthonormé les points dont les affixes sont des solutions de l'équation.

4) Démontrer que le triangle obtenu est isocèle.

102 Pour θ nombre réel dans $[0\ ;\pi]$, on considère l'équation :

$$z^2 - 2\cos(\theta)z + 1 = 0.$$

1) Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles l'équation admet une solution réelle.

2) Dans les autres cas, exprimer les solutions complexes en fonction de θ.

103 **Une équation bi-carrée**

On cherche à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^4 - 2z^2 - 3 = 0 \qquad \text{(E)}$$

1) Démontrer que si z est une solution de E alors $\overline{z}$ l'est aussi.

2) On pose $Z = z$. Réécrire alors E comme une équation en Z.

3) Résoudre cette nouvelle équation.

4) En déduire les solutions de E et vérifier la propriété démontrée au 1).

Modules, arguments et complexes

104 On considère trois points du plan A, B et C dont les affixes sont $z_A = 1 + \mathrm{i}$, $z_B = 3 + 5\mathrm{i}$ et enfin $z_C = 2(1+\sqrt{3}) + \mathrm{i}(3-\sqrt{3})$.

1) Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

2) En déduire que le triangle ABC est isocèle en A.

3) À l'aide d'un quotient de complexe, démontrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right)$ a pour mesure $-\dfrac{\pi}{3}$.

4) En déduire la nature du triangle ABC.

105 **Inégalité triangulaire**

On considère deux nombres complexes z_1 et z_2 auxquels on associe les points $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$ dans un repère orthonormé.

1) Traduire l'inégalité $M_1M_2 \leqslant OM_1 + OM_2$ en termes de nombres complexes.

2) En déduire que pour tout z_1 et z_2 dans $\mathbb{C}$ on a l'inégalité dite « triangulaire » :

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

3) On considère une suite de nombres complexes $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Démontrer que pout tout entier n on a :

$$|z_1 + ... + z_n| \leq |z_1| + ... + |z_n|.$$

4) Traduire cette dernière inégalité à l'aide du symbole de sommation $\sum\limits_{k=1}^{n}$.

106 Soit $a = 1 + \mathrm{i}$, on pose pour tout $z \in \mathbb{C} : f(z) = az$.

1) Dans le plan complexe, placer les points $A(2)$, $B(-1)$, $C(\mathrm{i})$, $D(1-\mathrm{i})$ et $E(2\mathrm{i}-2)$. Placer ensuite les points : $A'(f(2))$, $B'(f(-1))$, $C'(f(\mathrm{i}))$, $D'(f(1-\mathrm{i}))$ et $E'(f(2\mathrm{i}-2))$.
2) Déterminer les angles $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}})$, $(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB'}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OC'}})$.
3) Déterminer les rapports $\dfrac{OC'}{OC}$, $\dfrac{OD'}{OD}$ et $\dfrac{OE'}{OE}$.
4) Conjecturer l'action qu'a f sur le plan complexe.
5) Déterminer une forme trigonométrique de a, en déduire pour tout $z \in \mathbb{C}$ le module et l'argument de $f(z)$ en fonction de ceux de z.
6) Démontrer votre conjecture.

107 Soit $a \in \mathbb{C}$, on pose pour tout $z \in \mathbb{C}$; $f(z) = z + a$.

1) Pour $a = 2 + \mathrm{i}$, placer dans le plan complexe les points $A(0)$, $B(\mathrm{i}-1)$ et $C(2\mathrm{i})$ et les points $A'(f(0))$, $B'(f(\mathrm{i}-1))$, $C'(f(2\mathrm{i}))$.
2) Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{CC'}$.
3) Conjecturer la transformation géométrique qu'effectue f sur le plan complexe.
4) Pour a et z quelconques, déterminer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AA'}$, A étant le point d'affixe z et A' le point d'affixe $f(z)$.
5) Démontrer votre conjecture.

108 On considère dans le plan complexe l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M_t de coordonnées

$$\begin{cases} x_{M_t} &= -1 + 2\cos(t) \\ y_{M_t} &= 2 + 2\sin(t) \end{cases}$$

pour $t \in \mathbb{R}$, et C, le point d'affixe $z_C = -1 + 2\mathrm{i}$.

1) Soient $t \in \mathbb{R}$ et z_t l'affixe de M_t. Calculer $|z_t - z_C|$. En déduire que M_t se trouve sur un cercle $\mathcal{C}$ dont on précisera le centre et le rayon.
2) Soit M un point de $\mathcal{C}$ et z son affixe. On pose ; $z' = z - z_C$.
   a) Déterminer $|z'|$.
   b) En déduire la forme trigonométrique de z', puis les coordonnées de M.
   c) En déduire que $M \in \mathcal{E}$.
3) Conclure sur la nature de $\mathcal{E}$.

109 **Encore l'inégalité triangulaire**

On considère deux nombres complexes z et z', on cherche à démontrer algébriquement l'inégalité triangulaire de l'exercice 105.

1) En utilisant la conjugaison, écrire $|z+z'|^2$ en fonction de $|z|$, $|z'|$ et $\mathrm{Re}(z\overline{z'})$.
2) En utilisant les variations de la fontion racine carrée, montrer que la partie réelle d'un complexe est inférieure à son module.
3) En déduire que
$$|z+z'|^2 \leqslant (|z| + |z'|)^2.$$
4) Conclure la démonstration.

110 **Inégalité triangulaire inverse**

On considère deux nombres complexes z et z', on cherche à montrer que

$$\big||z| - |z'|\big| \leqslant |z - z'|.$$

1) En écrivant $|z| = |z + z' - z'|$ et en utilisant l'inégalité triangulaire (exercice 105), montrer que
$$|z| - |z'| \leqslant |z - z'|.$$
2) Établir que
$$|z'| - |z| \leqslant |z - z'|.$$
3) Conclure la démonstration.

Divers

111 **Un peu de logique**

Dans chacun des cas suivants, on donne deux affirmations A et B. On demande à chaque fois de préciser laquelle implique l'autre ou si elles sont équivalentes. Justifier précisément.

1) A : « Le nombre complexe z est un nombre réel. »
   B : « $\arg(z) = 0\ [2\pi]$ »
2) A : « les points A, B, C d'affixes z_A, z_B, z_C sont distincts et alignés ».
   B : « $\arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = 0\ [\pi]$ »
3) A : « z est solution d'une équation du type $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ avec a, b, c, d réels ».
   B : « $\overline{z}$ est solution de la même équation ».

112 Soit a, b deux complexes de module 1.

1) Donner un exemple de deux complexes a, b tels que $ab = -1$.
2) On suppose maintenant que $ab \neq -1$, démontrer que $\dfrac{a+b}{1+ab} \in \mathbb{R}$

113 En électronique, on représente parfois les « résistances » de certains composants par des nombres complexes. Par exemple, une résistance pure est représentée par le réel $Z_r = R$ tandis qu'une bobine est représentée par le complexe $Z_b = \mathrm{i}L\omega$, où L dépend de la bobine et ω du courant qu'on met dans le circuit. Lorsqu'ils sont montés en parallèle, on peut les remplacer par un composant unique associé au complexe Z_e tel que :

$$\frac{1}{Z_e} = \frac{1}{Z_b} + \frac{1}{Z_r}$$

Démontrer que $Z_e = \dfrac{R\left(1+\frac{R}{L\omega}\mathrm{i}\right)}{1+\left(\frac{R}{L\omega}\right)^2}$

114 Pour tout nombre complexe, z, on pose

$$f(z) = z^4 - 10z^3 + 38z^2 - 90z + 261.$$

1) Démontrer que si z est solution de l'équation, alors son conjugué $\overline{z}$ l'est aussi.
2) Soit $b \in \mathbb{R}$, exprimer en fonction de b les parties réelle et imaginaire de $f(b\mathrm{i})$.
3) En déduire que l'équation $f(z) = 0$ admet deux solutions imaginaires pures.
4) Démontrer qu'il existe deux nombres réels α et β que l'on déterminera, tels que pour tout nombre complexe z on ait

$$f(z) = (z^2+9)(z^2+\alpha z+\beta).$$

5) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$.

115 **Les entiers de Gauß**

On appelle *entier de Gauß* tout nombre complexe de la forme $k + \mathrm{i}\ell$, où k et ℓ sont des entiers relatifs.

1) Montrer que la somme et la différence de deux entiers de Gauß sont des entiers de Gauß.
2) Montrer que le produit de deux entiers de Gauß est un entier de Gauß.
3) Déterminer l'écriture algébrique de l'inverse de 2i. L'inverse d'un entier de Gauß est-il nécéssairement un entier de Gauß ?

116 **Une fonction complexe**

On définit une fonction f de $\mathbb{C} - \{\mathrm{i}\}$ dans $\mathbb{C}$ par :

$$f(z) = \frac{z-1}{z-i}$$

1) Démontrer que 1 n'a aucun antécédent par f.
2) On pose $z = x + \mathrm{i}y$. Vérifier qu'on a alors :

$$f(z) = \frac{(x^2+y^2-x-y)+\mathrm{i}(x+y-1)}{x^2+(y-1)^2}.$$

3) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$ du plan tels que $f(z)$ est un nombre réel.
4) Même question pour avoir $f(z)$ imaginaire pur.
5) Déterminer les points M d'affixe z tel que $|f(z)| = 1$.

117 On se propose dans cet exercice de calculer des valeurs exactes de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

1) Démontrer que pour tout nombre complexe $z \neq 1$:

$$1+z+z^2+z^3+z^4 = \frac{1-z^5}{1-z}.$$

2) En utilisant la valeur $z_0 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}$ dans la formule précédente, démontrer que :

$$\left(z_0^2 + \frac{1}{z_0^2}\right) + \left(z_0 + \frac{1}{z_0}\right) + 1 = 0.$$

3) Démontrer que :

$$\left(z_0^2 + \frac{1}{z_0^2}\right) = \left(z_0 + \frac{1}{z_0}\right)^2 - 2.$$

et que : $\left(z_0 + \dfrac{1}{z_0}\right) = 2\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.

4) En déduire que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est solution d'une équation du second degré que l'on précisera, puis calculer la valeur exacte cherchée.

118 **Formules d'additions**

1) Démontrer que pour tous nombres réels p, q on a :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}p} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}q} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{p+q}{2}} \times \cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

2) En déduire la formule suivante :

$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

3) Par une similaire, déterminer une formule analogue pour :

$$\sin(p) + \sin(q).$$

Je teste mes connaissances

À la fin de ce chapitre, je dois être capable de :

- Calculer dans $\mathbb{C}$
- Résoudre une équation dans $\mathbb{C}$
- Connaître le conjugué, le module et l'argument d'un nombre complexe
- Connaître les formes algébriques, trigonométrique ou exponentielle d'un nombre complexe
- Savoir utiliser les nombres complexes en géométrie

QCM d'auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

Pour chaque question, plusieurs réponses sont proposées. Déterminer celles qui sont correctes.

119 Le nombre complexe $(1+\mathrm{i})^{72}$ est égal à :

(a) 2^{72} (b) $6,9\times 10^{10}$ (c) 2^{36} (d) 0

120 Le nombre complexe $\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}$ est égal à :

(a) $-\dfrac{1}{2}$ (b) $1-3\mathrm{i}$ (c) $3-\mathrm{i}$ (d) $-\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{5}\mathrm{i}$

Soit f la fonction dans $-\{\mathrm{i}\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z)=\dfrac{3z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}$.

121 L'image du nombre complexe $z=1+2\mathrm{i}$ est :

(a) $3+6\mathrm{i}$ (b) $5+2\mathrm{i}$ (c) 10 (d) $\dfrac{9}{2}+\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$

122 L'antécédent de i est :

(a) $\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{5}\mathrm{i}$ (b) i (c) $\dfrac{1}{5}-\dfrac{2}{5}\mathrm{i}$ (d) $\dfrac{1}{2}$

123 La solution de l'équation $2\mathrm{i}z+1=2-\mathrm{i}$ est :

(a) $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ (b) $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$ (c) $-\dfrac{1}{3}\mathrm{i}$ (d) $-1+\mathrm{i}$

124 L'équation $z^2-4z+5=0$ a pour solution dans $\mathbb{C}$:

(a) pas de solution (b) $\{-2-\mathrm{i}\ ;\ -2+\mathrm{i}\}$ (c) $\{2-\mathrm{i}\ ;\ 2+\mathrm{i}\}$ (d) $\{2-3\mathrm{i}\ ;\ 2+3\mathrm{i}\}$

125 L'équation $z+2\mathrm{i}\overline{z}=2-5\mathrm{i}$ a pour solution dans $\mathbb{C}$:

(a) 1 (b) $\dfrac{8}{3}-\dfrac{1}{3}\mathrm{i}$ (c) $2-\dfrac{5}{2}\mathrm{i}$ (d) $-4+3\mathrm{i}$

126 Le nombre complexe $z = -2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\mathrm{i}\right)$ a pour argument :

ⓐ $-\frac{\pi}{6}$ ⓑ $\frac{\pi}{6}$ ⓒ $\frac{5\pi}{6}$ ⓓ $-\frac{5\pi}{6}$

127 L'écriture exponentielle de $z = \frac{5\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)$ est :

ⓐ $\frac{15}{2}e^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}$ ⓑ $\frac{5\sqrt{3}}{2}e^{\frac{\pi}{6}\mathrm{i}}$ ⓒ $\frac{15}{2}e^{\frac{\pi}{6}\mathrm{i}}$ ⓓ $\frac{5\sqrt{3}}{2}e^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}$

128 $z = (1-\mathrm{i})e^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}$ a pour argument :

ⓐ $\frac{\pi}{2}$ ⓑ $\frac{\pi}{4}$ ⓒ $-\frac{3\pi}{4}$ ⓓ $\frac{\pi}{12}$

129 On considère les points $A(2+\mathrm{i})$ et $B(2-4\mathrm{i})$ dans un repère $(0\,;\,\vec{u},\,\vec{v})$, le triangle OAB est :

ⓐ équilatéral ⓑ isocèle ⓒ rectangle ⓓ quelconque

130 On considère les points $A(1-2\mathrm{i})$, $B(1+3\mathrm{i})$ et $C(2-i)$ l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme est :

ⓐ $2-6\mathrm{i}$ ⓑ $2+4\mathrm{i}$ ⓒ $4\mathrm{i}$ ⓓ 5

131 On considère un point M du plan complexe d'affixe z. Déterminer l'ensemble auquel appartient M quand z vérifie : $|z-1+\mathrm{i}| = |z+2\mathrm{i}|$. On considère A et B les points d'affixes $1-\mathrm{i}$ et $-2\mathrm{i}$.

ⓐ Le cercle de centre $\Omega(1-\mathrm{i})$ et de rayon 2
ⓑ Le milieu de $[AB]$
ⓒ La médiatrice de $[AB]$
ⓓ L'ensemble vide

132 On considère les points $A(1-2\mathrm{i})$ et $B(3+\mathrm{i})$ dans le plan complexe. Une équation de la droite (AB) est :

ⓐ $y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$ ⓑ $y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$ ⓒ $y = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$ ⓓ $y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$

133 On considère les points $A(-2-\mathrm{i})$, $B(1-2\mathrm{i})$, $C(2+\mathrm{i})$ et $D(-1+2\mathrm{i})$ dans un repère orthonormal.

ⓐ $ABCD$ est un losange
ⓑ $ABDC$ est un parallélogramme
ⓒ $ABCD$ est un carré
ⓓ $ABCD$ a pour aire 8

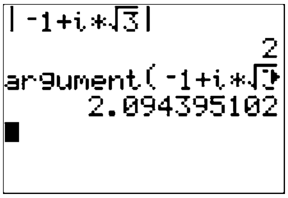
TP 1 Utilisation des calculatrices

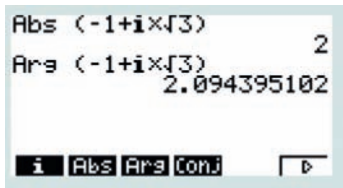
CALC

Le but de ce TP est de constater à l'aide des calculatrices certaines propriétés du module et de l'argument. On considère les deux nombres complexes suivants :

$$z_1 = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3} \qquad\qquad z_2 = 1 + \mathrm{i}$$

1) En utilisant les fonctionnalités de votre calculatrice (voir ci-dessous) déterminer le module et l'argument de z_1 et z_2.





2) Toujours à l'aide de votre calculatrice :

a) donner le module et un argument de $z_1 \times z_2$

b) donner la forme algébrique de $z_1 \times z_2$.

3) Vérifier qu'on a les formules suivantes :

$$|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2| \qquad\qquad \arg(z_1 \times z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)\ [2\pi]$$

4) Proposer des formules analogues pour le quotient $\dfrac{z_1}{z_2}$ et les vérifier à l'aide de votre calculatrice.

5) Déterminer la forme algébrique du quotient $\dfrac{z_1}{z_2}$ et déduire de ce qui précède la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$.

6) Proposer des formules donnant le module et l'argument de z_1^n en fonction de ceux de z_1. Vérifier cette formule à l'aide de votre calculatrice en prenant $n = 12$. Prouver rigoureusement cette formule.

TP 2 La fonction inverse dans les complexes

INFO

On note f la fonction définie de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}^*$ par $f(z) = \dfrac{1}{z}$.

A Conjecture avec un logiciel de géométrie dynamique

1) Créer un point M libre sur le cercle de centre l'origine et de rayon 1. On appelle z son affixe. Créer le point M' d'affixe $\dfrac{1}{z}$ (on pourra par exemple créer un nombre $L = x(M) + \mathrm{i}y(M)$ puis le point d'affixe $1/L$).

2) En utilisant la fonction « trace », conjecturer la position des points M' lorsque M parcourt le cercle de centre l'origine et de rayon 1.

3) Reprendre les deux questions précédentes en prenant le point M successivement :

a) mobile sur le cercle de centre O et de rayon 2.

b) mobile sur le cercle de centre $A(0\,;\,1)$ et de rayon 1.

c) mobile sur la droite d'équation $y = 1$.

B Preuves des conjectures

1) En utilisant les propriétés du module, prouver la conjecture des questions 2) et 3) a)

2) On veut prouver la conjecture de la question 3) b).

a) Justifier qu'un point M d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$ est sur le cercle de centre $A(0\,;\,1)$ et de rayon 1 si et seulement si : $x^2 = 1 - (y-1)^2$.

b) Déterminer l'écriture algébrique de $1/z$, l'affixe du point M en fonction de $z = x + \mathrm{i}y$.

c) En déduire l'ordonnée des points M' d'affixe $1/z$ lorsque $M(z)$ est sur ce cercle.

3) On veut maintenant étudier l'observation de la question 3) c).

a) Démontrer que le point $M'(1/z)$ est sur le cercle de centre $B\left(0\,;\,-\dfrac{1}{2}\right)$ et de rayon $\dfrac{1}{2}$ si et seulement si : $|z - 2\mathrm{i}| = |z|$.

b) En déduire la preuve de la conjecture du 3) c).

TP 3 Spirales et nombres complexes

INFO ALGO

Soit $r \neq 0$ un nombre complexe et la suite de nombre complexes définies par $z_0 = 4$ et $z_{n+1} = r \times z_n$. On notera également A_n le point du plan d'affixe z_n. On veut étudier certaines propriétés de la suite de points $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ selon les valeurs de r.

A Construction avec un logiciel de géométrie dynamique

1) À l'aide de la partie tableur, calculer les 10 premières valeurs de la suite et faire apparaître les points A_n correspondants (on prendra pour r une valeur arbitraire stockée dans une cellule).

2) Dans le cas où $r = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})$, quelle conjecture peut-on faire sur la suite de points $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

3) Dans le cas où $r = 1 + \mathrm{i}$, quelle conjecture peut-on faire sur la valeur de $\left(\widehat{\overrightarrow{OA_n},\, \overrightarrow{OA_{n+1}}}\right)$?

4) Dans le cas où $r = \dfrac{\sqrt{2}}{4}(1+\mathrm{i})$, quelle conjecture peut-on faire sur la suite de points $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

B Preuve des conjectures

1) Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes $1+\mathrm{i}$, $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})$ et $\dfrac{\sqrt{2}}{4}(1+\mathrm{i})$.

2) En déduire une preuve de la conjecture du 2).

3) Exprimer l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{OA_n},\, \overrightarrow{OA_{n+1}}}\right)$ en fonction de z_{n+1} et z_n. En déduire la preuve de la conjecture de la question 3).

4) Démontrer que la suite$(u_n)_n$ définie par $u_n = OA_n$ est une suite géométrique dont on déterminera la raison. En déduire la preuve de la conjecture du 4).

C Algorithme

On se place dans le cas où $r = \dfrac{\sqrt{2}}{4}(1+\mathrm{i})$

1) Écrire un algorithme permettant le calcul des termes successifs de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jusqu'à ce que $|z_n| < p$ où p est un nombre réel strictement positif choisi par l'utilisateur.

2) Programmer cet algorithme à l'aide de votre calculatrice et en déduire la valeur de n à partir de laquelle on a pour la première fois $|z_n| < 0{,}01$.

TP 4 Les ensembles de Julia

ALGO

Les ensembles de Julia ont été mis en évidence par le mathématicien qui leur a donné son nom : Gaston Julia (1893-1978). Ces ensembles sont construits à partir d'un problème concernant les suites de nombres complexes du type $z_{n+1} = z_n^2 + c$, où c un un nombre complexe fixé. Dans la suite on prendra $c = -1$.

Ces suites peuvent soit rester bornées, soit diverger selon la valeur de départ z_0. Les ensembles de Julia « remplis » étant constitués des z_0 pour lesquels la suite des modules des z_n reste bornée.

1) On note x_n et y_n les parties réelles et imaginaires de z_n. Exprimer x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n.

2) On définit une suite de nombres réels $(u_n)_n$ en posant $u_n = |z_n|$

a) À l'aide de l'inégalité triangulaire (voir exercice 110), démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$u_{n+1} \geq u_n^2 - 1.$$

b) Démontrer alors par récurrence que s'il existe un rang n_0 tel que $u_{n_0} \geq 2$ alors : $u_n \geqslant 2$ pour tout $n \geqslant n_0$.

En déduire alors que pour tout entier naturel $n \geq n_0$:

$$u_n \geq 2^{n-n_0} + 1.$$

c) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} |z_n|$ dans ce cas.

3) On va maintenant se servir du critère précédent pour déterminer des valeurs initiales z_0 dont on pense qu'elles sont dans l'ensemble de Julia.

- Demander une valeur de départ Z et un nombre maximal de termes à calculer N.
- À partir de cette valeur de départ, calculer les termes successifs de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en calculant leurs parties imaginaires et réelles.
- Arrêter le calcul dès que le module d'un des termes dépasse 2.
- Répondre positivement si, avec la valeur de départ donnée, on estime que la suite des $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

4) Traduire cet algorithme en un programme avec AlgoBox ou Python.

5) Exécuter cet algorithme pour différentes valeurs de z_0 (en prenant $N \geqslant 50$).

Récréation, énigmes

1) En utilisant les nombres complexes, démontrer que si deux entiers sont la somme de deux carrés de nombres entiers, leur produit est également la somme de deux carrés de nombres entiers.

2) Retrouver ce résultat sans utiliser les nombres complexes

GÉOMÉTRIE

2

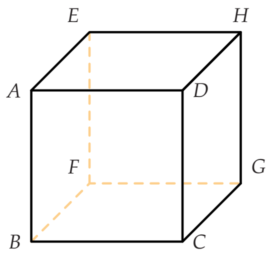
Espace : droites, plans et vecteurs

Connaissances nécessaires à ce chapitre

- Utiliser une représentation d'un objet de l'espace
- Calculer des aires et des volumes
- Utiliser la colinéarité de deux vecteurs
- Maîtriser le calcul vectoriel dans le plan avec ou sans repère
- Résoudre des systèmes.

Auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net



1 $ABCDEFGH$ est un cube de côté a.

1) Exprimer la distance EB en fonction de a.
2) Préciser la nature du triangle FBC.
3) Étudier la nature du triangle EBG.

2 $ABCDEFGH$ est un cube de côté a.

1) Calculer le volume de ce cube.
2) Calculer le volume du tétraèdre $ABDE$.
3) En déduire le volume du polyèdre $BCGFEHD$

3 Dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, soit $A(1;4), B(-2;-1), C(-1;0,7)$ et $E(1;1)$.

1) A, B et C sont-ils alignés ?
2) Soit $\mathscr{D}$ la droite parallèle à (AB) passant par E et $M(x;y)$ un point de $\mathscr{D}$. Montrer qu'il existe un unique réel t tel que $\overrightarrow{EM} = t\overrightarrow{AB}$.
3) Déterminer les coordonnées du point F tel que $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{BE} - 3\overrightarrow{AB}$.

4 Résoudre les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 4x - y = 3 \end{cases}$

2) $\begin{cases} y = 4x - 3 \\ -12x + 5y = 9 \end{cases}$

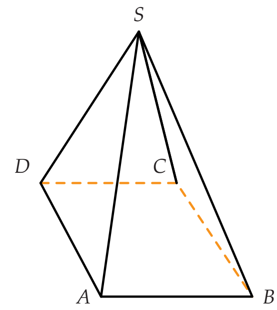
3) $\begin{cases} x - y = 3 \\ -12x + 3y = 7 \end{cases}$

Voir solutions p. 419

Activités d'approche

ACTIVITÉ 1 Voir ou revoir dans l'espace...

Soit $SABCD$ une pyramide dont la base $ABCD$ est un carré de centre O.
Soit I et J les milieux respectifs des segments $[SC]$ et $[SD]$ et K le point du segment $[SB]$ tel que $SK = \frac{1}{3}SB$.



1) Reproduire et compléter la figure en perspective cavalière.

2) Dans chacun des cas suivants, que peut-on dire des positions relatives des droites citées ?

a) (OB) et (CD)
b) (IJ) et (AB)
c) (OK) et (SD)
d) (OK) et (AS)

3) Dans chacun des cas suivants, que peut-on dire des positions relatives des plans cités ?

a) (OCK) et (SAD) b) (OIJ) et (SAB) c) (IJK) et (BAC)

4) Dans chacun des cas suivants, que peut-on dire des positions relatives de la droite et du plan cités ?

a) (SK) et (OCD) b) (IJ) et (ABC) c) (OC) et (ABD)

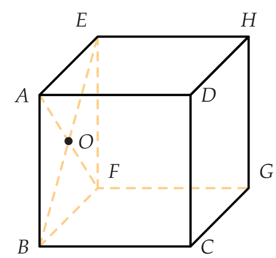
5) Résumer les positions relatives possibles dans un tableau pour chacun des cas suivants :

a) Pour deux droites de l'espace.
b) Pour deux plans de l'espace.
c) Pour un plan et une droite de l'espace.

ACTIVITÉ 2 Vecteurs de l'espace

On étend à l'espace la notion de vecteur étudiée dans le plan. Un vecteur non nul est donc défini par sa direction, son sens et sa norme et les propriétés des vecteurs du plan sont aussi étendues aux vecteurs de l'espace (relation de Chasles, colinéarité, propriétés algébriques).

On considère la figure ci-contre où $ABCDEFGH$ est un cube et O est le centre du carré $ABFE$.



1) Citer trois vecteurs égaux.

2) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AO}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$.

3) Reproduire la figure et placer le point M défini par $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC} + 2\overrightarrow{DH}$.
Citer un plan contenant le point M.

4) Placer le point N défini par $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BG} - \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.
Citer un plan contenant le point N.

5) Conjecturer une caractérisation vectorielle de l'appartenance d'un point à un plan défini par trois points non alignés.

ACTIVITÉ 3 Définir une droite ou un plan par un système d'équations

Partie A : Droite de l'espace

Dans un repère $(O\,;\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ de l'espace, on considère une droite $\mathscr{D}$ de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-4\\2\end{pmatrix}$ et passant par le point $A(-6\,;1\,;5)$.

Soit $M(x\,;y\,;z)$ un point de l'espace.

1) a) Écrire une relation vectorielle traduisant l'appartenance du point M à la droite $\mathscr{D}$.

b) Écrire un système que doivent vérifier les coordonnées $(x\,;y\,;z)$ du point M pour que M appartienne à la droite $\mathscr{D}$.

2) Reprendre la première question avec $\mathscr{D}$ de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ où α, β et γ sont des réels non tous nuls et passant par le point $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$.

Partie B : Plan de l'espace

Dans un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, on considère un plan $\mathscr{P}$ dirigé par les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-4\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}7\\-3\\8\end{pmatrix}$ et passant par le point $A(-6\,;1\,;5)$.

Soit $M(x\,;y\,;z)$ un point de l'espace.

1) a) Écrire une relation vectorielle traduisant l'appartenance du point M au plan $\mathscr{P}$.

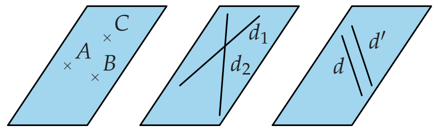
b) Écrire un système que doivent vérifier les coordonnées $(x\,;y\,;z)$ du point M pour que M appartienne au plan $\mathscr{P}$.

2) Reprendre la première question avec $\mathscr{P}$ dirigé par $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ et $\vec{u'}\begin{pmatrix}\alpha'\\\beta'\\\gamma'\end{pmatrix}$ deux vecteurs non nuls et non colinéaires et passant par le point $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$.

1. Positions relatives de droites et plans

RAPPEL :

1) Un plan est défini par :
   - trois points non alignés ou
   - deux droites sécantes ou
   - deux droites strictement parallèles.

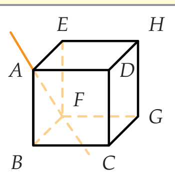
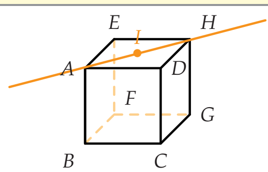
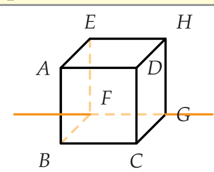
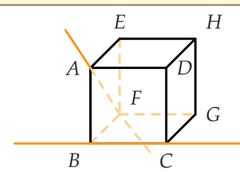


2) Si un plan $\mathscr{P}$ contient deux points distincts A et B de l'espace, alors il contient la droite (AB). On note $(AB) \subset \mathscr{P}$.
3) Tous les résultats de géométrie plane (théorèmes de Thalès, de Pythagore...) s'appliquent dans chaque plan de l'espace.

Dans la suite du paragraphe, $ABCDEFGH$ est un cube.

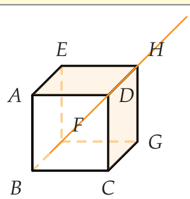
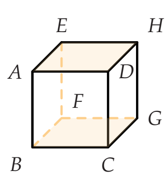
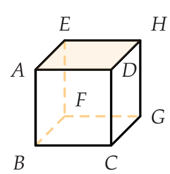
PROPRIÉTÉS : Positions relatives de deux droites

Deux **droites** de l'espace sont soit **coplanaires** (c'est-à-dire qu'il existe un plan les contenant toutes les deux), soit non coplanaires (c'est-à-dire qu'il n'existe aucun plan les contenant toutes les deux).
Si elles sont coplanaires, alors elles sont soit sécantes, soit parallèles (strictement parallèles ou confondues).

Droites coplanaires (dans un même plan)			Droites non coplanaires
Droites sécantes	Droites strictement parallèles		Droites confondues
 (AD) et (AF) sont sécantes en A	 I centre de ADHE (AH) et (AI) sont confondues	 (AD) et (FG) sont strictement parallèles	 (BC) et (AF) sont non coplanaires

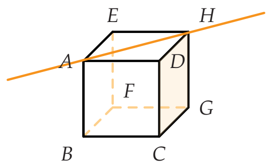
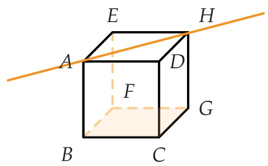
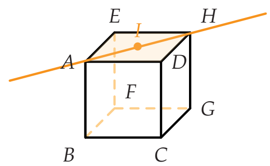
PROPRIÉTÉS : Positions relatives de deux plans

Deux plans de l'espace sont soit sécants (leur intersection est une droite), soit parallèles.

Plans sécants	Plans parallèles	
 Les plans (CGH) et (ADH) sont sécants selon la droite (DH)	 Les plans (BCG) et (ADH) sont strictement parallèles	 Les plans (EAD) et (ADH) sont confondus

PROPRIÉTÉS : Positions relatives d'une droite et d'un plan

Une droite et un plan de l'espace sont soit sécants, soit parallèles.

Droite et plan sécants	Droite et plan parallèles	
 La droite (AH) est sécante en H au plan (DCG)	 La droite (AH) est strictement parallèle au plan (BCG)	 (AH) est contenue dans le plan (ADH)

2. Parallélisme dans l'espace

PROPRIÉTÉ

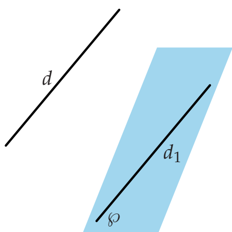
- Si deux droites sont parallèles à une même droite alors elles sont parallèles entre elles.
- Si deux plans sont parallèles à un même plan alors ils sont parallèles entre eux.

PROPRIÉTÉ

Une droite est parallèle à un plan si et seulement si elle est parallèle à une droite de ce plan.

Exemple

d est parallèle à d_1 et d_1 est contenue dans le plan $\wp$ donc d est parallèle à $\wp$.

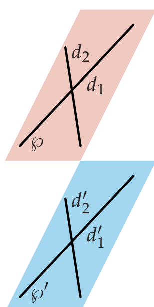


PROPRIÉTÉ

Si un plan $\wp$ contient deux droites sécantes respectivement parallèles à deux droites sécantes d' un plan $\wp'$ alors les plans $\wp$ et $\wp'$ sont parallèles.

Exemple

d_1 et d_2 sont deux droites du plan $\wp$; d_1 et d_2 sont sécantes et respectivement parallèles à deux droites du plan $\wp'$ donc les plans $\wp$ et $\wp'$ sont parallèles.

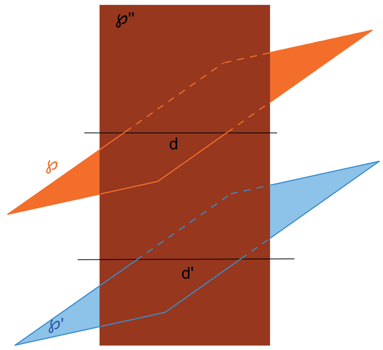


PROPRIÉTÉ

Si deux plans sont parallèles, alors tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles entre elles.

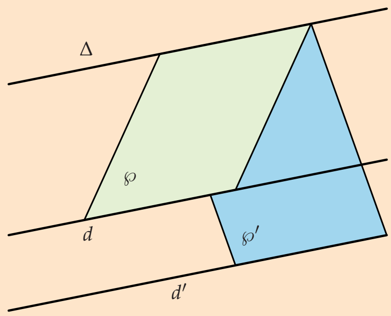
Exemple

Les plans $\wp$ et $\wp'$ sont parallèles et $\wp$ et $\wp''$ sont sécants avec $\wp \cap \wp'' = d$, donc $\wp'$ et $\wp''$ sont sécants et $\wp' \cap \wp'' = d'$ où d' est une droite parallèle à d.



PROPRIÉTÉ : Théorème du toit

Soit $\wp$ et $\wp'$ deux plans distincts, sécants selon une droite Δ.
Si une droite d de $\wp$ est strictement parallèle à une droite d' de $\wp'$ alors la droite Δ intersection de $\wp$ et $\wp'$ est parallèle à d et à d'.



PREUVE Par hypothèse, $\wp \cap \wp' = \Delta$ et $d // d'$. Les droites d et d' sont parallèles donc elles sont coplanaires. Donc, il existe un plan Q qui contient à la fois d et d'. Mais alors d et Δ sont contenues dans $\wp$ et d' et Δ sont contenues dans $\wp'$. Donc : $\wp \cap Q = d$ et $\wp' \cap Q = d'$.
Montrons que $d // \Delta$. Supposons que d et Δ ne soient pas parallèles. Donc elles sont sécantes en un point A.
$A \in d$ et $A \in \Delta$.

- $A \in d$ et $d = \wp \cap Q$ donc $A \in Q$.
- $A \in \Delta$ et $\Delta = \wp \cap \wp'$ donc $A \in \wp'$. D'où $A \in Q \cap \wp' = d'$.

Par conséquent, $A \in d'$ et $A \in d$ et par conséquent, d et d' sont sécantes en A. Ce qui est absurde, contraire à notre hypothèse.
Les droites d et Δ sont donc parallèles. De plus, comme d et d' sont parallèles, on en déduit que les droites d' et Δ sont aussi parallèles.
Conclusion : L'intersection de $\wp$ et $\wp'$ est une droite Δ parallèle à la fois à d et à d'.

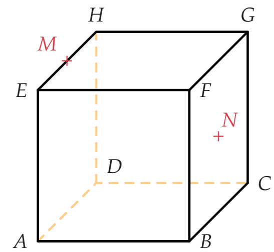
Remarque : Une autre démonstration de ce théorème est proposée dans l'exercice 76.

MÉTHODE 1 **Construire la section d'un solide par un plan** ► Ex. 23 p. 285

Il s'agit de construire l'intersection de ce plan avec chacune des faces du solide.

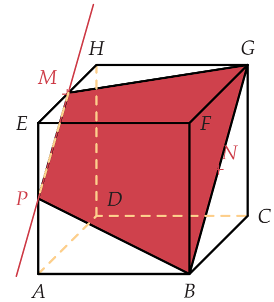
Exercice d'application

On considère le cube $ABCDEFGH$ ci-contre. On note M le milieu du segment $[EH]$ et N celui de $[FC]$.
Tracer la section de ce cube par le plan (MNG).



Correction

L'intersection du plan (MNG) avec la face $HEFG$ est le segment $[MG]$. Il est visible, on le trace donc en trait plein.
G, N et B sont alignés, donc l'intersection du plan (MNG) avec la face $FGCB$ est le segment $[GB]$. Il est visible, on le trace donc en trait plein.
Les faces $EHDA$ et $FGCB$ étant parallèles, l'intersection du plan (MNG) avec la face $EHDA$ est le segment passant par M et parallèle à (GN). Il n'est pas visible, on le trace donc en pointillés.
Notons P le point d'intersection de (MNG) et (EA). L'intersection du plan (MNG) avec la face $ABFE$ est le segment $[PB]$. Il est visible, on le trace donc en trait plein.
La section du cube par le plan (MNG) est le polygone $MGBP$ colorié en rouge. Comme $(MP)//(GB)$, il s'agit d'un trapèze.



3. Orthogonalité dans l'espace

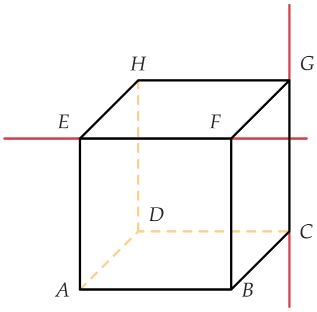
DÉFINITION : Orthogonalité de deux droites

Deux droites sont orthogonales si leurs parallèles passant par un même point sont perpendiculaires dans le plan qu'elles définissent.

REMARQUE : Deux droites perpendiculaires sont orthogonales mais la réciproque est fausse.

Exemple

Dans le cube $ABCDEFGH$ ci-contre, $(EF)//(HG)$ et $(HG) \perp (GC)$ donc (EF) et (GC) sont orthogonales. On note $(EF) \perp (GC)$.



■ DÉFINITION : **Orthogonalité d'une droite et d'un plan**

Une droite est orthogonale à un plan lorsqu'elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

■ THÉORÈME

Si une droite est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan alors elle est orthogonale à ce plan.

MÉTHODE 2 **Démontrer l'orthogonalité de deux droites**

► Ex. 34 p. 286

Exercice d'application

Dans le cube $ABCDEFGH$ représenté dans l'exemple précédent, démontrer que $(GC) \perp (BD)$.

Correction

La droite (GC) est perpendiculaire à (BC) et à (CD) qui sont deux droites sécantes du plan (ABC) donc (GC) est orthogonale au plan (ABC) donc à toutes les droites de ce plan. En particulier, on en déduit que $(GC) \perp (BD)$.

4. Vecteurs de l'espace

On étend à l'espace la définition et les propriétés des vecteurs étudiées dans le plan.

■ PROPRIÉTÉS : **Vecteurs colinéaires**

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$. Par convention, le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur de l'espace.

■ PROPRIÉTÉ : **Caractéristique**

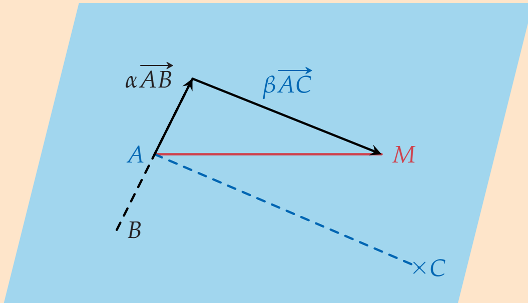
A et B étant deux points distincts de l'espace, la droite (AB) est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ soient colinéaires.
On dit que $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).

■ DÉFINITION : **Vecteurs coplanaires**

Trois vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement leurs représentants de même origine A ont des extrémités B, C et D telles que A, B, C et D appartiennent à un même plan.

PROPRIÉTÉ : Caractéristique

A, B et C étant trois points non alignés de l'espace, le plan (ABC) est l'ensemble des points M de l'espace tels que :
$\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$, avec α et β deux nombres réels.
On dit que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dirigent le plan (ABC).

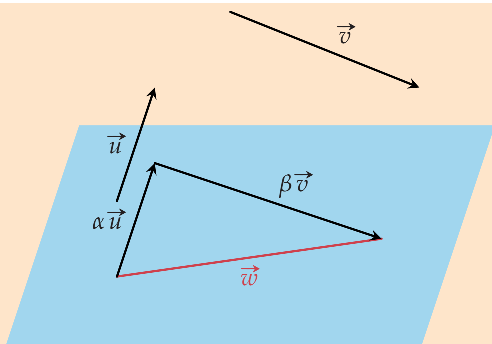


PREUVE A, B et C ne sont pas alignés. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ n'étant pas colinéaires, $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ est donc un repère du plan (ABC).

- Si M appartient à (ABC), alors M, A, B et C étant coplanaires, il existe α et β deux nombres réels tels que $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$.
- Réciproquement, si M est un point de l'espace tel que $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$, avec α et β deux nombres réels, alors il existe un point N de la droite (AB) tel que $\overrightarrow{AN} = \alpha\overrightarrow{AB}$.
  $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{NM} = \beta\overrightarrow{AC}$. M est donc un point de la droite parallèle à (AC) passant par N. Donc, comme $N \in (ABC)$, $M \in (ABC)$.

PROPRIÉTÉ

Soit trois vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels α et β tels que
$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.



PREUVE Soit A, B, C et M les points de l'espace tels que $\vec{w} = \overrightarrow{AM}$, $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$.
$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si A, B, C et M sont coplanaires, c'est-à-dire si et seulement si il existe deux réels α et β tels que $\vec{AM} = \alpha\vec{AB} + \beta\vec{AC} \Leftrightarrow \vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.

MÉTHODE 3 Démontrer que quatre points sont coplanaires

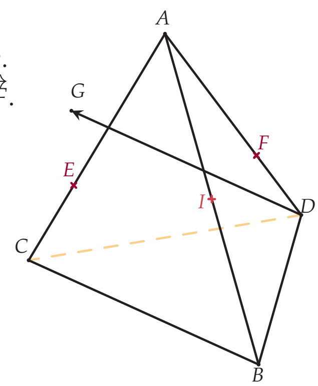
► Ex. 41 p. 287

Il s'agit de démontrer que trois vecteurs sont coplanaires en écrivant l'un en fonction des deux autres.

Exercice d'application

Soit $ABCD$ un tétraèdre, I le milieu de $[AB]$; E et F les points définis par $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ et G le point tel que $BCGD$ soit un parallélogramme.

1) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{IE}$, $\overrightarrow{IF}$ et $\overrightarrow{IG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.
2) En déduire qu'il existe deux réels α et β tels que $\overrightarrow{IG} = \alpha\overrightarrow{IE} + \beta\overrightarrow{IF}$.
3) En déduire que les points I, E, G et F sont coplanaires.



Correction

1) $\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.$

$\overrightarrow{IF} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}.$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IG} &= \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG}\\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\\ &= -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

2) Il existe deux réels α et β tels que $\overrightarrow{IG} = \alpha\overrightarrow{IE} + \beta\overrightarrow{IF}$

soit $-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} = -\frac{\alpha}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2\alpha}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{\beta}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2\beta}{3}\overrightarrow{AD}$

Pour obtenir cette égalité, il suffit de prendre α et β tels que :

$-\frac{3}{2} = -\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$ et $\frac{2}{3}\alpha = 1$ et $\frac{2}{3}\beta = 1$, soit, $\alpha = \frac{3}{2}$ et $\beta = \frac{3}{2}$.

D'où $\overrightarrow{IG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{IE} + \frac{3}{2}\overrightarrow{IF}$

3) On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{IE}$, $\overrightarrow{IF}$ et $\overrightarrow{IG}$ sont coplanaires, donc les points I, E, G et F sont coplanaires.

5. Repérage dans l'espace

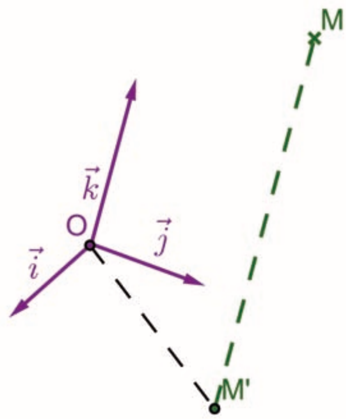
THÉORÈME

Si O est un point de l'espace et $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires, alors pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet de réels $(x\,;y\,;z)$ tels que :

$$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}.$$

PREUVE

- Existence



Soit $\wp$ le plan passant par O et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ (qui ne sont pas colinéaires car $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ sont non coplanaires).
Soit M' le point d'intersection de $\wp$ et de la droite parallèle à $(O\overrightarrow{k})$ passant par M. $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont coplanaires avec $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ non colinéaires, donc il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{OM'} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$. D'autre part, $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{k}$ sont colinéaires, donc il existe un réel z tel que $\overrightarrow{MM'} = z\overrightarrow{k}$. D'où $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MM'} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$

- Unicité
Supposons qu'il existe deux triplets de réels $(x\,;y\,;z)$ et $(x';y';z')$ tels que $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k} = x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j} + z'\overrightarrow{k}$.
On a alors $(z'-z)\overrightarrow{k} = (x-x')\overrightarrow{i} + (y-y')\overrightarrow{j}$.
Comme $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ ne sont pas coplanaires, il n'existe pas de couple de réels $(\alpha;\beta)$ tels que $\overrightarrow{k} = \alpha\overrightarrow{i} + \beta\overrightarrow{j}$, on en déduit que $z - z' = 0$, et par suite, que $x = x'$, $y = y'$ et $z = z'$.

DÉFINITION

$(x\,;y\,;z)$ est le triplet de **coordonnées** du point M dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
x est l'abscisse de M, y est l'ordonnée de M et z est la cote de M.
$(x;y;z)$ sont aussi les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

PROPRIÉTÉS

Dans un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, soit $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$. Alors :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

et le milieu K de $[AB]$ a pour coordonnées : $K\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2};\dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$.

Si de plus $(O\,;\,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est orthonormé, $AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$.

PROPRIÉTÉS

Dans un repère$(O\,;\,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs et k un nombre réel.

Alors :

$$\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix} \text{ et } k\vec{u}\begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix}.$$

Si de plus $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est orthonormé, $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

MÉTHODE 4 La coplanarité de points en utilisant leurs coordonnées

► Ex. 45 p. 287

Il s'agit de démontrer que trois vecteurs sont coplanaires en écrivant l'un des vecteurs en fonction des deux autres.

Exercice d'application

Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, Démontrer que les points $A(1;2;0)$, $B(-1;1;1)$, $C(1;4;1)$ et $D(3;-1;-3)$ sont coplanaires.

Correction

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}2\\-3\\-3\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles.

$$\overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\begin{cases}2=-2\alpha\\-3=-\alpha+2\beta\\-3=\alpha+\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-1\\\beta=-2\end{cases}.$$

Le système ayant un unique couple solution, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires, donc les points A, B, C et D sont coplanaires.

6. Représentation paramétrique de droites et de plans

PROPRIÉTÉ

Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, on considère la droite $\mathscr{D}$ passant par $A(x_A;y_A;z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$.

$M(x;y;z)\in\mathscr{D}$ si et seulement si il existe un réel t tel que :

$$\begin{cases}x=x_A+t\alpha\\y=y_A+t\beta\\z=z_A+t\gamma\end{cases}$$

PREUVE $M(x;y;z)\in\mathscr{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, c'est-à-dire qu'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM}=t\,\vec{u}$. Cela se traduit en terme de coordonnées par :

$$\begin{cases}x-x_A=t\alpha\\y-y_A=t\beta\\z-z_A=t\gamma\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=x_A+t\alpha\\y=y_A+t\beta\\z=z_A+t\gamma\end{cases}$$

DÉFINITION

On dit que le système d'équations :

$\begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \\ z = z_A + t\gamma \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$ est une **représentation paramétrique** de la droite $\mathscr{D}$ passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$.

REMARQUE : Un exemple de cette définition est proposé dans l'exercice 50.

PROPRIÉTÉ

Dans un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, le plan $\mathscr{P}$ passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\alpha'\\ \beta'\\ \gamma'\end{pmatrix}$.

$M(x\,;y\,;z) \in \mathscr{P}$ si et seulement si il existe deux réels t et t' tels que :

$$\begin{cases} x = x_A + t\alpha + t'\alpha' \\ y = y_A + t\beta + t'\beta' \\ z = z_A + t\gamma + t'\gamma' \end{cases}$$

PREUVE $M(x\,;\,y\,;\,z) \in \mathscr{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires, c'est-à-dire qu'il existe deux réels t et t' tels que $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{u} + t'\,\overrightarrow{v}$. Cela se traduit en terme de coordonnées par :

$$\begin{cases} x - x_A = t\alpha + t'\alpha' \\ y - y_A = t\beta + t'\beta' \\ z - z_A = t\gamma + t'\gamma' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + t\alpha + t'\alpha' \\ y = y_A + t\beta + t'\beta' \\ z = z_A + t\gamma + t'\gamma' \end{cases}.$$

DÉFINITION

On dit que le système d'équations :

$\begin{cases} x = x_A + t\alpha + t'\alpha' \\ y = y_A + t\beta + t'\beta' \\ z = z_A + t\gamma + t'\gamma' \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$ et $t' \in \mathbb{R}$ est une représentation paramétrique du plan $\mathscr{P}$ passant par $A(x_A\,; y_A\,; z_A)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\alpha'\\ \beta'\\ \gamma'\end{pmatrix}$.

REMARQUE : Un exemple de cette définition est proposé dans l'exercice 55.

REMARQUE : Il existe une infinité de représentations paramétriques, que ce soit pour une droite ou pour un plan.

MÉTHODE 5 Étudier des positions relatives

► Ex. 58 p. 288

Exercice d'application

Étudier les positions relatives des droites d et d' puis du plan $\wp$ et de la droite d'. On donnera leur intersection éventuelle.

Le plan $\wp$ a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 - 2t + 3t' \\ y = -2 + t - t' \\ z = 3 - t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R} \text{ et } t' \in \mathbb{R}$$

Les droites d et d' ont pour représentation paramétrique :

$$d : \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 5 - 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R} \text{ et}$$

$$d' : \begin{cases} x = 4 - t \\ y = -2 + t \\ z = 1 + 3t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

Correction

Attention : la même lettre t désigne deux paramètres différents. Il faut donc changer de lettre dans les résolutions de système pour les différencier.

$\wp$ est dirigé par les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

d et d' ont pour vecteur directeur respectif $\vec{w}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w'}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

On remarque que $\vec{w} = -2\vec{u}$ donc d est parallèle à $\wp$. Le point $A(2;5;1)$ appartient à d. S'il appartient à $\wp$ alors $d \subset \wp$, sinon d est strictement parallèle à $\wp$.

Or, $\begin{cases} 2 = 1 - 2t + 3t' \\ 5 = -2 + t - t' \\ 1 = 3 - t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2t + 3t' = 1 \\ t - t' = 7 \\ t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = \dfrac{5}{3} \\ t' = -5 \\ t = 2 \end{cases}$

Le système n'ayant pas de solution, $A \notin \wp$ donc d est strictement parallèle à $\wp$.

Déterminons maintenant $\wp \cap d'$: $M \in \wp \cap d' \Leftrightarrow$ il existe trois réels t, t' et k tels que :

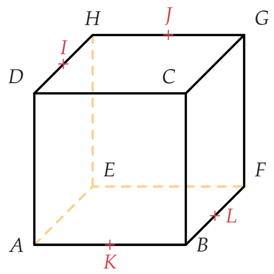
$$\begin{cases} x = 1 - 2t + 3t' \\ y = -2 + t - t' \\ z = 3 - t \\ x = 4 - k \\ y = -2 + k \\ z = 1 + 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - k = 1 - 2t + 3t' \\ -2 + k = -2 + t - t' \\ 1 + 3k = 3 - t \\ x = 4 - k \\ y = -2 + k \\ z = 1 + 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -k + 2t - 3t' = -3 \\ k - t + t' = 0 \\ 3k + t = 2 \\ x = 4 - k \\ y = -2 + k \\ z = 1 + 3k \end{cases}$$

En finissant la résolution du système, on obtient $t' = \dfrac{14}{5}$; $t = \dfrac{52}{20}$ et $k = \dfrac{-1}{5} = -0{,}2$, ce qui nous donne $x = 4{,}2$; $y = -2{,}2$ et $z = 0{,}4$.

Ainsi, $\wp$ et d' sont sécantes au point $K(4{,}2; -2{,}2; 0{,}4)$

Activités mentales

Pour les exercices **1** à **3**, $ABCDEFGH$ est un pavé droit ; I, J, K et L sont les milieux respectifs de $[DH]$, $[HG]$, $[AB]$ et $[BF]$.



1 Donner la position relative des deux droites citées :

1) (DB) et (EF) ;
2) (IJ) et (AF) ;
3) (IC) et (AB) ;
4) (JF) et (EH).

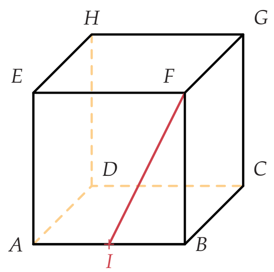
2 Donner la position relative des deux plans cités :

1) (DCG) et (AEF) ;
2) (IJA) et (HDC) ;
3) (IJE) et (CKL).

3 Donner la position relative de la droite et du plan cités :

1) (IJ) et (ABF) ;
2) (IJ) et (BCG) ;
3) (KE) et (ABF).

4 $ABCDEFGH$ est un cube et I est le milieu de $[AB]$.



Quelle est la nature de la section du cube par :

1) le plan (IFG) ?
2) le plan (IFC) ?

5 $ABCDEFGH$ est un cube et I est le milieu de $[AB]$ (voir figure de l'exercice **4**).

Les droites suivantes sont-elles orthogonales ?

1) (IF) et (FG) ?
2) (IF) et (FH) ?
3) (BF) et (EH) ?
4) (BF) et (AC) ?

6 $ABCDEFGH$ est un cube et I est le milieu de $[AB]$ (voir figure de l'exercice **4**).

Compléter les égalités vectorielles suivantes :

1) $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{F...}$
2) $\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{B...}$
3) $\overrightarrow{FD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DG} = ...$

7 $ABCDEFGH$ est un cube et I est le milieu de $[AB]$ (voir figure de l'exercice 4).

1) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{FI}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$.
2) O étant le centre du cube, exprimer le vecteur $\overrightarrow{AO}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.

8 Dans un repère $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère les points $A(-3\,;2\,;4)$; $B(-1\,;1\,;0)$ et $C(2\,;-3\,;5)$.

1) Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.
2) Donner les coordonnées des vecteurs :
$\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{BC}$.

9 Dans un repère$(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère les points $A(2\,;5\,;-1)$; $B(0\,;3\,;4)$ et le vecteur $\vec{u}(2\,;-1\,;4)$.

1) Déterminer les coordonnées du point C défini par $\overrightarrow{AC} = \vec{u}$
2) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ puis celles du point D tel que $ABDC$ soit un parallélogramme.
3) Déterminer les coordonnées du centre K de ce parallélogramme.

10 Dans un repère$(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère les points $A(2\,;5\,;-1)$; $B(2\,;-3\,;4)$ et le vecteur $\vec{u}(2\,;-1\,;4)$.

1) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.
2) Le point B appartient-il à Δ ?

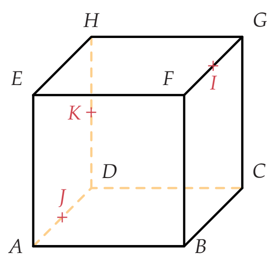
11 Dans un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, on considère la droite Δ de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 2 \\ z = -t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Donner un vecteur directeur de Δ et un point de Δ.

Étude de positions relatives

Pour les exercices **12** à **17**, $ABCDEFGH$ est un cube et I, J et K sont les milieux respectifs de $[FG]$, $[AD]$ et $[DH]$.



12 Déterminer en justifiant les positions relatives des droites ci-dessous.
On donnera leur intersection éventuelle.

1) (IB) et (GC).
2) (HB) et (GA).
3) (GC) et (BA).

13 Déterminer en justifiant les positions relatives des droites ci-dessous.
On donnera leur intersection éventuelle.

1) (JK) et (AH).
2) (FD) et (GH).
3) (IB) et (HJ).

14 Déterminer en justifiant les positions relatives des droites et plans ci-dessous. On donnera leur intersection éventuelle.

1) (EJ) et (HDA).
2) (JK) et (ABE).
3) (IJ) et (AFG).

15 Déterminer en justifiant les positions relatives des droites et plans ci-dessous. On donnera leur intersection éventuelle.

1) (FH) et (ACE).
2) (EJ) et (BCG).
3) (IJ) et (ABE).

16 Déterminer en justifiant les positions relatives des plans ci-dessous.

On donnera leur intersection éventuelle.

1) (ABJ) et (GIC).
2) (KGI) et (EAD).
3) (KGI) et (ABE).

17 Déterminer en justifiant les positions relatives des plans ci-dessous.

On donnera leur intersection éventuelle.

1) (EBG) et (HDC).
2) (EBI) et (HDC).
3) (IJK) et (HDC).

18 $ABCD$ est un tétraèdre, I, J et K sont les milieux respectifs de $[BC]$, $[CD]$ et $[AC]$.

Déterminer en justifiant les positions relatives des éléments ci-dessous.

On donnera leur intersection éventuelle.

1) (IK) et (AD).
2) (IK) et (AB).
3) (IJ) et (AID).
4) (ABJ) et (ACD).
5) (DIK) et (ABD).
6) (IJ) et (KBD).

19 $ABCDE$ est une pyramide de sommet A à base rectangulaire et I est un point du segment $[AE]$.

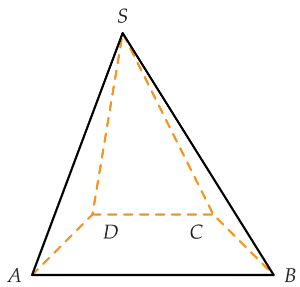
1) Justifier que la droite (BC) est parallèle au plan (EAD).
2) En déduire l'intersection des plans (IBC) et (EAD).

20 A, B, C et D sont quatre points non coplanaires et Δ est la droite parallèle à (BC) passant par D. I est le milieu de $[AC]$.

Quelle est l'intersection de Δ avec :

1) Le plan (IBD) ?
2) Le plan (ABC) ?

21 $ABCDS$ est une pyramide dont la base $ABCD$ est un trapèze.



Reproduire la figure et construire les intersections des plans :

1) (SAB) et (SDC) ;
2) (SAD) et (SBC).

22 $ABCDEFGH$ est un pavé droit, I le point du segment $[AE]$ tel que $AI = \frac{3}{4}AE$ et J le point du segment $[CG]$ tel que $CJ = \frac{1}{4}CG$.

Les droites suivantes sont-elles coplanaires ?

1) (AB) et (IF) ;
2) (DJ) et (IF) ;
3) (BC) et (AE) ;
4) (EH) et (IJ) .

Sections

23 ▶ MÉTHODE 1 p. 275

1) Reproduire la figure de l'exercice précédent.
2) Tracer l'intersection du plan (BIJ) avec la face $EABF$.
3) Tracer l'intersection du plan (BIJ) avec la face $DCGH$.
4) Terminer la construction de la section du pavé $ABCDEFGH$ par le plan (BIJ).

24

1) Reproduire la figure de l'exercice précédent.
2) Tracer l'intersection du plan (DIJ) avec la face $EADH$.
3) Tracer l'intersection du plan (DIJ) avec la face $DCGH$.
4) Tracer l'intersection du plan (DIJ) avec la face $BCGF$.
5) Terminer la construction de la section du pavé $ABCDEFGH$ par le plan (DIJ).

25 $ABCDEFGH$ est un cube et I et J les points tels que $I \in [HD]$ et $HI = \frac{2}{3}HD$; $J \in [FG]$ et $FJ = \frac{3}{4}FG$.

Construire la section du cube par le plan (EIJ).

26 $ABCDEFGH$ est un cube et I ; J et K les points tels que $I \in [EF]$ et $EI = \frac{1}{3}EF$; $J \in [BC]$ et $BJ = \frac{1}{2}BC$; $K \in [HG]$ et $HK = \frac{3}{4}HG$.

Construire la section du cube par le plan (IJK).

27 $ABCDEFGH$ est un cube et I ; J et K les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[CD]$ et $[EH]$.

Construire la section du cube par le plan (IJK).

28 $ABCDEFGH$ est un cube et I ; J et K les points tels que $I \in [AE]$ et $AI = \frac{1}{4}AE$; $J \in [DH]$ et $DJ = \frac{3}{4}DH$; $K \in [FG]$ et $FK = \frac{1}{3}FG$.

Construire la section du cube par le plan (IJK).

29 $ABCDEFGH$ est un cube ; I est le milieu de $[EH]$; J est le milieu de $[BC]$ et K le point du segment $[GH]$ tel que : $HK = \frac{2}{3}HG$.

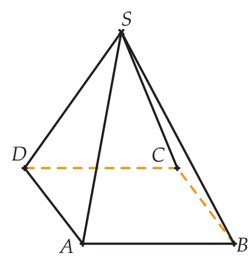
Déterminer et construire la section du cube par le plan (IJK).

30 $ABCDEFGH$ est un cube et I ; J et K les points tels que : $I \in [AD]$ et $AI = \frac{1}{3}AD$; $J \in [FG]$ et $FJ = \frac{2}{3}FG$; $K \in [AB]$ et $AK = \frac{1}{3}AB$.

Déterminer et construire la section du cube par le plan (IJK).

31 On considère une pyramide à base carrée $SABCD$ comme ci-dessous.

1) Reproduire la figure et placer les points I et J milieux respectifs des segments $[SD]$ et $[AB]$
2) Construire en justifiant la section de la pyramide par le plan (CIJ).

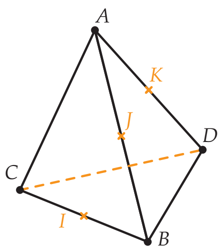


32 On considère un tétraèdre régulier $ABCD$ comme ci-dessous avec I, J et K les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AB]$ et $[AD]$.

1) Reproduire la figure.

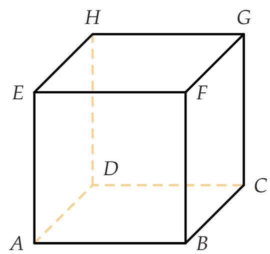
2) Construire en justifiant la section du tétraèdre par le plan (IJK).

3) Quelle est la nature de cette section ? Justifier.



Orthogonalité

Pour les exercices **34** à **36**, $ABCDEFGH$ est un cube.



33

1) Citer six droites orthogonales à la droite (EA) ;

2) Citer six droites orthogonales à la droite (EB) ;

3) Citer deux droites orthogonales au plan (BCG) ;

4) Citer deux droites orthogonales au plan (AFG).

34 ► MÉTHODE 2 p. 276

1) Démontrer que la droite (AB) est orthogonale au plan (BCG).

2) En déduire que les droites (AB) et (CF) sont orthogonales.

35 Les droites suivantes sont-elles orthogonales ? Le démontrer.

1) (EG) et (GC) ;

2) (EB) et (EG) ;

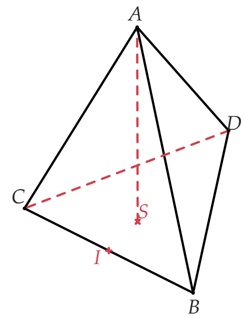
3) (AF) et (BC) ;

4) (AC) et (HF) ;

5) (BD) et (EC) ;

6) (CE) et (AG).

36 $ABCD$ est un tétraèdre régulier, S est le pied de la hauteur issue de A relativement à la base BCD et I est le milieu de $[BC]$.



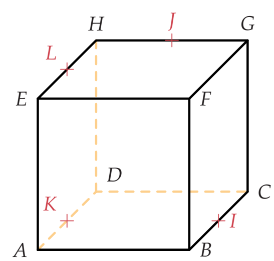
1) Démontrer que les droites (AS) et (BC) sont orthogonales.

2) En déduire que la droite (BC) est orthogonale au plan (AIS).

3) En déduire que les points A, I, S et D sont coplanaires et que les points I, S et D sont alignés.

Vecteurs

Pour les exercices **37** à **43**, $ABCDEFGH$ est un cube et I ; J ; K et L les milieux respectifs de $[BC]$, $[GH]$, $[AD]$ et $[EH]$.



37 Compléter les égalités vectorielles suivantes :

1) $\overrightarrow{A\ldots} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

2) $\overrightarrow{KJ} = \overrightarrow{AE} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{E\ldots}$

3) $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{A\ldots}$

38 Compléter les égalités vectorielles suivantes :

1) $\overrightarrow{\ldots} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

2) $\overrightarrow{L\ldots} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{AI}$

3) $\overrightarrow{A\ldots} = \overrightarrow{GJ} + 3\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{JL}$

39 Dans chacun des cas suivants, les vecteurs sont-ils coplanaires ? Le justifier.

1) $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{DH}$ et $\overrightarrow{EG}$;
2) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BF}$;
3) $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{HG}$;
4) $\overrightarrow{HF}$, $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

40 Le point M est défini par $\overrightarrow{EM} = 2\overrightarrow{EF}$

1) En fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ exprimer les vecteurs suivants :
$\overrightarrow{EM}$; $\overrightarrow{HC}$; $\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{BJ}$; $\overrightarrow{KM}$ et $\overrightarrow{MJ}$.
2) Les droites (BK) et (MJ) sont-elles parallèles ? Le démontrer en utilisant la question précédente.
3) Que peut-on en déduire concernant les points B, K, M et J ?

41 ► MÉTHODE 3 p. 278

On considère les points M et N définis par :
$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$
et
$\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \frac{2}{3}\overrightarrow{FG}$.

1) Construire la figure.
2) Démontrer que les points C, E et M sont alignés.
3) Démontrer que les points E, F, H et N sont coplanaires.

42 Répondre par vrai ou faux en justifiant :

1) Les vecteurs $\overrightarrow{HI}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DH}$ sont coplanaires.
2) Les vecteurs $\overrightarrow{HG}$, $\overrightarrow{KB}$ et $\overrightarrow{LE}$ sont coplanaires.
3) Les vecteurs $\overrightarrow{HJ}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DH}$ sont coplanaires.

43 $ABCDEFGH$ est un cube.
On considère le point K défini par $\overrightarrow{HK} = \frac{5}{4}\overrightarrow{HF}$ et M un point du segment $[BF]$.

1) Que peut-on dire des points D, M, K et H ?
2) Montrer qu'il existe un unique réel $t \in [0;1]$ tel que $\overrightarrow{BM} = t\overrightarrow{BF}$.
3) Montrer que si $t = \frac{4}{5}$, les points D, M et K sont alors alignés.

44 Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, on considère les points $A(-3;2;4)$; $B(-1;1;0)$ et $C(2;-3;5)$. Déterminer les coordonnées des points M, N et P définis par :

1) $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$
2) $\overrightarrow{NB} = 4\overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{BC}$
3) $2\overrightarrow{PA} - 3\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \vec{0}$

45 ► MÉTHODE 4 p. 280

Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, on considère les points $A(-4;2;3)$, $B(1;5;2)$, $C(0;5;4)$ et $D(-6;-1;-2)$.

1) Démontrer que $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.
2) Que peut-on en déduire concernant les points A, B, C et D ?

46 Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, on considère les points $A(0;3;-1)$, $B(2;-2;0)$, $C(4;1;5)$ et $D(2;21;12)$.

1) Montrer que les points A, B et C définissent un plan.
2) Le point D appartient-il à ce plan ?

47 Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace,on considère les points $A(1;-1;-1)$, $B(5;0;-3)$, $C(2;-2;-2)$ et $D(0;5;-2)$.

1) Montrer que les points A, B et C définissent un plan.
2) Le point D appartient-il à ce plan ?

48 On reprend l'énoncé de l'exercice 42 en se plaçant dans le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.

1) Écrire les coordonnées des points de la figure. On écrira les coordonnées de M en fonction de t.
2) Démontrer à l'aide des coordonnées que D, M et I sont alignés si et seulement si $t = \frac{4}{5}$.

Représentations paramétriques

Dans toute cette partie, on munit l'espace d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

49 On considère les points $A(-3\ ;\ 2\ ;\ 4)$ et $B(-1\ ;\ 1\ ;\ 0)$. Écrire une représentation paramétrique de la droite (AB).

50 Soit Δ la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 3 + t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad , t \in \mathbb{R}$$

1) Donner un vecteur directeur de la droite Δ et un point de Δ.
2) Le point $M(-3;4;1)$ appartient-il à la droite Δ ?
3) Donner les coordonnées de trois points de la droite Δ.
4) Déterminer une autre représentation paramétrique de Δ.

51 Soit Δ la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = t - 2 \\ y = 4 \\ z = 2t - 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

1) Donner un vecteur directeur de la droite Δ et un point de Δ.
2) Le point $M(-3;4;-3)$ appartient-il à la droite Δ ?
3) Donner les coordonnées de trois points de Δ.
4) Déterminer une autre représentation paramétrique de la droite Δ.

52 Soient $A(-4;1;2)$ et $B(-1;2;5)$. Donner une représentation paramétrique de chacun des objets géométriques suivants :
1) La droite (AB) ;
2) Le segment $[AB]$;
3) La demi-droite $[AB)$.

53 Donner une représentation paramétrique de :
1) La droite $(O\,;\,\vec{i}\,)$;
2) La droite $(O\,;\,\vec{j}\,)$;
3) La droite $(O\,;\,\vec{k}\,)$.

54 On considère les points $A(-3\,;\,2\,;\,4)$, $B(-1\,;\,1\,;\,0)$ et $C(-5\,;\,4\,;\,6)$.
Vérifier que A, B et C définissent un plan et écrire une représentation paramétrique du plan (ABC).

55 Soit $\wp$ le plan de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 3 - t + 5t' \\ y = 1 + t' \\ z = -5t + 3t' \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, t' \in \mathbb{R}$$

1) Donner les coordonnées d'un couple de vecteurs directeurs de $\wp$ et un point de $\wp$.
2) Le point $M(6;2;-6)$ appartient-il à $\wp$?
3) Donner les coordonnées de trois points de $\wp$.
4) Déterminer une autre représentation paramétrique de $\wp$.

56 Soient $A(-4;1;2)$; $B(-1;2;\,5)$ et $C(1;0;6)$.
1) Vérifier que les points A, B et C définissent un plan.
2) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).
3) Déterminer une représentation paramétrique du plan (ABC).
4) Démontrer que le point $D(-3;-4;1)$ appartient au plan (ABC).
5) Déterminer une autre représentation paramétrique du plan (ABC).

57 Donner une représentation paramétrique des plans suivants :
1) Le plan $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,)$;
2) Le plan $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{k}\,)$;
3) Le plan $(O\,;\,\vec{j}\,,\,\vec{k}\,)$.

58 ► MÉTHODE 5 p. 282
Soit Δ la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + 3t \\ z = -1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Dans chacun des cas suivants, étudier la position de la droite Δ avec la droite d de représentation paramétrique :

1) $\begin{cases} x = -k \\ y = 3 + 2k \\ z = 4 - k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

2) $\begin{cases} x = 1 + k \\ y = -2k \\ z = 3 - k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

3) $\begin{cases} x = k - 2 \\ y = 7 - 3k \\ z = 2 - k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

59 Soit Δ la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 8 + 2t \\ y = -5 - 4t \\ z = 3 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Dans chacun des cas suivants, étudier la position de la droite Δ avec la droite d de représentation paramétrique :

1) $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 7 - 6t \\ z = -3 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

2) $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 4 - t \\ z = 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

3) $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 7 - 2t \\ z = -2 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

60 Soit $\wp$ le plan de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = t - 2t' \\ y = 1 + 3t + t' \\ z = 2 - 5t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, t' \in \mathbb{R}$$

Déterminer la nature de $\wp \cap \wp'$ dans chacun des cas suivants où $\wp'$ est définie par une représentation paramétrique :

1) $\begin{cases} x = -2 - 3t - t' \\ y = 2 - 2t + 4t' \\ z = 2 + 5t - 5t' \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, t' \in \mathbb{R}$

2) $\begin{cases} x = 4 - 3t + 5t' \\ y = -2t + t' \\ z = 5 + 5t - 5t' \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, t' \in \mathbb{R}$

3) $\begin{cases} x = -3 + 2t + t' \\ y = 2 - t + 2t' \\ z = 1 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, t' \in \mathbb{R}$

61 Soit $\wp$ le plan de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 4 - t + 3t' \\ y = 1 - t + 5t' \\ z = t - t' \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, t' \in \mathbb{R}$$

Dans chacun des cas suivants, déterminer une représentation paramétrique de la droite d'intersection de $\wp$ et du plan :

1) $(O; \vec{i}, \vec{j})$

2) $(O; \vec{i}, \vec{k})$

3) $(O; \vec{j}, \vec{k})$

62 Soit $\wp$ le plan de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 4 - t + 3t' \\ y = 1 - t + 5t' \\ z = t - t' \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, t' \in \mathbb{R}$$

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'intersection de $\wp$ avec la droite d donnée par une représentation paramétrique :

1) $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + 3t \\ z = 5 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

2) $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 10t \\ z = -3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

3) $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 \\ z = -3 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

63 Soit $ABCDEFGH$ un cube ; I et J les milieux respectifs de $[EG]$ et $[GH]$.

On munit l'espace du repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AI) puis de la droite (DJ).

2) Démontrer que les droites (AI) et (DJ) sont sécantes en un point dont on déterminera les coordonnées.

64 **D'après Bac (Asie – juin 2013 et Amérique du Sud - novembre 2012)**

Vrai faux

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, et proposer une démonstration de la réponse indiquée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

1) Dans les deux questions suivantes, l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

2) Soit S le point de coordonnées $(1\ ;\ 3\ ;\ 5)$ et Δ_1 la droite de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 5-4t \quad ,t \in \mathbb{R} \\ z = 2-2t \end{cases}$$

Affirmation 1 : la droite Δ_2 de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = -t \\ y = 7+4t \quad ,t \in \mathbb{R} \\ z = 7+2t \end{cases}$$

est la droite parallèle à la droite Δ_1 passant par le point S.

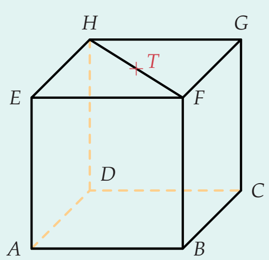
3) On considère les points I$(1;\ 0;\ 0)$, J$(0;\ 1;\ 0)$ et K$(0\,;0\,;1)$.

Affirmation 2 : la droite Δ de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 2-t \\ y = 6-2t \quad ,t \in \mathbb{R} \\ z = -2+t \end{cases}$$

coupe le plan (IJK) au point E$\left(-\frac{1}{2}\ ;\ 1\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.

4) Dans le cube ABCDEFGH, le point T est le milieu du segment [HF].

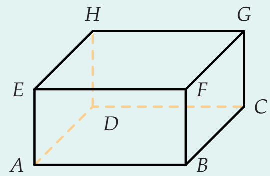


Affirmation 3 : les droites (AT) et (EC) sont orthogonales

65 **D'après Bac (Polynésie – juin 2015)**

On considère le pavé droit $ABCDEFGH$ ci-dessous, pour lequel $AB = 6$, $AD = 4$ et $AE = 2$.

I, J et K sont les points tels que :
$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.



On se place dans le repère orthonormé $(A; \vec{AI}, \vec{AJ}, \vec{AK})$.

1) Déterminer une représentation paramétrique du plan (IJG).

2) Déterminer les coordonnées du point d'intersection L du plan (IJG) et de la droite (BF).

3) Reproduire la figure et tracer la section du pavé $ABCDEFGH$ par le plan (IJG). On ne demande pas de justification.

66 **D'après Bac (Métropole – juin 2015)**

Dans un repère orthonormé $(O,\ I,\ J,\ K)$ d'unité 1 cm, on considère les points $A(0\ ;\ -1\ ;\ 5)$, $B(2\ ;\ -1\ ;\ 5)$, $C(11\ ;\ 0\ ;\ 1)$ et $D(11\ ;\ 4\ ;\ 4)$.

Un point M se déplace sur la droite (AB) dans le sens de A vers B à la vitesse de 1 cm par seconde.

Un point N se déplace sur la droite (CD) dans le sens de C vers D à la vitesse de 1 cm par seconde.

À l'instant $t = 0$ le point M est en A et le point N est en C.

On note M_t et N_t les positions des points M et N au bout de t secondes, t désignant un nombre réel positif.

On admet que M_t et N_t, ont pour coordonnées :
$M_t(t\ ;\ -1\ ;\ 5)$ et $N_t(11\ ;\ 0,8t\ ;\ 1+0,6t)$.

Les questions 1 *et* 2 *sont indépendantes.*

1) a) La droite (AB) est parallèle à l'un des axes (OI), (OJ) ou (OK). Lequel ?

b) La droite (CD) se trouve dans un plan $\mathcal{P}$ parallèle à l'un des plans (OIJ), (OIK) ou (OJK).
Lequel ? On donnera une représentation paramétrique de ce plan $\mathcal{P}$.

c) Vérifier que la droite (AB), coupe le plan $\mathcal{P}$ au point $E(11\ ;\ -1\ ;\ 5)$.

d) Les droites (AB) et (CD) sont-elles sécantes ?

2) a) Montrer que $M_tN_t^2 = 2t^2 - 25,2t + 138$.

b) À quel instant t la longueur M_tN_t est-elle minimale ?

67 **D'après Bac (Métropole – juin 2014)**

Dans l'espace, on considère un tétraèdre $ABCD$ dont les faces ABC, ACD et ABD sont des triangles rectangles isocèles en A. On désigne par E, F et G les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$.

On choisit AB comme unité de longueur et on se place dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ de l'espace.

1) Donner les coordonnées des points D et E.

2) Donner une représentation paramétrique de la droite (DF).

3) On désigne par M un point de la droite (DF) et par t le réel tel que $\overrightarrow{DM} = t\overrightarrow{DF}$. On note α la mesure principale en radian de l'angle géométrique $\widehat{EMG}$.

Le but de cette question est de déterminer la position du point M pour que la mesure de α soit maximale.

a) Démontrer que $ME^2 = \frac{3}{2}t^2 - \frac{5}{2}t + \frac{5}{4}$.

b) Démontrer que le triangle MEG est isocèle en M.

En déduire que : $ME \sin(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

c) Justifier que α est maximale si et seulement si $\sin(\frac{\alpha}{2})$ est maximal.

En déduire que α est maximale si et seulement si ME^2 est minimal.

d) Conclure.

68 **D'après Bac (Pondichéry – 2013)**

Pour chacune des questions, plusieurs propositions de réponse sont données dont une seule est exacte. Pour chacune des questions indiquer, sans justification, la bonne réponse sur la copie. Une réponse exacte rapporte 1 point.

Une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Il en est de même dans le cas où plusieurs réponses sont données pour une même question.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal. t et t' désignent des paramètres réels.

Le plan (P) est le plan ABC avec $A(0\,;\,1\,;\,-1)$, $B(-2\,;\,0\,;\,-1)$ et $C(-3\,;\,1\,;\,0)$.

Le plan (S) a pour représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = -2+t+2t' \\ y = -t-2t' \\ z = -1-t+3t' \end{cases} \quad t \text{ dans } \mathbb{R}\ t' \text{ dans } \mathbb{R}.$$

La droite (D) a pour représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = -2+t \\ y = -t \\ z = -1-t \end{cases} \quad t \text{ dans } \mathbb{R}.$$

On donne les points de l'espace $M(-1\,;\,2\,;\,3)$ et $N(1\,;\,-2\,;\,9)$.

1) Une représentation paramétrique du plan (P) est (à chaque fois, t dans $\mathbb{R}$, t' dans $\mathbb{R}$) :

a. $\begin{cases} x = t \\ y = 1-2t \\ z = -1+3t \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} x = t+2t' \\ y = 1-t+t' \\ z = -1-t \end{cases}$

c. $\begin{cases} x = t+t' \\ y = 1-t-2t' \\ z = 1-t-3t' \end{cases}$ **d.** $\begin{cases} x = 1+2t+t' \\ y = 1-2t+2t' \\ z = -1-t' \end{cases}$

2) a) La droite (D) et le plan (P) sont sécants au point K$(-8\,;\,3\,;\,2)$.

b) La droite (D) est une droite du plan (P).

c) La droite (D) et le plan (P) sont strictement parallèles.

3) a) La droite (MN) et la droite (D) sont non coplanaires.

b) La droite (MN) et la droite (D) sont parallèles.

c) La droite (MN) et la droite (D) sont sécantes.

d) La droite (MN) et la droite (D) sont confondues.

4) a) Les plans (P) et (S) sont parallèles.

b) La droite (Δ) de représentation paramétrique $\begin{cases} x = t \\ y = -2-t \\ z = -3-t \end{cases}$ est la droite d'intersection des plans (P) et (S).

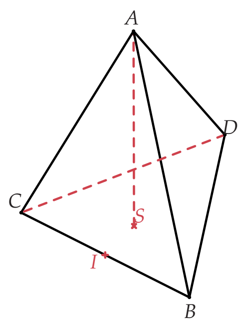
c) Le point M appartient à l'intersection des plans (P) et (S).

69 **Vrai ou faux ?**

Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses et le démontrer.

1) Si deux plans sont perpendiculaires, alors toute droite de l'un est orthogonale à toute droite de l'autre.
2) Si deux droites sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.
3) Si deux droites sont perpendiculaires à une même droite alors elles sont parallèles entre elles.

70 Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier et I le milieu de $[BC]$.



1) Démontrer que la droite (BC) est orthogonale au plan (ADI).
2) En déduire que $(BC) \perp (AD)$.

Le plan (ADI) est le plan orthogonal au segment $[BC]$ et passant par son milieu. Il est appelé plan médiateur du segment $[BC]$. Tous les points de ce plan sont équidistants de B et de C.

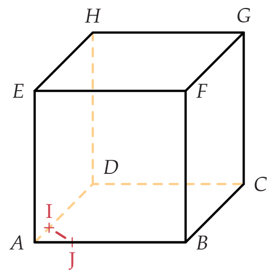
71 $ABCDEFGH$ est un cube et I et J sont les milieux respectifs de $[BC]$ et $[EH]$. Le point M est un point du segment $[AG]$ distinct de A et de G.

1) Montrer qu'il existe un unique réel $t \in]0;1[$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AG}$.
2) Construire la section du cube par le plan (IAM). Quelle est sa nature ?
3) Existe-t-il une valeur du réel t tel que les points J, M et I soient alignés ? Justifier.
4) Existe-t-il une valeur du réel t tel que les points H, M et I soient alignés ? Justifier.

72 $ABCDEFGH$ est un cube de côté a. Le point M est défini par $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DE}$.

1) Construire la section du cube par le plan (AGM).
2) Démontrer que cette section est un losange $ANGP$ avec N et P les milieux respectifs de $[BF]$ et $[DH]$.
3) En déduire l'aire de cette section en fonction de a.

73 $ABCDEFGH$ est un cube et I ; J et K les points tels que : $I \in [AD]$ et $AI = \frac{1}{3}AD$; $J \in [AB]$ et $AJ = \frac{1}{3}AB$.



Les propositions sont-elles vraies ou fausse ?
Le démontrer.

1) (IJ) est orthogonale à (EC) ;
2) (IJ) est orthogonale à (BG) ;
3) (IJ) est orthogonale à (HB) ;
4) (IJ) est orthogonale à (HC).

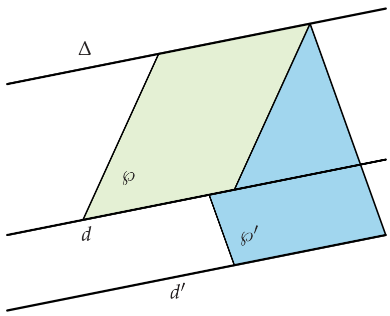
74 **INFO** Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$ et I le milieu de $[AB]$.

1) Construire la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dans l'espace.
2) Placer un point M du segment $[AC]$ et $\wp$ le plan passant par I et orthogonal à la droite (IM).
3) Construire le point N intersection de $\wp$ et de la droite (OB).
4) Conjecturer la position du point M pour laquelle la distance MN est minimale.
5) Démonstration
   a) Soit t le réel tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AC}$. Exprimer les coordonnées de M en fonction de t. On admet que $N(0;t;0)$.
   b) Exprimer la longueur MN en fonction de t.
   c) Déterminer la valeur de t pour laquelle cette longueur est minimale.

75 $ABCD$ est un tétraèdre. P, Q et R sont les points tels que $ABPC$, $ABQD$ et $ACRD$ sont des parallélogrammes. En se plaçant dans le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$, démontrer que les droites (BR),

(CQ) et (DP) sont concourantes en un point K dont on déterminera les coordonnées.

76 Une autre preuve du théorème du toit (voir page 274) :



Soit $\wp$ et $\wp'$ deux plans sécants selon une droite Δ, d une droite de $\wp$ et d' une droite de $\wp'$telles que $d//d'$.
Il s'agit de démontrer que la droite Δ intersection de $\wp$ et $\wp'$ est parallèle à d et à d'.

1) Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de d et d' et $\vec{w}$ un vecteur directeur de Δ. On considère des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{v'}$ tels que : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dirigent $\wp$ et $\vec{u}$ et $\vec{v'}$ dirigent $\wp'$.
Traduire vectoriellement le fait que $\Delta \subset \wp$ puis que $\Delta \subset \wp'$.

2) En déduire une relation vectorielle entre $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{v'}$.

3) Conclure en utilisant le fait que $\wp$ et $\wp'$ sont sécants.

77 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, soit Δ la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2 + 4t \\ z = -2t \end{cases} \quad , t \in \mathbb{R}$$

1) Les points $A(5\,;2\,;6)$ et $B(5\,;-6\,;4)$ appartiennent-ils à la droite Δ ?

2) Déterminer les valeurs des réels a et b tels que le point $C(4\,;a\,;b)$ appartienne à Δ.

3) Soit $M(x\,;y\,;z) \in \Delta$. Exprimer AM^2 en fonction de t.

4) Déterminer les coordonnées du point M tel que la distance AM soit minimale.

78 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, soit Δ la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = -t + 2 \end{cases} \quad , t \in \mathbb{R}$$

et $\wp$ le plan de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -t' \\ y = 1 + t + 3t' \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, t' \in \mathbb{R}$$

1) Le point $C(1\,;3\,;2)$ appartient-il au plan $\wp$?

2) Démontrer que la droite Δ est incluse dans le plan $\wp$.

3) Soit $\wp'$ le plan de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = t + t' \\ y = 1 + 2t + t' \\ z = -1 + 3t + t' \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, t' \in \mathbb{R}$$

a) Montrer que $C \in \wp'$.

b) Montrer que Δ coupe $\wp'$ en un point I dont on déterminera les coordonnées.

c) Montrer que $CI = \sqrt{3}$.

4) Soit t un nombre réel et M le point de Δ de coordonnées :
$M(-t+1\,;2t\,;-t+2)$.

a) Montrer que
$CM^2 = 6t^2 - 12t + 9$.

b) Montrer que CI est la distance minimale de CM lorsque t décrit l'ensemble des réels.

79 Soient $A(-2\,;0\,;1)$, $B(1\,;2\,;-1)$ et $C(-2\,;2\,;2)$ trois points de l'espace muni d'un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1) Vérifier que les points A, B et C définissent un plan.

2) Soit $D(-2\,;-1\,;0)$ et $E(-2\,;5\,;2)$. Démontrer que la droite (DE) et le plan (ABC) sont sécants en un point I dont on déterminera les coordonnées.

Je teste mes connaissances

À la fin de ce chapitre, je dois être capable de :

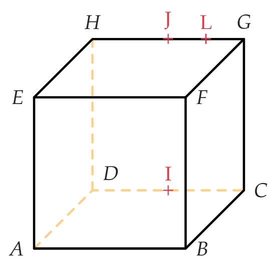
- Étudier les positions relatives de droites et de plans dans l'espace
- Construire et justifier la construction d'une section
- Calculer avec des vecteurs de l'espace
- Démontrer la coplanarité de points ou vecteurs
- Utiliser les représentations paramétriques de droites et plans de l'espace
- Étudier des positions relatives dans l'espace

QCM d'auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

Pour chaque question, plusieurs réponses sont proposées. Déterminer celles qui sont correctes.

On considère le cube $ABCDEFGH$ de côté a, avec I, J les milieux respectifs des segments $[CD]$ et $[GH]$ et L est le milieu du segment $[GH]$.



80 La droite (BI) est :

ⓐ orthogonale à (IJ) ⓑ orthogonale à (IL) ⓒ orthogonale à (DG)

81 L'intersection du plan (BIL) avec le plan (ABF) est :

ⓐ une droite passant par le milieu de $[AB]$ ⓑ une droite passant par le point B ⓒ une droite parallèle à (IL)

82 La section du cube $ABCDEFGH$ par le plan (BIL) est :

ⓐ un triangle ⓑ un parallélogramme ⓒ un trapèze

83 Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ on a :

ⓐ $\overrightarrow{BJ}\begin{pmatrix}-0,5\\1\\1\end{pmatrix}$ ⓑ les points L, I, B et F sont coplanaires ⓒ $\overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{GH} - \overrightarrow{CG}$

Dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère les points $A(1;0;2)$, $B(2;1;2)$, $C(3;0;0)$ et $D(5;-2;-4)$.

84 Les points A, B et C :

(a) sont alignés

(b) sont coplanaires

(c) définissent un plan

85 Les points A, B, C et D :

(a) sont coplanaires

(b) vérifient l'égalité $\overrightarrow{AD} = -2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$

(c) $D \in (BC)$

86 Une représentation paramétrique de :

(a) la droite (AB) est :
$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

(b) du plan (ABC) est :
$$\begin{cases} x = 5 + t + 4t' \\ y = -2 - t - 2t' \\ z = -4 - 2t - 6t' \end{cases}$$
$t \in \mathbb{R}$ et $t' \in \mathbb{R}$

(c) du plan (ABC) est :
$$\begin{cases} x = 1 + t + 2t' \\ y = t \\ z = 2 - 2t' \end{cases}$$
$t \in \mathbb{R}$ et $t' \in \mathbb{R}$

87 Soit $E(3;4;5)$:

(a) la droite parallèle à (AB) et passant par E a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 5 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

(b) Le point E appartient au plan (ABC)

(c) les droites (AB) et (DE) sont non coplanaires

Dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère les droites

$$d : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = 3 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \text{ et } d' : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 - 4t \\ z = 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

et le plan $\wp$ de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 2 + t - t' \\ y = -2t + 3t' \\ z = 4 - t' \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, t' \in \mathbb{R}$

88

(a) la droite d est parallèle au plan $(O ; \vec{i}, \vec{j})$

(b) la droite d est parallèle au plan $(O ; \vec{i}, \vec{k})$

(c) la droite d est parallèle à la droite $(O ; \vec{k})$

89

(a) d et $\wp$ sont parallèles

(b) d et $\wp$ sont sécants en $A(-1;4;3)$

(c) d est inclus dans $\wp$

90

(a) d et d' sont parallèles

(b) d et d' sont sécantes

(c) d est d' ne sont pas coplanaires

TP 1 Section d'un cube par un plan

INFO

1) Construire un cube $ABCDEFGH$ à l'aide d'un logiciel de géométrie dans l'espace.

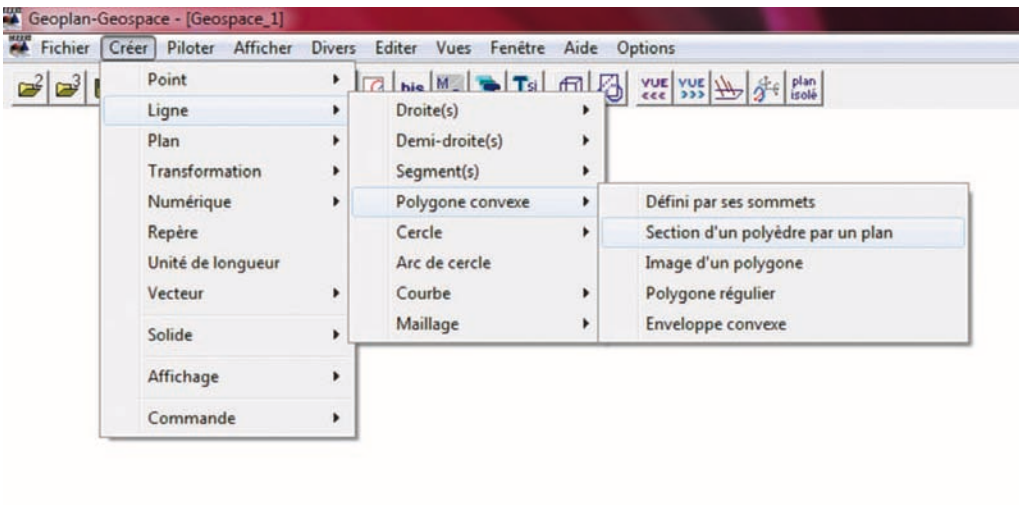
2) Construire l'intersection de chacune des faces du cube $ABCDEFGH$ par le plan (IJK) dans chacun des cas suivants :

a) I et J sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[AD]$ et K est un point du segment $[AE]$;

b) I et J sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[AD]$ et K est un point du segment $[EH]$;

c) I et J sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[AD]$ et K est un point du segment $[BF]$.

3) Vérifier ensuite chacune des constructions en créant la section du cube par le plan (IJK) comme ci-dessous avec, par exemple, le logiciel Géoplan-Géospace :



TP 2 Étudier les positions relatives à l'aide d'un logiciel de calcul formel

Dans l'espace muni d'un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère :

- Le plan $\wp$ de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 7 + 4t - t' \\ z = -1 + 3t + 2t' \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ et } t' \in \mathbb{R}$$

- Le plan $\wp'$ de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 5 - t + 2t' \\ y = 2 + 3t - 4t' \\ z = 1 + 5t' \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ et } t' \in \mathbb{R}$$

- La droite d_1 de représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 - 3t \\ z = -5t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$
- La droite d_2 de représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 9 + 7t \\ z = -4 - 5t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$
- le point $A(-1;10;4)$.

$\boxed{1}$ `resoudre([1-2t=2-3k,3-3t=9+7k,-5t=-4-5k],[t,k])`

$$[] \tag{2.1}$$

$\boxed{2}$ `resoudre([-3+2t=2-3k,7+4t-u=9+7k,-1+3t+2u=-4-5k],[t,u,k])`

$$\begin{pmatrix} \frac{16}{17} & -\frac{281}{51} & \frac{53}{51} \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

$\boxed{3}$ `resoudre([5-t+2u=2-3k,2+3t-4u=9+7k,1+5u=-4-5k],[t,u,k])`

$$\begin{pmatrix} k+1 & -k-1 & k \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

$\boxed{4}$ `resoudre([-3+2t=1-2k,7+4t-u=3-3k,-1+3t+2u=-5k],[t,u,k])`

$$[] \tag{2.4}$$

$\boxed{5}$ `resoudre([5-t+2u=1-4k,2+3t-4u=3+3k,1+5u=5k],[t,u,k])`

$$\begin{pmatrix} -\frac{24}{11} & -\frac{64}{55} & -\frac{53}{55} \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

$\boxed{6}$ `resoudre([-3+2t=-1,7+4t-u=10,-1+3t+2u=4],[t,u])`

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

Répondre aux questions suivantes, en précisant la ligne de la copie d'écran vous permettant de conclure :

1) Le point A appartient-il au plan $\wp$?
2) Déterminer la position relative des droites d_1 et d_2.
3) Déterminer la position relative de la droite d_1 et du plan $\wp$.
4) Déterminer la position relative de la droite d_2 et du plan $\wp$.
5) Déterminer la position relative de la droite d_1 et du plan $\wp'$.
6) Déterminer la position relative de la droite d_2 et du plan $\wp'$.

TP 3 En cinématique

La position à l'instant t ($t > 0$) d'un point M en mouvement dans l'espace se définit dans un repère $(O\,;\,\overrightarrow{i},\,\overrightarrow{j},\,\overrightarrow{k})$ par les coordonnées $M(x(t)\,;y(t)\,;z(t))$. Les fonctions $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ sont appelées équations horaires du mouvement. Par exemple, on considère deux points M et N dont les mouvements en fonction du temps, sont donnés respectivement par : $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 2 - 4t \\ z(t) = -2 + 3t \end{cases}$

et $\begin{cases} x(t) = 2 - 3t + 2t^2 \\ y(t) = 1 \\ z(t) = -2 \end{cases}$.

Sachant que le vecteur vitesse d'un point $P(x(t)\,;y(t)\,;z(t)$ à l'instant t est $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$ et que le vecteur accélération du point P à l'instant t est $\overrightarrow{a}\begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \\ z''(t) \end{pmatrix}$.

1) Montrer que le point M est animé d'un mouvement rectiligne uniforme (sa vitesse est constante).

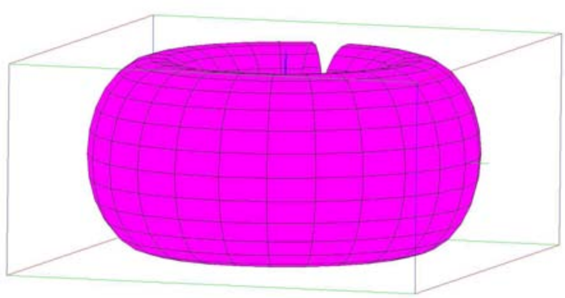
2) Montrer que le point N est animé d'un mouvement rectiligne uniformément varié (son accélération est constante).

Récréation, énigmes

Vous avez étudié dans ce chapitre les représentations paramétriques de droites, mais de nombreuses autres courbes du plan comme de l'espace ont des représentations paramétriques. Dans un repère orthonormé du plan, saurez-vous par exemple construire à l'aide des valeurs remarquables du sinus l'allure de la courbe de Lissajous dont un système d'équations paramétrique est :

$\begin{cases} x(t) = sin(2t) \\ y(t) = sin(3t) \end{cases}$, $t \in]-\pi;\pi]$?

De même, vous avez étudié les représentations paramétriques de plans, mais de nombreuses autres surfaces ont des représentations paramétriques comme le tore ci-dessous représenté à l'aide du logiciel Xcas :



Produit scalaire dans l'espace et applications

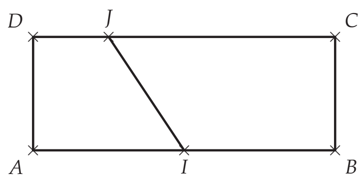
Connaissances nécessaires à ce chapitre

- ▶ Calculer un produit scalaire dans le plan en utilisant ses différentes expressions
- ▶ Calculer la mesure d'un angle géométrique, une longueur
- ▶ Déterminer une représentation paramétrique d'une droite

Auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

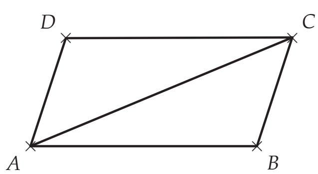
1 Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB = 4$ et $AD = 1{,}5$. Soit I le milieu de $[AB]$ et J le point tel que $4\overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{DC}$.



Calculer les produits scalaires suivants :

1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{JI}$
3) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{JI}$
4) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{JI}$

2 Soit $ABCD$ un parallélogramme tel que $AB = 4$, $AD = 2$ et $AC = 5$.

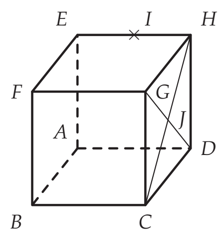


1) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.

2) a) En déduire aussi que la mesure de l'angle $\widehat{BAD}$, au dixième de degré près.

b) En remarquant que $BD^2 = \overrightarrow{BD}^2$, en déduire que $BD = \sqrt{15}$.

3 On considère un cube $ABCDEFGH$ de côté 1. Soient I le milieu de $[EH]$ et J le centre de la face $CDHG$.



1) Donner les coordonnées du point G dans le repère :

a) $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$
b) $(C\,;\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CG})$
c) $(H\,;\overrightarrow{HE}, \overrightarrow{HD}, \overrightarrow{HG})$
d) $(F\,;\overrightarrow{FB}, \overrightarrow{FG}, \overrightarrow{FE})$

2) Même question avec le point B.

3) Même question avec le point J.

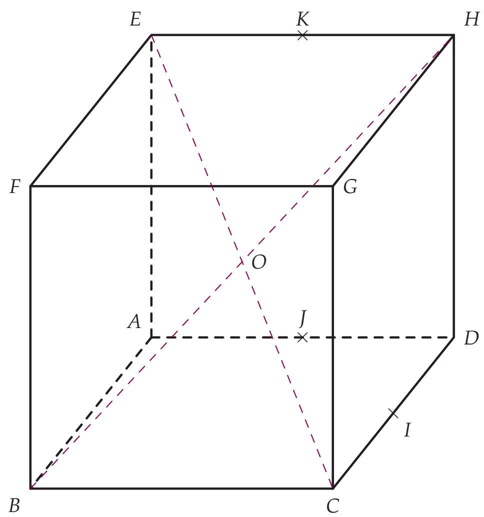
Voir solutions p. 419

Activités d'approche

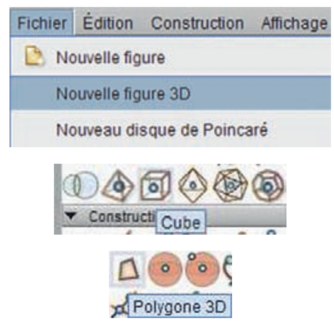
ACTIVITÉ 1 Produit scalaire dans l'espace... ou dans un plan ?

INFO

Considérons un cube $ABCDEFGH$ d'arête 2. On note O le centre de ce cube ainsi que I, J et K les milieux respectifs des arêtes $[CD]$, $[AD]$ et $[EH]$.



On pourra utiliser un logiciel de géométrie dynamique afin de modifier l'angle de vue et obtenir un meilleur aperçu des vecteurs et plans de la figure.
Ci-dessous, les menus et outils utilisés pour obtenir cette figure avec le logiciel CaRMetal.



Dans chacun des cas suivants :

1) mettre en évidence un plan contenant des représentants des vecteurs donnés ;

2) calculer leur produit scalaire dans ce plan.

a) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

b) $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BH}$

c) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AG}$

d) $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OH}$

e) $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{AG}$

f) $\overrightarrow{FB}$ et $\overrightarrow{AK}$

g) $\overrightarrow{OE}$ et $\overrightarrow{OH}$

h) $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{FH}$

i) $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BK}$

DÉBAT 2 Un calcul toujours possible ?

1) On considère le même cube que dans l'activité 1.
Le produit scalaire $\overrightarrow{KI} \cdot \overrightarrow{AG}$ est-il calculable ? Expliquer pourquoi.

2) Plus généralement, le produit scalaire de deux vecteurs de l'espace existe-t-il toujours ?

ACTIVITÉ 3 Caractérisation normale d'un plan

Partie A : En théorie

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de l'espace, on considère un plan $(\mathscr{P})$ passant par un point A et dirigé par deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul, simultanément orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

1) a) Démontrer que $\vec{n}$ est aussi orthogonal à tout vecteur $\vec{w}$ de $(\mathscr{P})$.

b) En déduire que si M est un point de $(\mathscr{P})$, alors $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$.

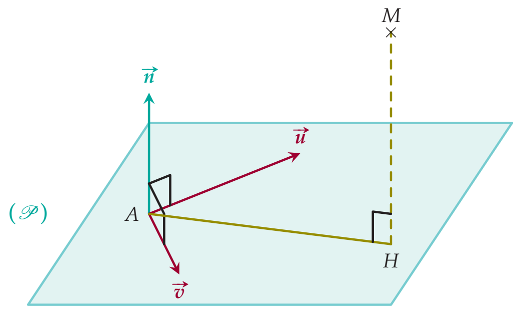
2) Démontrons maintenant la réciproque.

a) Énoncer cette réciproque.

b) Soit M un point de l'espace.

On considère le point H, projeté orthogonal de M sur le plan $(\mathscr{P})$.

Démontrer, en calculant $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM}$, que si $\vec{n} \cdot \overrightarrow{MA} = 0$, alors $HM = 0$ puis en déduire que $M \in (\mathscr{P})$.



3) Énoncer la propriété démontrée.

Partie B : En pratique

Dans un repère orthonormé $(O\,; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère le plan $(\mathscr{P})$ de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -1 + 2s + t \\ y = -1 + s + 2t \\ z = -s + 4t \end{cases}, \; s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$$

1) Donner les coordonnées d'un point A appartenant à $(\mathscr{P})$ ainsi que celles de deux vecteurs directeurs de $(\mathscr{P})$, que l'on notera $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

2) On cherche les coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ d'un vecteur $\vec{n}$ qui soit orthogonal à la fois à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.

a) Démontrer que les réels a, b et c satisfont le système suivant, que l'on note $(\mathscr{S})$:

$$(\mathscr{S}) : \begin{cases} 2a + b - c = 0 \\ a + 2b + 4c = 0 \end{cases}$$

b) Démontrer les équivalences suivantes :

$$(\mathscr{S}) \Longleftrightarrow \begin{cases} 2a + b - c = 0 \\ -2a - 4b - 8c = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2a + b - c = 0 \\ -3b - 9c = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = 2c \\ b = -3c \end{cases}$$

c) En déduire la forme générale du vecteur $\vec{n}$, pour $c \in \mathbb{R}^*$ puis, en choisissant judicieusement une valeur de c, donner un vecteur $\vec{n}$ particulier.

ACTIVITÉ 4 Équation cartésienne

INFO

En Première S, on a démontré que dans un repère $(O\,; \vec{i}, \vec{j})$ du plan, une droite est caractérisée par une équation du type $ax + by + c = 0$, où a et b ne sont pas simultanément nuls.
On a ensuite vu, au chapitre **G2**, qu'une droite de l'espace n'est plus du tout caractérisée de la même façon puisqu'elle est caractérisée dans un repère $(O\,; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ par une représentation paramétrique du type :

$$\begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \\ z = z_A + \gamma t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}$$

où α, β et γ ne sont pas simultanément nuls et x_A, y_A et z_A sont les coordonnées d'un point de la droite.

On peut alors légitimement se poser la question suivante : « Que caractérise une équation du type $ax + by + cz + d = 0$, avec a, b et c non tous nuls ? »

Partie A : Expérimentation

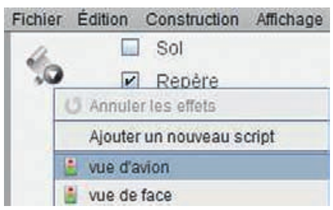
On se place dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace et on considère l'ensemble $(\mathscr{E})$ des points $M(x ; y ; z)$ tels que :

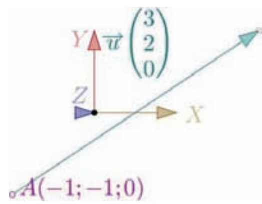
$$2x - 3y + z - 1 = 0.$$

1) On se place dans le plan d'équation $z = 0$.

a) Dans ce plan, décrire le plus précisément possible l'ensemble de points que représente l'équation $2x - 3y - 1 = 0$.

b) Représenter cet ensemble de points en utilisant un logiciel de géométrie dynamique qui propose une vision 3D.
Ci-dessous, les menus utilisés pour obtenir cette figure avec le logiciel CaRMetal, ainsi qu'une capture de la figure obtenue.





2) Adopter la démarche de la question **1)** :

a) dans le plan d'équation $y = 0$, en « vue de gauche » ;

b) dans le plan d'équation $x = 0$, en « vue de face ».

3) Que semblent définir ces trois droites ? Trois droites étaient-elles nécessaires ? Combien de droites suffisaient ?

4) Si on procède par analogie avec les équations de droites dans le plan, que pourrait représenter le vecteur ayant pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$?
Représenter ce vecteur afin de donner du poids à cette conjecture.

Partie B : Démonstration

Soient $A(-1 ; -1 ; 0)$, $B(1 ; 0 ; -1)$ et $C(0 ; 1 ; 4)$ trois points appartenant à $(\mathscr{E})$.
On note $(\mathscr{P})$ le plan passant par A et dirigé par $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

1) a) Donner une représentation paramétrique de $(\mathscr{P})$.

b) En déduire que si $M \in (\mathscr{P})$, alors $M \in (\mathscr{E})$.

2) Démontrons maintenant la réciproque.

a) Énoncer cette réciproque. (Pour les questions suivantes, on se placera sous les hypothèses données dans cette réciproque.)

b) Expliquer pourquoi l'on peut écrire que :

$$2x - 3y + z - 1 = 2 \times (-1) - 3 \times (-1) + 0 - 1.$$

c) Déterminer les coordonnées d'un vecteur non nul $\vec{n}$ tel que $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$.

d) Conclure.

1. Produit scalaire dans l'espace

Remarque : Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace sont nécessairement coplanaires :
- s'ils sont colinéaires, alors il existe une infinité de plans contenant $\vec{u}$ et $\vec{v}$;
- s'ils ne sont pas colinéaires, ramenons-les à une même origine A et considérons le plan engendré par A, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ qui contient donc, par construction, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

DÉFINITION

Le **produit scalaire** de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace est leur produit scalaire dans un plan les contenant.

Remarque : La définition donnée et les propriétés établies en classe de Première S dans le plan sont donc aussi valables dans l'espace. À savoir :
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{u}$, lorsque $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou $(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
  Dans ce cas, on dit que les vecteurs sont orthogonaux.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}_1$ où $\vec{v}_1$ est le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur une droite dirigée par $\vec{u}$.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$.
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$, où A, B et C sont trois points distincts du plan.

PROPRIÉTÉ : Orthogonalité

Deux droites sont orthogonales si et seulement si leurs vecteurs directeurs respectifs sont orthogonaux.

PREUVE Étant donné la colinéarité de tous les vecteurs directeurs d'une même droite, il suffit de démontrer la propriété en choisissant un vecteur directeur par droite.
Soient (d_1) et (d_2) deux droites, dirigées respectivements par $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$. Considérons (Δ_1) et (Δ_2), les parallèles respectives à (d_1) et (d_2) passant par un même point ; elles sont aussi dirigées respectivement par $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.
(d_1) est orthogonale à (d_2) si, par définition, (Δ_1) et (Δ_2) sont perpendiculaires c'est-à-dire si $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont orthogonaux.

DÉFINITION : Repère orthonormé

Un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace est dit orthonormé si les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont orthogonaux deux à deux et si $\left\|\vec{i}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = \left\|\vec{k}\right\| = 1$.

PROPRIÉTÉ : Expression analytique du produit scalaire

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

Alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

PREUVE Voir exercice 71 p. 320.

Exemple Dans un repère orthonormé, soient (d_1) et (d_2) deux droites de représentations paramétriques $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+2t \\ z = -5-7t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ et $\begin{cases} x = 5-t \\ y = -1+4t \\ z = t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

Les vecteurs $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, qui dirigent respectivement (d_1) et (d_2) sont orthogonaux puisque $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = -1+8-7 = 0$. Ainsi, (d_1) et (d_2) sont orthogonales.

MÉTHODE 1 Calculer la mesure d'un angle

► Ex. 16 p. 313

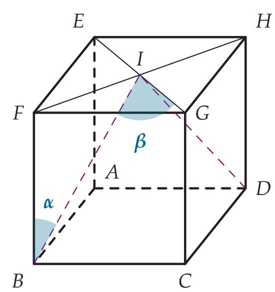
Pour calculer un angle géométrique formé par deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on exprime $\vec{u} \cdot \vec{v}$ de deux façons différentes : l'une permettant d'obtenir la valeur du produit scalaire, l'autre faisant intervenir l'angle.

Exercice d'application Soit $ABCDEFGH$, un cube de côté 1 et I le centre de la face $EFGH$.

On se place dans le repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

Déterminer, au degré près, les mesures des angles :

1) $\alpha = \widehat{IBF}$ 2) $\beta = \widehat{BID}$



Correction

1) $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BF}$ car $\overrightarrow{BF}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{BI}$ sur (BF). Ainsi, $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BF} = 1$.

D'autre part, $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BI} = BF \times BI \times \cos(\alpha) = BI \times \cos(\alpha)$.

De plus, $B(1\,;0\,;0)$ et $I\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;1\right)$ donc $BI = \sqrt{\left(\frac{1}{2}-1\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Ainsi, $\sqrt{\frac{3}{2}} \times \cos(\alpha) = 1$ et donc $\cos(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{3}}$. On en déduit alors que $\alpha \approx 35°$.

2) $\overrightarrow{IB} \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,5 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ID} \begin{pmatrix} -0,5 \\ 0,5 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{ID} = -0,25 - 0,25 + 1 = 0,5 = \frac{1}{2}$.

D'autre part, $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{ID} = IB \times ID \times \cos(\beta) = \sqrt{\frac{3}{2}} \times \sqrt{\frac{3}{2}} \times \cos(\beta) = \frac{3}{2}\cos(\beta)$. Par conséquent, $\frac{1}{2} = \frac{3}{2}\cos(\beta)$, et donc $\cos(\beta) = \frac{1}{3}$. On en déduit alors que $\beta \approx 71°$.

PROPRIÉTÉ : Propriétés algébriques

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs et λ un réel. Alors :

- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- $\vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$
- $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$ et $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$
- $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

REMARQUE : Seul le premier point recquiert réellement une démonstration. En effet, ce produit scalaire fait intervenir trois vecteurs et ne peut donc pas, dans le cas général, être considéré dans un seul et même plan.

PREUVE

- Pour le premier point, on exprime analytiquement le membre de gauche et le membre de droite puis on compare les expressions obtenues.
- Pour les trois derniers points, on se place dans le plan engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$, où l'on utilise les propriétés établies dans le plan en Première S. Plus particulièrement, l'avant-dernier point provient des formules avec les carrés scalaires.

Exemple On se place dans le cube $ABCDEFGH$ comme décrit dans la méthode précédente.

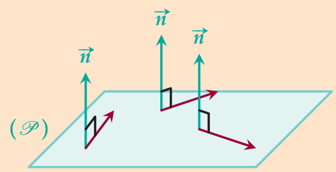
$$\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{ID} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{HF}+\overrightarrow{FB}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{FH}+\overrightarrow{HD}\right) = \left(\overrightarrow{FB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{HF}\right)\cdot\left(\overrightarrow{FB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{HF}\right) = \overrightarrow{FB}^2-\frac{1}{4}\overrightarrow{HF}^2.$$

Comme $FB = 1$ et que $HF = \sqrt{2}$, on en déduit que $\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{ID} = 1-\frac{1}{4}\times 2 = \frac{1}{2}$.

2. Vecteur normal à un plan

DÉFINITION : Vecteur normal

Un vecteur $\vec{n}$ est dit normal à un plan $(\mathscr{P})$ s'il est non nul et orthogonal à tous les vecteurs contenus dans $(\mathscr{P})$.



PROPRIÉTÉ

Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si un de ses vecteurs directeurs est un vecteur normal du plan.

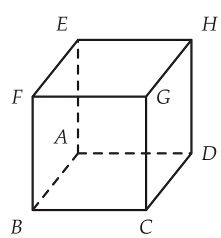
PREUVE Soient (d) une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et $(\mathscr{P})$ un plan.
Par définition, (d) est orthogonale à $(\mathscr{P})$ si et seulement si (d) est orthogonale à toute droite de $(\mathscr{P})$. Cela signifie que $\vec{u}$ est orthogonal à tout vecteur contenu dans $(\mathscr{P})$, autrement dit, que $\vec{u}$ est un vecteur normal de $(\mathscr{P})$.

PROPRIÉTÉ

Si un vecteur est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires d'un plan alors c'est un vecteur normal à ce plan.

PREUVE Soient $(\mathscr{P})$ un plan, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de ce plan auxquels est orthogonal un vecteur non nul $\vec{n}$. Montrons que $\vec{n}$ est orthogonal à tout vecteur de $(\mathscr{P})$.
Ramenons $\vec{u}$ et $\vec{v}$ à une même origine A : $(A\,;\vec{u},\vec{v})$ est alors un repère de $\mathscr{P}$ et tout vecteur $\vec{w}$ peut s'écrire $\vec{w} = \alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$, où α et β sont deux réels. Ainsi, $\vec{w}\cdot\vec{n} = \alpha\vec{u}\cdot\vec{n}+\beta\vec{v}\cdot\vec{n} = 0$.

Exemple Soit $ABCDEFGH$ un cube d'arête $a > 0$.
Les faces $ABFE$ et $BCGF$ étant des carrés, le vecteur $\overrightarrow{FB}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ qui sont deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC). Ainsi, $\overrightarrow{FB}$ est un vecteur normal au plan (ABC). On peut aussi dire que la droite (FB) est orthogonale au plan (ABC).



Exemple Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$, on considère les points $A(1\,;1\,;1)$ et $B(-2\,;0\,;2)$ ainsi que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

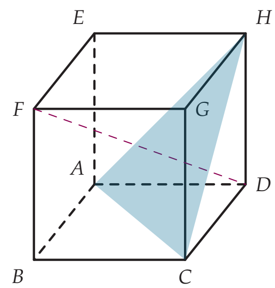
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires donc on peut définir le plan $(\mathscr{P})$ engendré par A, $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

De plus, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ donc $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal au plan $(\mathscr{P})$.

MÉTHODE 2 Démontrer une orthogonalité

► Ex. 28 p. 315

Exercice d'application Soit $ABCDEFGH$, un cube d'arête 1.
Démontrons que la droite (FD) est orthogonale au plan (ACH).



Correction Il suffit de prouver que $\overrightarrow{FD}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ACH), par exemple $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{HC}$. Démontrer alors que $\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{HC}=0$.
Calculons le premier produit scalaire en utilisant les propriétés algébriques et le second analytiquement :

- $\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BD})\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{FB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC}$.
  D'une part, et d'après l'exemple précédent, $\overrightarrow{FB}$ est un vecteur normal au plan (ABC) donc il est orthogonal à tout vecteur à ce plan, en particulier à $\overrightarrow{AC}$. Ainsi, $\overrightarrow{FB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$.
  D'autre part, $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ car $[BD]$ et $[AC]$ sont les diagonales du carré $ABCD$.
  On en conclut que $\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{AC}=0$.
- En se plaçant dans le repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$, on a $C(1\,;1\,;0)$, $D(0\,;1\,;0)$, $F(1\,;0\,;1)$ et $H(0\,;1\,;1)$ et ainsi, $\overrightarrow{FD}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{HC}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$.
  Par conséquent, $\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{HC}=-1+0+1=0$.

PROPRIÉTÉ

Soit $\vec{n}$ un vecteur normal à un plan $(\mathscr{P})$. Alors, tout vecteur non nul colinéaire à $\vec{n}$ est aussi un vecteur normal de $(\mathscr{P})$.

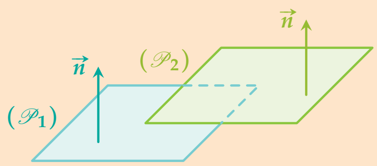
PREUVE Soit $\vec{m}$ un vecteur non nul colinéaire à $\vec{n}$, c'est-à-dire tel que $\vec{m}=k\vec{n}$, $k\in\mathbb{R}^*$.
Montrons que $\vec{m}$ est orthogonal à tout vecteur de $(\mathscr{P})$.
Soit $\vec{w}$ un vecteur de $(\mathscr{P})$. Alors $\vec{w}\cdot\vec{m}=\vec{w}\cdot(k\vec{n})=k(\vec{w}\cdot\vec{n})=0$.

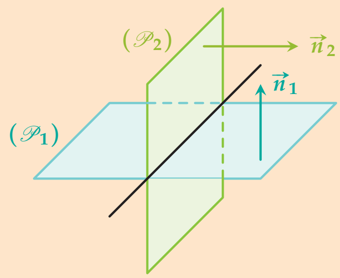
Remarque : La projection orthogonale d'un point A sur un plan $(\mathscr{P})$ est le point H appartenant à $(\mathscr{P})$ tel que (AH) soit orthogonale à $(\mathscr{P})$ ou, autrement dit, que $\overrightarrow{AH}$ soit un vecteur normal à $(\mathscr{P})$.

Exemple En reprenant la configuration de la méthode précédente, considérons I le centre de gravité de ACH. Alors $\overrightarrow{HI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{HM}$, où M est le milieu de $[AC]$, donc $\overrightarrow{HI}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{HD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}\right)$.
Ainsi $\overrightarrow{FI}=\overrightarrow{FH}+\frac{2}{3}\overrightarrow{HD}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{FH}+\overrightarrow{HD}\right)=\frac{2}{3}\overrightarrow{FD}$. $\overrightarrow{FI}$ est donc aussi un vecteur normal à (ACH) et comme $I\in(ACH)$, on en déduit que I est le projeté orthogonal de F sur (ACH).

PROPRIÉTÉ : Parallélisme et perpendicularité de plans

- Deux plans sont parallèles si et seulement si tout vecteur normal de l'un est un vecteur normal de l'autre.
- Deux plans sont perpendiculaires si et seulement si un vecteur normal de l'un est orthogonal à un vecteur normal de l'autre.





PREUVE Pour le premier point, voir exercice **72** p. 320.

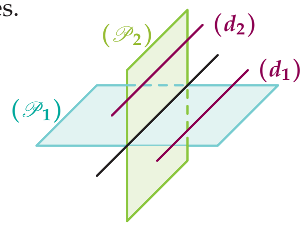
Exemple On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.

- Soient $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ deux plans de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

  $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont colinéaires : les plans $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ sont donc parallèles.
- Soient $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ deux plans de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

  $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ ne sont pas colinéaires : les plans $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ sont donc sécants, mais $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 \neq 0$ donc $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ ne sont pas perpendiculaires.

REMARQUE : Soient $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$, deux plans perpendiculaires.
Si (d_1) est une droite de $(\mathscr{P}_1)$ et (d_2) est une droite de $(\mathscr{P}_2)$, alors (d_1) et (d_2) ne sont pas nécessairement orthogonales.
Ci-contre, deux droites (d_1) et (d_2) parallèles.
Voir exercice **31** p. 315.



PROPRIÉTÉ

Soient $\vec{n}$ un vecteur non nul, A un point et $(\mathscr{P})$ le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$. Alors un point M appartient à $(\mathscr{P})$ si et seulement si $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$.

PREUVE

- Si M appartient à $(\mathscr{P})$ alors $\overrightarrow{AM}$ est un vecteur de $(\mathscr{P})$ et est donc orthogonal à $\vec{n}$.
- Réciproquement, soit M un point de l'espace tel que $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$. Considérons H le projeté orthogonal de M sur $(\mathscr{P})$. Alors $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = \vec{n} \cdot (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}) = \vec{n} \cdot \overrightarrow{AH} + \vec{n} \cdot \overrightarrow{HM}$.
  D'une part, $\overrightarrow{AH}$ est contenu dans $(\mathscr{P})$, donc $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont orthogonaux et ainsi $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$.
  D'autre part, $\overrightarrow{HM}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires et donc $\vec{n} \cdot \overrightarrow{HM} = \|\vec{n}\| \times HM$ ou $-\|\vec{n}\| \times HM$.
  On en déduit donc que $\|\vec{n}\| \times HM = 0$ et ainsi, puisque $\vec{n} \neq \vec{0}$, $HM = 0$: le point M est confondu avec le point H, il appartient donc à $(\mathscr{P})$.

3. Équation cartésienne d'un plan

PROPRIÉTÉ : Caractérisation algébrique d'un plan

Soit $M(x\,;y\,;z)$ un point de l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

- Si M appartient à un plan $(\mathscr{P})$, alors ses coordonnées vérifient une relation du type :
$$ax+by+cz+d=0,$$
avec a, b et c des réels non simultanément nuls.
- Réciproquement :
L'ensemble des points $M(x\,;y\,;z)$ de l'espace vérifiant une relation du type $ax+by+cz+d=0$, avec a, b et c non simultanément nuls est un plan, que l'on note $(\mathscr{P})$.

On dit que $(\mathscr{P})$ a pour équation $ax+by+cz+d=0$, appelée équation cartésienne du plan et de plus, $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $(\mathscr{P})$.

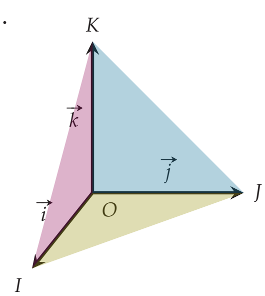
PREUVE

- Soit $(\mathscr{P})$ un plan passant par un point $A(x_0\,;y_0\,;z_0)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$.
M appartenant à $(\mathscr{P})$, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux, c'est-à-dire analytiquement :
$$(x-x_0)\alpha+(y-y_0)\beta+(z-z_0)\gamma=0$$
ou encore, en développant :
$$\alpha x+\beta y+\gamma z-\alpha x_0-\beta y_0+\gamma z_0=0.$$
Cette dernière égalité est bien de la forme annoncée en posant $a=\alpha$, $b=\beta$, $c=\gamma$ et $d=-\alpha x_0-\beta y_0+\gamma z_0$.
- a, b et c n'étant pas simultanément nuls, il existe $A(x_0\,;y_0\,;z_0)$ tel que $ax_0+by_0+cz_0+d=0$:
  - si $a\neq 0$, alors le triplet $\left(-\frac{d}{a}\,;0\,;0\right)$ vérifie l'égalité $ax+by+cz+d=0$;
  - si $a=0$, on peut procéder de façon similaire puisqu'alors $b\neq 0$ ou $c\neq 0$.

  Les coordonnées du point M vérifiant aussi l'égalité, on en déduit que :
$$ax+by+cz+d=ax_0+by_0+cz_0+d,$$
ce qui peut aussi s'écrire : $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$.
Cette dernière égalité n'étant rien d'autre que la traduction analytique de l'orthogonalité entre les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ $(\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0)$, on en déduit, d'après la propriété précédente, que M appartient au plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Exemple On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

- Le plan (OJK) a pour équation $x=0$ et admet pour vecteur normal le vecteur $\vec{i}$.
- Le plan (OIK) a pour équation $y=0$ et admet pour vecteur normal le vecteur $\vec{j}$.
- Le plan (OIJ) a pour équation $z=0$ et admet pour vecteur normal le vecteur $\vec{k}$.



MÉTHODE 3 Déterminer une équation cartésienne d'un plan (cas particulier)

► Ex. 37 p. 316

Dans le cas où le plan $(\mathscr{P})$ est défini par un point A et un vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$:

1) écrire l'équation de $(\mathscr{P})$ sous la forme $ax + by + cz + d = 0$ où le réel d reste à déterminer ;
2) déterminer d en utilisant les coordonnées du point A.

Exercice d'application Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathscr{P})$ passant par $A(1\,;-2\,;3)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Correction Les coordonnées du vecteur $\vec{n}$ étant données, le plan $(\mathscr{P})$ admet pour équation $4x - 2y + z + d = 0$, où d est un réel qu'il reste à déterminer. Le point A appartient à $(\mathscr{P})$ donc $4 \times 1 - 2 \times (-2) + 3 + d = 0$, ce qui donne $d = -11$.
Ainsi, une équation cartésienne de $(\mathscr{P})$ est : $4x - 2y + z - 11 = 0$.

MÉTHODE 4 Déterminer une équation cartésienne d'un plan (cas général)

► Ex. 46 p. 317

Dans le cas où l'on donne trois points A, B et C pour définir un plan $(\mathscr{P})$:

1) s'assurer que le plan $(\mathscr{P})$ est bien défini en montrant que A, B et C ne sont pas alignés ;
2) déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à $(\mathscr{P})$;
3) en déduire une équation cartésienne de $(\mathscr{P})$ en se référant à la méthode précédente.

Exercice d'application Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(0\,;1\,;1)$, $B(-4\,;2\,;3)$ et $C(4\,;-1\,;1)$.
Déterminer, s'il existe, une équation cartésienne du plan $(\mathscr{P})$ défini par ces trois points.

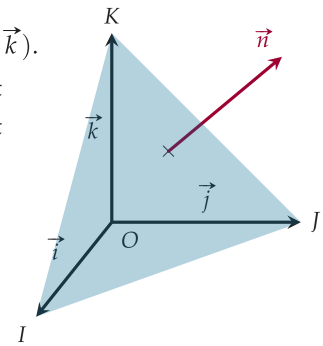
Correction On commence par calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles et donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et ainsi, les trois points A, B et C définissent bien un plan $(\mathscr{P})$.

On note $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur normal à $(\mathscr{P})$. Alors $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, ce qui donne les équations $-4a + b + 2c = 0$ et $4a - 2b = 0$, d'où le système équivalent :

$$\begin{cases} -8a + 2b + 4c = 0 \\ 4a - 2b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -4a + 4c = 0 \\ 4a - 2b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = c \\ b = 2a \end{cases}$$

Les coordonnées de $\vec{n}$ sont donc de la forme $\begin{pmatrix} a \\ 2a \\ a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}^*$. Avec $a = 1$, on obtient $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Ainsi, $(\mathscr{P}) : x + 2y + z + d = 0$ où d est un réel qu'il reste à déterminer.
L'appartenance du point A à $(\mathscr{P})$ donne $d = -3$ et donc $(\mathscr{P}) : x + 2y + z - 3 = 0$.

Exemple On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Dans ce repère on considère les points $I(1\,;0\,;0)$, $J(0\,;1\,;0)$ et $K(0\,;0\,;1)$. Le plan (IJK) a pour équation $x+y+z-1=0$ et admet pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.



MÉTHODE 5 Déterminer, si elle existe, l'intersection d'une droite et d'un plan

▶ Ex. 52 p. 318

Soient (d) une droite dirigée par $\vec{u}$ et $(\mathscr{P})$ un plan de vecteur normal $\vec{n}$.

1) Tester le parallélisme de (d) et $(\mathscr{P})$ en calculant $\vec{u}\cdot\vec{n}$:
   a) si $\vec{u}\cdot\vec{n}=0$, alors (d) est parallèle, strictement ou non, à $(\mathscr{P})$;
   b) si $\vec{u}\cdot\vec{n}\neq 0$, alors (d) et $(\mathscr{P})$ se coupent en un point M.
2) Si l'intersection existe, résoudre le système composé des équations décrivant (d) et $(\mathscr{P})$ afin de calculer les coordonnées de M.

Exercice d'application Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère la droite (d) de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1-t \\ y = 2t \\ z = 5 \end{cases}, t\in\mathbb{R}$

et le plan $(\mathscr{P})$ d'équation cartésienne $3x+z+7=0$.

Déterminer, s'il existe, les coordonnées du point d'intersection de (d) et de $(\mathscr{P})$.

Correction Un vecteur directeur de (d) et un vecteur normal de $(\mathscr{P})$ sont respectivement $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$. Ainsi, $\vec{u}\cdot\vec{n}=-3$ donc (d) et $(\mathscr{P})$ se coupent en un point M dont les coordonnées $(x\,;y\,;z)$ satisfont le système :

$$\begin{cases} x = 1-t \\ y = 2t \\ z = 5 \\ 3x+z+7 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1-t \\ y = 2t \\ z = 5 \\ 3(1-t)+5+7 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t = 5 \\ x = -4 \\ y = 10 \\ z = 5 \end{cases}$$

Ainsi, $M(-4\,;10\,;5)$.

Exercice d'application Même consigne avec la droite (d) : $\begin{cases} x = 1-t \\ y = 2-2t \\ z = 3+5t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$

et le plan $(\mathscr{P})$: $-6x-2y-2z+1=0$.

Correction Avec les mêmes notations que précédemment, $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-2\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$. $\vec{u}\cdot\vec{n}=0$ donc (d) et $(\mathscr{P})$ sont parallèles. De plus, le point $A(1\,;2\,;3)$ par lequel passe (d) n'appartient pas à $(\mathscr{P})$ donc (d) et $(\mathscr{P})$ sont strictement parallèles.

MÉTHODE 6 Déterminer, si elle existe, l'intersection de deux plans

► Ex. 66 p. 319

Soient $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ deux plans de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$.

1) Tester le parallélisme de $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ en testant la colinéarité de $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$.

2) Si les plan ne sont pas parallèles :

   a) écrire le système composé des équations décrivant $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$;

   b) choisir une des coordonnées comme paramètre ;

   c) en déduire une représentation paramétrique de la droite d'intersection.

Exercice d'application

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les plans $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ d'équations respectives $x+2y+z-1=0$ et $2x-3y-z+2=0$.
Déterminer, si elle existe, une représentation paramétrique de la droite d'intersection entre $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$.

Correction

$(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ ont pour vecteurs normaux respectifs $\vec{n}_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{n}_2\begin{pmatrix}2\\-3\\-1\end{pmatrix}$. Ils ne sont pas colinéaires donc $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ se coupent selon une droite (d). Un point M appartient à (d) si et seulement si ses coordonnées $(x\,;y\,;z)$ vérifient le système :

$$\begin{cases} x+2y+z-1 &= 0\\ 2x-3y-z+2 &= 0\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+2y+z-1 &= 0\\ 3x-y+1 &= 0\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y &= 3x+1\\ z &= 1-x-2y=-7x-1\end{cases}$$

On peut vérifier à l'aide d'un logiciel de calcul formel (ici Xcas en ligne) :

```
linsolve([x+2y+z-1=0, 2x-3y-z+2=0], [y, z])
```

$$[3x+1,\ -7x-1]$$

Ainsi, les coordonnées de M sont de la forme $(x\,;3x+1\,;-7x-1)$, $x\in\mathbb{R}$ et donc, en choisissant x comme paramètre, on obtient une représentation paramétrique de (d) :

$$\begin{cases} x &= t\\ y &= 1+3t\\ z &= -1-7t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}.$$

Exercice d'application

Même consigne avec les plans $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ d'équations respectives $2x-4y+3z-5=0$ et $-4x+8y-6z+10=0$.

Correction

En reprenant les mêmes notations, $\vec{n}_1\begin{pmatrix}2\\-4\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{n}_2\begin{pmatrix}-4\\8\\-6\end{pmatrix}$ sont colinéaires donc les plans sont parallèles. Comme les deux équations sont équivalentes, on en déduit que $(\mathscr{P}_1)=(\mathscr{P}_2)$.

Activités mentales

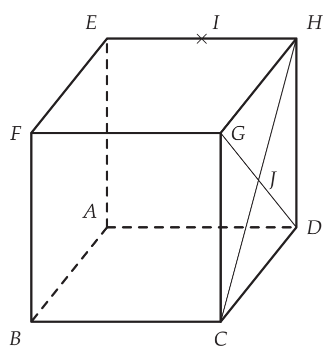
1 Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$ on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\2\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$. On note θ la mesure en degrés de l'angle géométrique formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Calculer :

1) $\|\vec{u}\|$
2) $\|\vec{v}\|$
3) $\vec{u}\cdot\vec{v}$
4) θ

2 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 4$ et $\vec{u}\cdot\vec{v} = 1$. Calculer :

1) $\vec{u}\cdot(\vec{u}+\vec{v})$
2) $\vec{v}\cdot(-\vec{u}+2\vec{v})$
3) $(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})$
4) $(2\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-2\vec{v})$

3 On considère un cube $ABCDEFGH$ de côté $a > 0$. Soient I le milieu de $[EH]$ et J le centre de la face $CDHG$.



Exprimer en fonction de a les produits scalaires :

1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$
2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{FH}$
3) $\overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{GC}$
4) $\overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{FC}$
5) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BG}$
6) $\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{GD}$

4 Même consigne qu'à l'exercice **3** avec :

1) $\overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{FI}$
2) $\overrightarrow{GH}\cdot\overrightarrow{GJ}$
3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{GJ}$
4) $\overrightarrow{IH}\cdot\overrightarrow{FB}$

5 Même consigne qu'à l'exercice **3** avec :

1) $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{GE}$
2) $\overrightarrow{FG}\cdot\overrightarrow{GD}$
3) $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CG}$
4) $\overrightarrow{IH}\cdot\overrightarrow{FG}$

6 On se place dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$. Dans chacun des cas suivants, dire si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux :

1) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\3\\-1\end{pmatrix}$
2) $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\-2\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\\sqrt{2}\\2\end{pmatrix}$
3) $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-3\\1\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\4\\24\end{pmatrix}$
4) $\vec{u}\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\1\\2\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$

7 On reprend le cube de l'exercice **3**.
Pour chacun des plans suivants, citer, en justifiant, un vecteur normal à ce plan :

1) (BCG)
2) (BCH)

8 On reprend le cube de l'exercice **3**.
Pour chacun des vecteurs suivants, citer, en justifiant, un plan auquel ce vecteur est normal :

1) $\overrightarrow{BF}$
2) $\overrightarrow{AC}$

9 Dans chacun des cas suivants, donner un vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ au plan $(\mathscr{P})$ respectant les contraintes distinctes données :

1) $(\mathscr{P}) : x-3y+z-1=0$ avec $a=2$.
2) $(\mathscr{P}) : -2x+3y+z+8=0$ avec $b=1$.
3) $(\mathscr{P}) : -x+4y-5z-7=0$ avec $b=-8$.
4) $(\mathscr{P}) : 2x-y+6z-7=0$ avec $c=3$.

10 Dans chacun des cas suivants, donner une équation cartésienne du plan passant par le point A et de vecteur normal $\vec{n}$:

1) $A(0\,;1\,;2)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$
2) $A(-1\,;4\,;1)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\-1\\2\end{pmatrix}$
3) $A(-1\,;2\,;2)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}-7\\2\\-4\end{pmatrix}$
4) $A(-1\,;1\,;6)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}8\\-4\\2\end{pmatrix}$

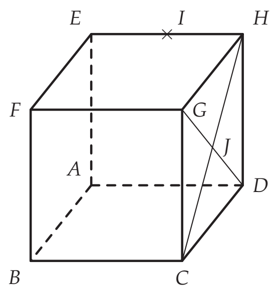
Produit scalaire dans l'espace

11 ROC

Dans un repère orthonormé de l'espace :

1) rappeler la formule de la norme d'un vecteur ;
2) énoncer la formule de l'expression analytique du produit scalaire de deux vecteurs et la démontrer.

12 On considère le cube suivant, d'arête $a > 0$ où I est le milieu de $[EH]$ et J le centre de la face $CDHG$.

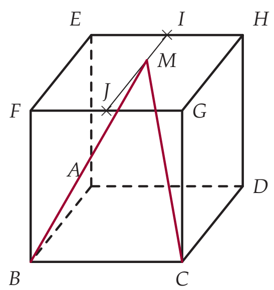


En considérant des décompositions sur les arêtes du cube, exprimer en fonction de a les produits scalaires suivants :

1) $\overrightarrow{FI} \cdot \overrightarrow{FH}$
2) $\overrightarrow{IG} \cdot \overrightarrow{IH}$
3) $\overrightarrow{EJ} \cdot \overrightarrow{IF}$
4) $\overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{EJ}$
5) $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BA}$
6) $\overrightarrow{FJ} \cdot \overrightarrow{CH}$

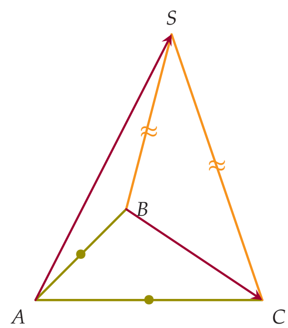
13 Reprendre l'exercice **12** en se plaçant dans le repère orthonormé $\left(A\,;\frac{1}{a}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{a}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{a}\overrightarrow{AE}\right)$.

14 On considère le cube suivant, d'arête 1, où I et J sont les milieux respectifs de $[EH]$ et $[FG]$. Soit M un point appartenant à $[IJ]$.



1) a) Démontrer que pour $M \neq J$, les triangles MJB et MJC sont rectangles en J.
   b) En déduire que $MB = MC$.
   c) En déduire que $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = MB^2 - \frac{1}{2}$.
2) Déterminer la ou les positions du point M pour que $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 1$.

15 Soit $SABC$ un tétraèdre de tel que les triangles ABC et SBC soient isocèles respectivement en A et S :

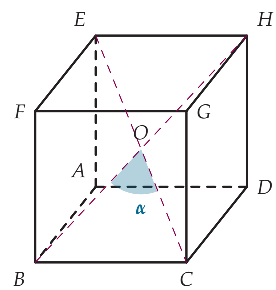


Démontrer que $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

Calculs d'angles

16 ► MÉTHODE 1 p. 304

On considère un cube $ABCDEFGH$ de côté 1 et de centre O.



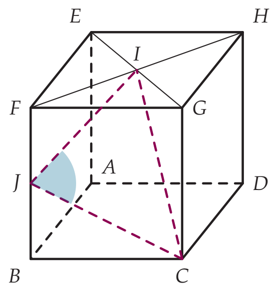
Calculer une valeur approchée de la mesure de l'angle $\alpha = \widehat{BOC}$ au degré près.

17 Dans un repère orthonormé $(O\,; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1\,;-2\,;3)$, $B(-1\,;0\,;1)$ et $C(2\,;1\,;0)$.

Calculer, au dixième de degré près, une mesure des angles :

1) $\widehat{ABC}$
2) $\widehat{BAC}$
3) $\widehat{ACB}$

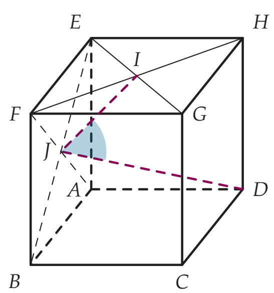
18 On considère un cube $ABCDEFGH$ de côté 1. Soit I le centre de la face $EFGH$ et J le milieu de l'arête $[BF]$.



On cherche à calculer une mesure de l'angle $\widehat{CJI}$ au degré près.

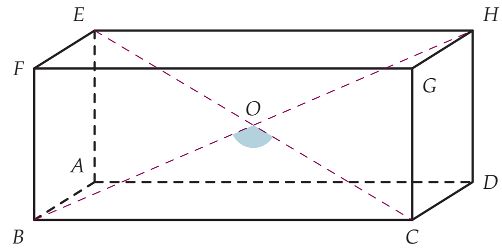
1) Méthode géométrique
   a) Calculer les trois longueurs du triangle IJC.
   b) En déduire que $\overrightarrow{JC} \cdot \overrightarrow{JI} = \dfrac{1}{4}$.
   c) En déduire une mesure de l'angle $\widehat{CJI}$.
2) Autre méthode géométrique
   a) Calculer $\overrightarrow{JC} \cdot \overrightarrow{JI}$ en décomposant astucieusement les deux vecteurs sur les arêtes du cube.
   b) En déduire une mesure de l'angle $\widehat{CJI}$.
3) Méthode analytique
   a) En se plaçant dans le repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, calculer analytiquement $\overrightarrow{JC} \cdot \overrightarrow{JI}$.
   b) En déduire une mesure de l'angle $\widehat{CJI}$.
4) Quelle est la méthode :
   a) qui demande le moins / le plus de connaissances théoriques ?
   b) la moins / la plus rapide ?

19 On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1. Soit I le centre de la face $EFGH$ et J celui de la face $ABFE$.



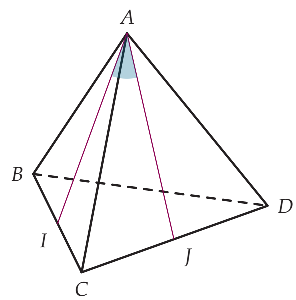
En se plaçant dans un repère orthonormé bien choisi, calculer, au degré près, une mesure de l'angle $\widehat{IJD}$.

20 On considère un parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ tel que $AB = 3$, $AD = 5$ et $AE = 2$. On note O son centre.



En se plaçant dans le repère orthonormé $\left(A\,;\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \dfrac{1}{5}\overrightarrow{AD}, \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$, déterminer une mesure de l'angle $\widehat{BOC}$ au centième de degré près.

21 On considère un tétraèdre régulier $ABCD$ d'arête 2. Soit I le milieu de $[BC]$ et J celui de $[CD]$.



1) a) Calculer les longueurs AI, AJ et IJ.
   b) En déduire la valeur de $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ}$.
2) En déduire une mesure de l'angle $\widehat{IAJ}$, au dixième de degré près.

22 Refaire l'exercice **21** en traitant le cas général d'un tétraèdre régulier d'arête $a > 0$.

Orthogonalité

23 ROC

Démontrer que si un vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires d'un plan $(\mathscr{P})$, alors $\vec{n}$ est un vecteur normal à $(\mathscr{P})$.

24 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère $\vec{u}\begin{pmatrix} k \\ -2 \\ k-1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ k \\ k \end{pmatrix}$, où $k \in \mathbb{R}$. Déterminer la ou les valeurs de k pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

25 Même exercice que le **28** avec les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} k \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} k+1 \\ -k \\ 2 \end{pmatrix}$, où $k \in \mathbb{R}$.

26 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les deux points $A(1\,;2\,;1)$, $B(4\,;6\,;3)$ et les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1) Démontrer que le point A et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ définissent bien un plan.

2) Démontrer que $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal à ce plan.

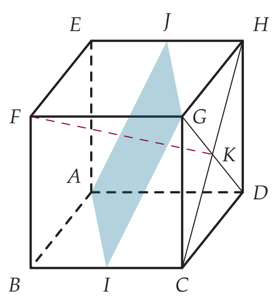
27 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les quatre points $A(-1\,;1\,;2)$, $B(1\,;0\,;-1)$, $C(0\,;3\,;1)$ et $D(-8\,;2\,;-3)$.

1) Démontrer que les points A, B et C définissent bien un plan.

2) Démontrer que $\overrightarrow{AD}$ est un vecteur normal à ce plan.

28 ► MÉTHODE 2 p. 306

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1. Soient I et J les milieux respectifs de $[BC]$ et $[EH]$ et K le centre de la face $CDHG$.



Sans utiliser de repère :

1) démontrer que les points A, I, G et J sont coplanaires ;

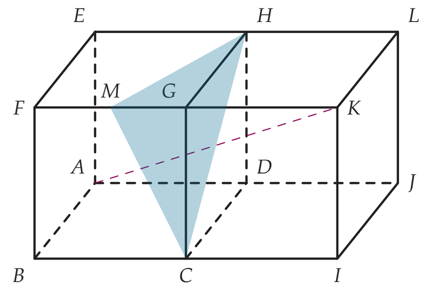
2) **a)** démontrer que (FK) est orthogonale à (IJ) ;

b) démontrer que (FK) est orthogonale à (AI) ;

c) en déduire que (FK) est orthogonale au plan (AIG).

29 Reprendre l'exercice **28** en travaillant dans un repère orthonormé bien choisi.

30 On considère deux cubes, disposés comme dans la figure associée. M est le milieu de $[FG]$. On souhaite démontrer que (AK) est orthogonale au plan (MHC).



1) Démontrer que $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{CM}$, puis en déduire la valeur de ce produit scalaire.

2) En suivant cette méthode, calculer $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{HM}$.

3) Conclure.

31 **Une erreur courante**

Dans cet exercice, on va mettre en évidence de façon analytique la remarque de la page 307. On munit l'espace d'un repère orthonormé.

1) Relire cette remarque. À votre avis, quelle est l'erreur courante qui est commise ?

2) Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, considérons les plans $(\mathscr{P}) : 2x - 3y - z + 4 = 0$ et $(\mathscr{Q}) : x + 2y - 4z - 5 = 0$.

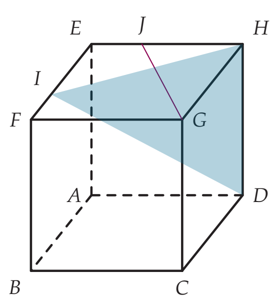
a) Vérifier que $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{Q})$ sont bien orthogonaux.

b) Vérifier que $A(1\,;1\,;3)$ et $B(-1\,;-1\,;5)$ appartiennent à $(\mathscr{P})$.

c) Vérifier que $C(1\,;6\,;2)$ et $D(-3\,;0\,;-2)$ appartiennent à $(\mathscr{Q})$.

d) Les droites (AB) et (CD) sont-elles orthogonales ? parallèles ?

32 On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1. Soient I et J les points tels que $\overrightarrow{EI} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EJ} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{EH}$.



1) Démontrer que (GJ) est perpendiculaire à (IH).

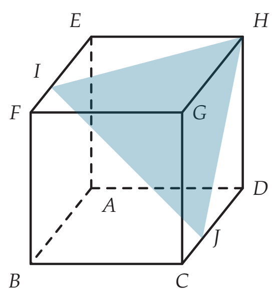
2) Démontrer que (GJ) est orthogonale à (HD).

3) En déduire que (GJ) est orthogonale à (ID).

4) Démontrer que le point d'intersection entre le plan (IHD) et la droite (GJ) a pour coordonnées $\left(\frac{4}{13}\,;\frac{7}{13}\,;1\right)$ dans le repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.

33 On considère un cube $ABCDEFGH$ de côté 1.

Soient I et J les points tels que $\overrightarrow{EI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{DJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$.



On se place dans le repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$. On considère la droite (Δ), orthogonale au plan (IHJ) et passant par G. Elle coupe respectivement les plans (ABD) et (ADE) en M et N dont ou souhaite déterminer les coordonnées.

1) Pourquoi (Δ) est-elle orthogonale aux droites (IH) et (JH) ?
2) On note $M(x\,;\,y\,;\,z)$.
   a) Déterminer z.
   b) Utiliser l'orthogonalité des droites (Δ) de (IJ) puis de (Δ) de (IH) afin d'en déduire les valeurs x et de y.
   c) À quel plan, autre que (ABD), M appartient-il ?
3) En utilisant la même méthode, déterminer les coordonnées du point N.

34 **Distance d'un point à une droite** INFO

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère les points $A(-1\,;-1\,;2)$ et $B(1\,;1\,;1)$ ainsi que le vecteur $\vec{u}=2\vec{\imath}+3\vec{\jmath}-\vec{k}$. On note (d) la droite passant par A et dirigée par $\vec{u}$.

Soit M un point appartenant à (d). Le but de l'exercice est de déterminer la longueur minimale de $[BM]$ ainsi que la ou les positions du point M rendant cette longueur minimale.

> La distance d'un point B à une droite (d) est la plus petite distance BM lorsque M parcourt (d).

1) Conjecturer la solution à l'aide d'un logiciel.
2) Donner une représentation paramétrique de (d).
3) a) Démontrer que répondre au problème posé revient à déterminer le minimum, ainsi que la valeur pour laquelle il est atteint de :

$$t\mapsto 14t^2-22t+9.$$

   b) Répondre alors au problème posé.
   c) Que peut-on alors remarquer concernant la droite (d) et le vecteur $\overrightarrow{BM}$?

35 Même consigne qu'à l'exercice **34** avec le point $B(-2\,;1\,;0)$ et la droite (d) engendrée par le point $A(5\,;-2\,;6)$ et le vecteur $\vec{u}=-\vec{\imath}-2\vec{k}$.

Équation cartésienne d'un plan

36 ROC

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, soient $\vec{n}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ un vecteur non nul et $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ un point.

Démontrer qu'une équation cartésienne du plan $(\mathscr{P})$, admettant $\vec{n}$ pour vecteur normal et passant par A est de la forme $ax+by+cz+d=0$. On donnera a, b, c et d en fonction des coordonnées de $\vec{n}$ et de A.

37 ► MÉTHODE 3 p. 309

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathscr{P})$ passant par $A(-1\,;2\,;-1)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$.

38 Même consigne qu'à l'exercice **37** avec :
1) $A(1\,;4\,;-5)$ et le vecteur $\vec{n}=2\vec{\imath}-\vec{\jmath}+3\vec{k}$;
2) $A\left(\sqrt{2}\,;2\,;-\sqrt{3}\right)$ et le vecteur $\vec{n}=\sqrt{3}\vec{\imath}-\vec{\jmath}+\sqrt{2}\vec{k}$.

39 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, déterminer une équation cartésienne du plan passant par :
1) $A(2\,;1\,;0)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{OA}$;
2) $A\left(\sqrt{2}\,;\sqrt{3}\,;2\right)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{AO}$;
3) $A(5\,;-3\,;4)$ et de vecteur normal $\vec{k}$;
4) $A(2\,;-1\,;\sqrt{3})$ et de vecteur normal $\vec{\imath}-\frac{3}{2}\vec{\jmath}$.

40 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, déterminer une équation cartésienne du plan passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$ lorsque :

1) $A(2;1;0)$ et $B(-4;-1;3)$;

2) $A(4;-5;6)$ et $B(1;-1;1)$;

3) $A(2;-1;0)$ et $B\left(\frac{1}{2};-\frac{2}{3};1\right)$;

4) $A(1;0;0)$ et $B(1;0;0)$.

41 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathscr{Q})$, parallèle au plan $(\mathscr{P})$ et passant par le point A lorsque :

1) $(\mathscr{P}) : x+y+z-1=0$ et $A(1;1;1)$;

2) $(\mathscr{P}) : x-3y+2z-4=0$ et $A(3;0;-1)$;

3) $(\mathscr{P}) : \frac{1}{3}x-\frac{5}{6}y-z-2=0$ et $A\left(\frac{1}{2};\frac{1}{5};\frac{1}{6}\right)$;

4) $(\mathscr{P}) : \sqrt{5}x-2y-\sqrt{2}z-4=0$ et $A(1;1;-1)$.

42 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, décrire, dans chacun des cas suivants, l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que :

1) $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$ avec $A(1;-2;3)$ et $\vec{n}=2\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$;

2) $\overrightarrow{OM}\cdot\vec{i}=3$;

3) $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{j}=-1$ avec $A(1;-2;3)$;

4) $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=5$ avec $A(-2;4;1)$ et $\vec{n}=-\vec{i}+2\vec{j}+5\vec{k}$.

43 On reprend la figure de l'exercice **28**, dans lequel la droite (FK) est orthogonale au plan (AIG).

1) En se plaçant dans le repère orthonormé $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$, déterminer une équation cartésienne du plan (AIG).

2) Même question en se plaçant dans le repère orthonormé $(B;\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BF})$.

44 On reprend la figure de l'exercice **30**, dans lequel la droite (AK) est orthogonale au plan (MHC).

1) En se plaçant dans le repère orthonormé $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$, déterminer une équation cartésienne du plan (MHC).

2) Même question en se plaçant dans le repère orthonormé $(D;\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DH})$.

45 On reprend la figure de l'exercice **32**, dans lequel la droite (GI) est orthogonale au plan (IHD).
En se plaçant dans le repère orthonormé $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$, déterminer une équation cartésienne du plan (IHD).

46 ► MÉTHODE 4 p. 309
Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les trois points $A(-1;-1;1)$, $B(1;2;-1)$ et $C(0;1;1)$.
Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC) s'il existe.

47 Même consigne qu'à l'exercice **46** avec :

1) $A(5;-4;1)$, $B(6;3;9)$ et $C(-8;1;7)$;

2) $A(3;4;5)$, $B(4;-2;7)$ et $C(5;-8;9)$;

3) $A(-1;7;4)$, $B(-2;10;5)$ et $C(3;6;-1)$.

48 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère la représentation paramétrique suivante :

$$\begin{cases} x &= 1-s+4t \\ y &= 2+2s-t \\ y &= -1+s+2t \end{cases}, \quad s\in\mathbb{R},\quad t\in\mathbb{R}.$$

1) Cette représentation paramétrique définit-elle un plan ?

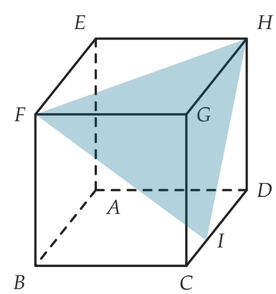
2) Si oui, en déterminer une équation cartésienne.

49 Même consigne qu'à l'exercice **48** avec les représentations paramétriques suivantes :

1) $\begin{cases} x &= -5+2s-4t \\ y &= 7-3s+6t \\ y &= \sqrt{2}-s+2t \end{cases} \quad s\in\mathbb{R},\quad t\in\mathbb{R}$

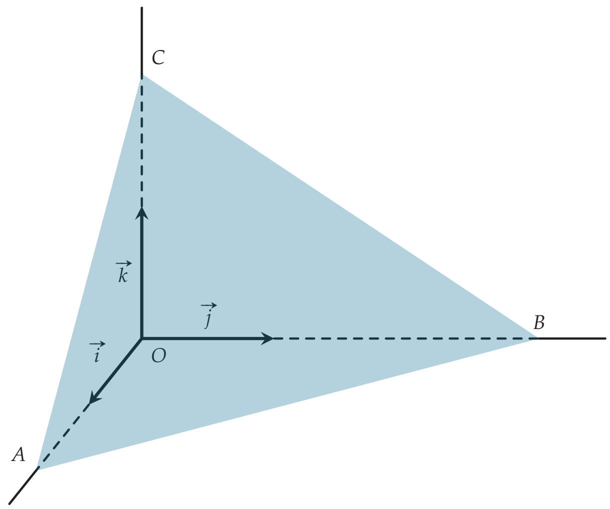
2) $\begin{cases} x &= 4s-t \\ y &= -1-2s+t \\ y &= 5+s+t \end{cases} \quad s\in\mathbb{R},\quad t\in\mathbb{R}$

50 On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1 et le point I tel que $3\overrightarrow{DI}=2\overrightarrow{DC}$.



En se plaçant dans le repère orthonormé $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$, déterminer une équation cartésienne du plan (FHI).

51 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(\alpha\,;0\,;0)$, $B(0\,;\beta\,;0)$ et $C(0\,;0\,;\gamma)$ où α, β et γ sont trois réels. On considère, lorsqu'il existe, le plan (ABC).



1) À quelle(s) condition(s) sur α, β et γ le plan (ABC) est-il bien défini ?

2) Étude des cas particuliers.

a) Lorsque $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$ et $\gamma \neq 0$, décrire le plan (ABC).

b) Même question lorsque $\beta = 0$ et α et γ non nuls.

c) Même question lorsque $\gamma = 0$ et α et β non nuls.

3) Étude du cas général où α, β et γ sont tous non nuls. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est :

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} - 1 = 0.$$

4) Expliquer pourquoi l'équation suivante regroupe les différents cas étudiés :

$$\beta\gamma x + \alpha\gamma y + \alpha\beta z - \alpha\beta\gamma = 0.$$

Intersection d'une droite et d'un plan

52 ► MÉTHODE 5 p. 310

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace soit (d) la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -7+t \\ y = 4+2t \\ z = -5-t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

et le plan $(\mathscr{P})$ d'équation cartésienne :

$$-2x - 3y + z - 6 = 0.$$

Déterminer, s'il existe, les coordonnées du point d'intersection de (d) et de $(\mathscr{P})$.

53 Même consigne qu'à l'exercice **52** avec la droite

$$(d) : \begin{cases} x = -1-2s \\ y = 2-s \\ z = -3+5s \end{cases}, \ s \in \mathbb{R}$$

et le plan

$$(\mathscr{P}) : -x - 5y - z - 6 = 0.$$

54 Même considération qu'à l'exercice **52** avec la droite

$$(d) : \begin{cases} x = 4-k \\ y = -12+5k \\ z = 9-6k \end{cases}, \ k \in \mathbb{R}$$

et le plan

$$(\mathscr{P}) : 4x + 2y + z - 1 = 0.$$

55 Même raisonnement qu'à l'exercice **52** avec la droite

$$(d) : \begin{cases} x = 6+t \\ y = -1+2t \\ z = -3-t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

et le plan

$$(\mathscr{P}) : x + y + 3z - 1 = 0.$$

56 Même consigne qu'à l'exercice **52** avec la droite (d) engendrée par $A(6\,;-2\,;-3)$ et $\vec{u} = 5\vec{i} - 3\vec{j} - 6\vec{k}$ et le plan $(\mathscr{P}) : -5x - 7y + 10z + 6 = 0$.

57 Même raisonnement qu'à l'exercice **52** avec la droite (d) passant par les points $A(-5\,;4\,;-3)$ et $B(1\,;-2\,;3)$ et le plan $(\mathscr{P}) : x + y + 3z - 1 = 0$.

58 Même instruction qu'à l'exercice **52** avec la droite (d) passant par les points $A(1\,;2\,;-1)$ et $B(2\,;4\,;1)$ et le plan $(\mathscr{P}) : -\frac{4}{5}x - \frac{1}{10}y + \frac{1}{2}z - 2 = 0$.

59 Même consigne qu'à l'exercice **52** avec la droite (d) passant par les points $A(2;4;5)$ et $B(-2;0;3)$ et le plan $(\mathscr{P}) : \frac{1}{2}x - \frac{5}{6}y + \frac{2}{3}z - 1 = 0$.

60 Même raisonnement qu'à l'exercice **52** avec le plan $(\mathscr{P}) : 4x - 6y + 5z - 3 = 0$ et :

1) l'axe des abscisses ;

2) l'axe des ordonnées ;

3) l'axe des cotes.

61 Même consigne qu'à l'exercice **52** avec la droite (d) passant par les points $A(2;-5;3)$ et $B(-2;4;-8)$ et le plan $(\mathscr{P})$ passant par $C(4;-1;2)$ et dirigé par $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\-3\\1\end{pmatrix}$.

62 **Distance d'un point à un plan**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère un plan $(\mathscr{P})$ et un point A.

Soit M un point appartenant à $(\mathscr{P})$. Le but de l'exercice est de déterminer la longueur minimale de $[AM]$ ainsi que la ou les positions du point M rendant cette longueur minimale.

> La distance d'un point A à un plan $(\mathscr{P})$ est la plus petite distance AM lorsque M parcourt $(\mathscr{P})$.

1) Soit H le projeté orthogonal de A sur $(\mathscr{P})$.

a) Faire un schéma.

b) De quelle droite et de quel plan le point H est-il l'intersection ?

c) Démontrer que si M est un point de $(\mathscr{P})$ différent de H, alors $AM > AH$.
La distance de A à $(\mathscr{P})$ est donc la distance AH.

2) Soit $(\mathscr{P}) : x - 2y - 2z - 31 = 0$ et $A(2;1;-2)$.

a) Donner un vecteur directeur de (AH).

b) En déduire les coordonnées du point H puis la distance de A à (P).

63 Reprendre la question **2)** de l'exercice **62** avec le plan $(\mathscr{P}) : -x + 2y + 3z - 15 = 0$ et le point $A(2;0;1)$.

64 Reprendre la question **2)** de l'exercice **62** avec le plan $(\mathscr{P}) : 3x - 2y - z - 1 = 0$ et le point $A(3;1;-2)$.

65 On reprend la figure de l'exercice **50** où une équation cartésienne de (FHI) est $3x + 3y + 2z - 5 = 0$.
Déterminer la distance des deux points suivants au plan (FHI) :

1) G (on notera K le projeté de G sur (FHI)) ;

2) A (on notera L le projeté de A sur (FHI)).

Intersection de deux plans

66 ► MÉTHODE 6 p. 311

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les plans $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ d'équations cartésiennes respectives :

$$x + y + 2z - 3 = 0 \quad \text{et} \quad -x + 4y - 5z + 6 = 0.$$

Déterminer, si elle existe, une représentation paramétrique de la droite d'intersection entre $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$.

67 Même consigne qu'à l'exercice **66** avec les plans $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ d'équations respectives :

$$x - 2z - 1 = 0 \quad \text{et} \quad y - 2z + 4 = 0.$$

68 Même consigne qu'à l'exercice **66** avec les plans $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ d'équations respectives :

$$x - y - 2z - 1 = 0 \quad \text{et} \quad -2x + 2y + 4z + 4 = 0.$$

69 Même consigne qu'à l'exercice **66** avec les plans $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ d'équations respectives :

$$3x + 9y - 6z - 3 = 0 \quad \text{et} \quad x + 3y - 2z - 1 = 0.$$

70 INFO

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les plans $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ d'équations cartésiennes respectives :

$$x - 2y + 3z - 5 = 0 \quad \text{et} \quad 3x + y - 2z + 1 = 0.$$

1) À l'observation des deux équations, semble-t-il évident ou du moins facile de voir quelle(s) inconnue(s) est-il le plus judicieux de choisir en paramètre lors de la résolution du système composé des deux équations ?

2) Voici la résolution du système avec« Xcas en ligne », où l'on a choisi à chaque fois un paramètre différent.

```
linsolve([x-2y+3*z-5=0, 3x+y-2z+1=0], [x, y])
```
$$\left[\frac{1}{7}z+\frac{3}{7}, \frac{11}{7}z+\frac{-16}{7}\right]$$

```
linsolve([x-2y+3*z-5=0, 3x+y-2z+1=0], [x, z])
```
$$\left[\frac{1}{11}y+\frac{7}{11}, \frac{7}{11}y+\frac{16}{11}\right]$$

```
linsolve([x-2y+3*z-5=0, 3x+y-2z+1=0], [y, z])
```
$$[11x-7, 7x-3]$$

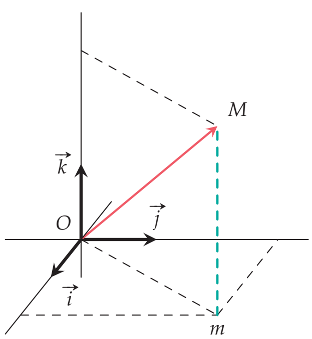
Retrouver le résultat le plus simple, en choisissant correctement le paramètre.

Démonstrations

71 Expression analytique du produit scalaire, p. 303

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Notons M le point de l'espace tel que $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$ et m le projeté orthogonal de M sur le plan $(\mathscr{P})$ engendré par le point O et les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.



1) Montrons que $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
   a) Pourquoi peut-on appliquer le théorème de Pythagore dans le triangle OmM ?
   b) Quelles sont les coordonnées du point m dans le plan $(\mathscr{P})$? En déduire une expression de Om^2 en fonction de x et y.
   c) Exprimer mM en fonction de z.
   d) En déduire une expression de OM^2 en fonction de x, y et z et conclure.
2) Montrons que $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'$.
   À l'aide d'une des deux formules donnant le produit scalaire en fonction des normes, démontrer l'égalité demandée.

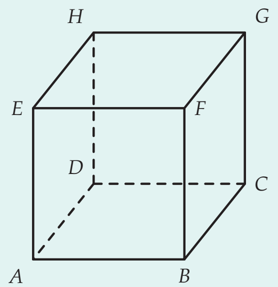
72 Parallélisme de plans, p. 307

Démontrons que deux plans $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ sont parallèles si et seulement un vecteur normal de l'un est un vecteur normal de l'autre.

1) Supposons que les deux plans ont un même vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et démontrons qu'ils sont parallèles.
   Notons $ax+by+cz+d=0$ l'équation de $(\mathscr{P}_1)$ ainsi que $ax+by+cz+\delta=0$ celle de $(\mathscr{P}_2)$ et intéressons-nous au système composé de ces deux équations, permettant d'obtenir l'intersection des deux plans.
   a) Démontrer que ce système est équivalent au système suivant :
   $$\begin{cases} ax+by+cz+d &= 0\\ d-\delta &= 0\end{cases}$$
   b) Si $d=\delta$, que peut-on dire de l'ensemble des solutions du système ? Conclure.
   c) Même question lorsque $d\neq\delta$.
2) Réciproquement, supposons que $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ sont parallèles et démontrons qu'ils ont même vecteur normal. Le cas où $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ sont confondus amenant une conclusion évidente, traitons le cas où les deux plans sont strictement parallèles. On note $\vec{n}_1\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et $\vec{n}_2\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ deux vecteurs normaux respectifs de $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$.
   a) En raisonnant par l'absurde, démontrer que $(a\,;\alpha)\neq(0\,;0)$ ou $(b\,;\beta)\neq(0\,;0)$ ou $(c\,;\gamma)\neq(0\,;0)$.
   b) Admettons que $(a\,;\alpha)\neq(0\,;0)$ (la démonstration est identique dans les autres cas) et admettons que $a\neq 0$. En considérant le système composé des équations des deux plans, démontrer que $\alpha\neq 0$.
   c) Démontrer que ce système est équivalent au système :
   $$\begin{cases} ax+by+cz+d &= 0\\ y(\alpha b-a\beta)+z(\alpha c-a\gamma)+(\alpha D-a\delta) &= 0\end{cases}$$
   d) Justifier que $\alpha b-a\beta=0$ et $\alpha c-a\gamma=0$.
   e) En déduire que $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont colinéaires et donner le coefficient de colinéarité.
   f) Conclure.

73 **D'après Bac (Pondichéry - 2015)**

Soit $ABCDEFGH$ un cube d'arête 1.



Dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$, on considère les points $M\left(1\,;1\,;\dfrac{3}{4}\right)$, $N\left(0\,;\dfrac{1}{2}\,;1\right)$ et $P\left(1\,;0\,;-\dfrac{5}{4}\right)$.

1) a) Reproduire la figure et placer les point M, N et P.

b) Démontrer que ces points ne sont pas alignés.

2) Démontrer que le triangle MNP est rectangle en M.

3) a) Déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}$, normal au plan (MNP).

b) En déduire une équation cartésienne de ce plan.

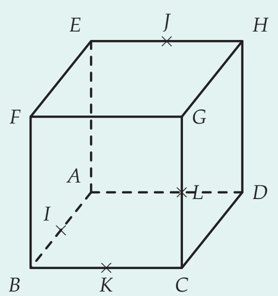
c) Soit (Δ) la droite passant par F et de vecteur directeur $\vec{n}$. Donner une équation paramétrique de (Δ).

d) Soit K le point d'intersection de (MNP) et (Δ). Démontrer que $K\left(\dfrac{4}{7}\,;\dfrac{24}{35}\,;\dfrac{23}{35}\right)$.

e) En déduire le volume du tétraèdre $FMNP$.

74 **D'après Bac (Liban - 2015)**

Soit $ABCDEFGH$ un cube d'arête 1. On note I le milieu de $[AB]$, J celui de $[EH]$, K celui de $[CB]$ et L celui de $[CG]$. On se place dans le repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.



1) a) Démontrer que la droite (FD) est orthogonale au plan (IJK).

b) En déduire une équation cartésienne de (IJK).

2) Déterminer une équation paramétrique de (FD).

3) Déterminer les coordonnées du point M d'intersection de (FD) et (IJK).

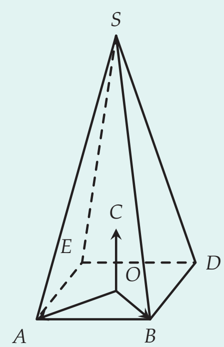
4) a) Calculer l'aire du triangle IJK.

b) En déduire le volume du tétraèdre $FIJK$.

5) Les droites (IJ) et (KL) sont-elles sécantes ? Si oui, en quel point ?

75 **D'après Bac (Amérique du Nord - 2015)**

Soit $SABDE$ une pyramide à base carrée $ABDE$ de centre O. On note C le point de l'espace tel que $(O\,;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})$ soit un repère orthonormé. Dans ce repère, soit S le point de coordonnées $(0\,;0\,;3)$.



Partie A

1) Soit U le point de la droite (SB) de cote 1. Construire U et démontrer que $U\left(0\,;\dfrac{2}{3}\,;1\right)$.

2) Soit V le point d'intersection du plan (AEU) et de la droite (SD). Démontrer que les droites (UV) et (BD) sont parallèles.

Construire V et déterminer ses coordonnées.

3) Soit $K\left(\dfrac{5}{6}\,;-\dfrac{1}{6}\,;0\right)$.

a) Démontrer que K est le pied de la hauteur issue de U du trapèze $AUVE$.

b) Démonter que l'aire de ce trapèze est $\dfrac{5\sqrt{43}}{18}$.

Partie B

1) Démontrer que le plan (EAU) a pour équation $3x-3y+5z-3=0$.

2) Donner une représentation paramétrique de la droite (d), orthogonale au plan (EAU) et passant par S.

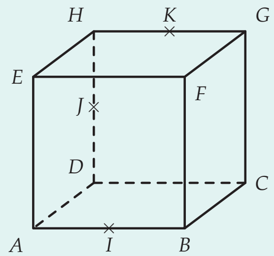
3) Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite (d) et du plan (EAU).

4) Le plan (EAU) partage la pyramide $SABDE$ en deux solides. Ces deux solides ont-ils le même volume ?

76 D'après Bac (Polynésie - 2015)

Soit $ABCDEFGH$ un cube d'arête 1. On note I le milieu de $[AB]$, J celui de $[DH]$ et K celui de $[HG]$.

On se place dans le repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



1) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{CE}$ est un vecteur normal du plan (IJK).

2) Démontrer que la droite (BD) est parallèle au plan (IJK).

3) Soit M un point de la droite (CE). Quelle est la position du point M sur la droite (CE) pour laquelle le plan (BDM) est parallèle au plan (IJK) ?

77 D'après Bac (Métropole - 2015)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère :

- les points $A(0\,;1\,;-1)$ et $B(-2\,;2\,;-1)$;
- la droite (d) de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -2+t \\ y & = & 1+t \\ z & = & -1-t \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}.$$

On note M un point appartenant à (d), de coordonnées $(-2+u\,;1+u\,;-1-u)$, où u est un réel.

1) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).

2) a) Démontrer que les droites (AB) et (d) ne sont pas parallèles.

b) Démontrer que les droites (AB) et (d) ne sont pas sécantes.

3) Vérifier que le plan $(\mathscr{P})$ d'équation :

$$x+y-z-3u=0$$

est orthogonal à la droite (d) et passe par le point M.

4) Montrer que le plan $(\mathscr{P})$ et la droite (AB) sont sécants en un point N de coordonnées :

$$(-4+6u\,;3-3u\,;-1).$$

5) a) Montrer que la droite (MN) est perpendiculaire à la droite (d).

b) Existe-t-il une valeur du réel u pour laquelle la droite (MN) est perpendiculaire à la droite (AB) ?

6) a) Exprimer MN^2 en fonction de u.

b) En déduire la valeur de u pour laquelle la distance MN est minimale et donner cette valeur minimale.

78 D'après Bac (Liban - 2014)

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier chaque réponse.

On se place dans un repère orthonormé de l'espace. On considère le plan $(\mathscr{P})$ d'équation $x-y+3z+1=0$ et la droite (d) dont un représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2t \\ y & = & 1+t \\ z & = & -5+3t \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}.$$

On considère aussi les points $A(1\,;1\,;0)$, $B(3\,;0\,;-1)$ et $C(7\,;1\,;-2)$.

Proposition 1

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 5-2t \\ y & = & -1+t \\ z & = & -2+t \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}.$$

Proposition 2

Les droites (d) et (AB) sont orthogonales.

Proposition 3

Les droites (d) et (AB) sont coplanaires.

Proposition 4

La droite (d) coupe le plan $(\mathscr{P})$au point E de coordonnées $(8\,;-3\,;-4)$.

Proposition 5

Les plans $(\mathscr{P})$ et (ABC) sont parallèles.

79 Produit vectoriel

Dans un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, on considère les vecteurs non nuls et non colinéaires $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$. On cherche les coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ d'un vecteur $\vec{n}$, orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

1) Démontrer que x, y et z satisfont le système :

$$\begin{cases} ax+by+cz &= 0 \\ \alpha x+\beta y+\gamma z &= 0 \end{cases}$$

2) Résoudre ce système en prenant z comme paramètre, c'est-à-dire en exprimant x et y en fonction de z.

3) En déduire, en choisissant judicieusement une valeur de z, que $\vec{n}\begin{pmatrix}b\gamma-c\beta\\c\alpha-a\gamma\\a\beta-b\alpha\end{pmatrix}$ est une solution du problème posé.

> On dit que ce $\vec{n}$ est le produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (dans cet ordre) et on note $\vec{n}=\vec{u}\wedge\vec{v}$.

4) Calculer $\vec{v}\wedge\vec{u}$. Que remarque-t-on ?

80 Distance d'un point à une droite

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, on considère les points $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et $B(x_B\,;y_B\,;z_B)$ ainsi que le vecteur $\vec{u}=\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}+\gamma\vec{k}$.

On note (d) la droite passant par A et dirigée par $\vec{u}$.

1) Soit H le projeté orthogonal de B sur (d).
Démontrer que si M est un point de (d) autre que H alors $BM > BH$.

2) On note $H(x\,;y\,;z)$.

a) Après avoir écrit une représentation paramétrique de (d), et en utilisant le fait que $H\in(d)$, démontrer que la valeur du paramètre permettant d'obtenir les coordonnées du point H est $t=\dfrac{\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB}}{\|\vec{u}\|^2}$.

b) Il s'agit maintenant de calculer BH. Est-ce une bonne idée ?

3) a) En exprimant astucieusement $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB}$, démontrer que $AH=\dfrac{\left|\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB}\right|}{\|\vec{u}\|}$.

b) En déduire une expression de BH.

81 Projection orthogonale sur un plan

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Partie A

Dans chacun des cas suivants, déterminer si H est le projeté orthogonal de A sur $(\mathscr{P})$:

1) $(\mathscr{P})$ a pour équation $-2x+3y-z+8=0$;

a) $A(2\,;2\,;-4)$ et $H(4\,;-1\,;-3)$;

b) $A(0\,;4\,;-4)$ et $H(2\,;1\,;-3)$.

2) $(\mathscr{P})$ a pour équation $7x-5y-6z+1=0$;

a) $A(-5\,;5\,;1)$ et $H(9\,;-5\,;13)$;

b) $A(7\,;-6\,;7)$ et $H(0\,;-1\,;1)$.

3) $(\mathscr{P})$ a pour équation $\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y+\frac{1}{4}z-\frac{1}{5}=0$;

a) $A(7\,;-2\,;4)$ et $H\left(4\,;0\,;\frac{5}{2}\right)$;

b) $A\left(-5\,;5\,;-\frac{43}{15}\right)$ et $H\left(1\,;1\,;\frac{2}{15}\right)$.

Partie B

Déterminer, dans chacun des cas suivants, les coordonnées de H, projeté orthogonal du point A sur $(\mathscr{P})$:

1) $(\mathscr{P}) : x+y+z-1=0$ et $A(1\,;1\,;1)$;

2) $(\mathscr{P}) : 2x-3y+4z-5=0$ et $A(1\,;2\,;3)$;

3) $(\mathscr{P}) : -x-2y+11z+5=0$ et $A(-1\,;-4\,;3)$;

4) $(\mathscr{P}) : ax+by+cz+d=0$ et $A(\alpha\,;\beta\,;\gamma)$.

82 Distance d'un point à un plan

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, on considère un point $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et un plan $(\mathscr{P})$ d'équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$ et de vecteur normal $\vec{n}$.

1) Soit H le projeté orthogonal de A sur $(\mathscr{P})$.

a) Faire un schéma.

b) Démontrer que si M est un point de $(\mathscr{P})$ distinct de H, alors $AM > AH$.

2) On pose $\overrightarrow{AH}=\lambda\vec{n}$.

a) Démontrer que : $\lambda=-\dfrac{ax_A+by_A+cz_A+d}{\|\vec{n}\|^2}$

b) En déduire une expression de AH en fonction des coordonnées de A, des coefficients a, b, c et d et de $\|\vec{n}\|$.

3) Application.
On reprend la figure de l'exercice **50** où une équation cartésienne de (FHI) est $3x+3y+2z-5=0$.
Déterminer les distances des points suivants au plan (FHI) :

a) G ; **b)** A ; **c)** B ; **d)** D.

83 Perpendiculaire commune à deux droites INFO

Soit $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace. Soient $A(-3\,;\,4\,;5)$ et $B(-4;-1;-1)$ deux points et $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ deux vecteurs.

On considère la droite (d) engendrée par A et $\vec{u}$ ainsi que la droite (Δ) engendrée par B et $\vec{v}$.

On cherche deux points K et L tels que $K \in (d)$, $L \in (\Delta)$ et (KL) soit perpendiculaire à (d) et (Δ).

1) Représenter la situation dans un logiciel et conjecturer une solution au problème.

2) On note $\overrightarrow{AK} = k\vec{u}$ et $\overrightarrow{BL} = l\vec{v}$, où k et l sont des réels. Déterminer les coordonnées de K, de L puis de $\overrightarrow{KL}$ en fonction de k et l.

3) Démontrer que (KL) est perpendiculaire à (d) et (Δ) si et seulement si :

$$\begin{cases} 2k - l &= -3 \\ -3k + 2l &= 4 \end{cases}$$

4) Résoudre ce système puis en déduire les coordonnées des points K et L.

5) Calculer la distance KL.

84 Plan médiateur

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A(4;2;2)$ et $B(-9;-10;2)$.

On note $\mathscr{E}$ l'ensemble des points $M(x\,;y\,;z)$ de l'espace tels que $MA = MB$.

1) Démontrer que $\mathscr{E}$ est le plan d'équation :

$$26x + 24y + 161 = 0.$$

> Par définition, on appelle plan médiateur d'un segment $[AB]$ l'ensemble des points M de l'espace équidistants de A et B.

2) a) Démontrer que le milieu de $[AB]$ appartient à $\mathscr{E}$.

b) Démontrer qu'un vecteur normal à $\mathscr{E}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

c) En déduire une caractérisation de $\mathscr{E}$.

85 Intersection d'une sphère et d'une droite INFO

On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère les points $A(1;-2;2)$, $B(1;-5;4)$ et $C(-1;3;-1)$.

Le but de l'exercice est de déterminer, s'ils existent, les points d'intersection de la sphère $\mathscr{S}$ de centre A et de rayon 3 avec la droite (BC).

1) a) Représenter $\mathscr{S}$ ainsi que (BC) avec un logiciel de géométrie.

b) Construire leur intersection.

2) a) En procédant de la même façon que pour le cercle en classe de Première S, déterminer une équation de $\mathscr{S}$.

b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (BC).

3) Résoudre le système composé des équations de $\mathscr{S}$ et de (BC) et en déduire la réponse au problème posé.

86 Intersection d'une sphère et d'un plan INFO

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, soit $\mathscr{S}$ la sphère de centre $A(1;-2;3)$ et de rayon $\sqrt{10}$. On considère aussi le plan $(\mathscr{P})$ passant par O et dirigé par $\vec{j}$ et $\vec{k}$.

1) a) Représenter $\mathscr{S}$ ainsi que de $(\mathscr{P})$ dans un logiciel de géométrie.

b) Construire leur intersection. Quelle semble être la nature de cette intersection ?

2) a) Déterminer des équations de $\mathscr{S}$ et de $(\mathscr{P})$.

b) Résoudre le système composé des équations de $\mathscr{S}$ et de $(\mathscr{P})$ et retrouver le résultat conjecturé à la question **1)b)**.

À la fin de ce chapitre, je dois être capable de :

Calculer un produit scalaire
- avec la formule utilisant le cosinus
- avec les projetés
- avec les propriétés algébriques, en décomposant
- avec les formules des carrés scalaires
- avec les coordonnées dans un repère orthonormé

Utiliser un produit scalaire
- pour calculer la mesure d'un angle
- pour démontrer une orthogonalité

Déterminer une équation cartésienne d'un plan
- connaissant un point et un vecteur normal
- connaissant trois points non alignés

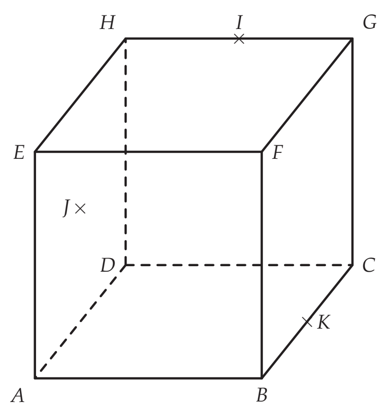
Déterminer l'intersection
- d'une droite et d'un plan
- de deux plans

QCM d'auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

Pour chaque question, plusieurs réponses sont proposées. Déterminer celles qui sont correctes.

Pour les exercices 87 à 105, on considère le cube $ABCDEFGH$ d'arête 2 ci-contre.
On note I le milieu de $[HG]$, K celui de $[BC]$ et J le centre de la face $ADHE$.
Lorsque cela sera nécessaire, on se placera dans le repère orthonormé $\left(A\,;\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\frac{1}{2}\overrightarrow{AD},\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$.



87 Pour calculer le produit scalaire $\overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{EI}$, il est préférable d'utiliser :

a) une projection b) une formule avec les carrés scalaires c) les coordonnées

88 Pour calculer le produit scalaire $\overrightarrow{IE}\cdot\overrightarrow{IF}$, il est préférable d'utiliser :

a) la formule avec le cosinus b) une projection c) une formule avec les carrés scalaires

89 Pour calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{BI}$, il est préférable d'utiliser :

a) une projection b) des décompositions c) les coordonnées

90 Pour calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{FG}$, il est préférable d'utiliser :

a) une projection b) des décompositions c) les coordonnées

91 $\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{EI} =$

ⓐ 0 ⓑ 2 ⓒ 4

92 $\overrightarrow{IE} \cdot \overrightarrow{IF} =$

ⓐ 3 ⓑ 4 ⓒ 9

93 $\overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{BI} =$

ⓐ 1,5 ⓑ 3 ⓒ 6

94 $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{FG} =$

ⓐ 2 ⓑ 4 ⓒ 8

95 $\overrightarrow{JB} \cdot \overrightarrow{JI} =$

ⓐ -4 ⓑ 0 ⓒ 4

96 Une valeur approchée de l'angle $\widehat{JBI}$ au centième de degré est :

ⓐ $\dfrac{\overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{BI}}{BJ \times BI}$ ⓑ $0,82$ ⓒ $35,26°$

97 Déterminer un vecteur normal au plan (BJI) revient à résoudre le système :

ⓐ $\begin{cases} -2a+b+c = 0 \\ -a+2b+2c = 0 \end{cases}$ ⓑ $\begin{cases} -2a+b+c = 0 \\ a+b+c = 0 \end{cases}$ ⓒ $\begin{cases} -a+2b+2c = 0 \\ a+b+c = 0 \end{cases}$

98 Un vecteur normal au plan (BJI) est :

ⓐ $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ ⓑ $\vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ⓒ $\vec{w}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$

99 Une équation cartésienne du plan (BJI) est :

ⓐ $-x+y+1=0$ ⓑ $-x+z+1=0$ ⓒ $-y+z=0$

100 L'intersection de la droite (EK) et du plan (BJI)

ⓐ est $M\left(\frac{4}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$ ⓑ est $M(4;2;2)$ ⓒ est la droite (EK) ⓓ n'existe pas

101 L'intersection de la droite (HB) et du plan (BJI)

ⓐ est $B(2;0;0)$ ⓑ est $M(1;1;1)$ ⓒ est la droite (HB) ⓓ n'existe pas

102 Soit L le centre de $DCGH$. L'intersection de la droite (KL) et du plan (BJI)

ⓐ est $K(2;1;0)$ ⓑ est $M(2;1;1)$ ⓒ est la droite (KL) ⓓ n'existe pas

103 Un vecteur normal au plan (EKI) est :

ⓐ $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\-2\\-3\end{pmatrix}$ ⓑ $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\-2\\3\end{pmatrix}$ ⓒ $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\2\\-3\end{pmatrix}$

104 Une équation cartésienne du plan (EKI) est :

ⓐ $4x-2y+3z-6=0$ ⓑ $4x-2y+3z+6=0$ ⓒ $4x-2y-3z-6=0$

105 L'intersection du plan (EKI) et du plan (BJI)

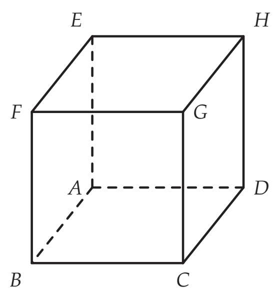
ⓐ est (d) : $\begin{cases} x = t \\ y = 6-4t \\ z = 6-4t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$

ⓒ est le plan $(EKI) = (BJI)$

ⓑ est (d) : $\begin{cases} x = 1,5-0,25t \\ y = t \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$

ⓓ n'existe pas

Pour les exercices **106** à **110**, on considère le cube $ABCDEFGH$ d'arête 1 ci-contre.
On se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.



106 Un vecteur normal au plan (BGE) a pour coordonnées :

ⓐ $\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ ⓑ $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ ⓒ $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

107 Le point d'intersection de (FD) et de plan (BGE) a pour coordonnées :

ⓐ $\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$ ⓑ $\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$ ⓒ $\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$

108 Le triangle BGE est :

ⓐ rectangle en G ⓑ isocèle en B ⓒ équilatéral

109 L'aire du triangle BGE est :

ⓐ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⓑ $\sqrt{2}$ ⓒ $\frac{\sqrt{6}}{2}$

110 Le volume du tétraèdre $BGED$ est :

ⓐ $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ ⓑ $\frac{1}{3}$ ⓒ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

TP 1 Aire minimale

INFO

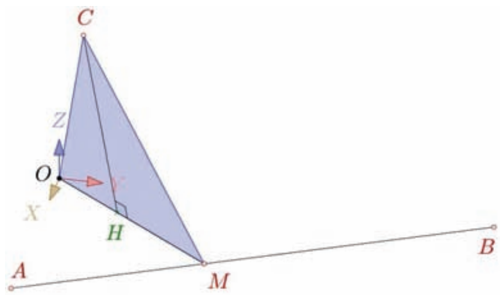
Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$ de l'espace, on considère les points $A(5\,;0\,;0)$, $B(0\,;10\,;0)$ et $C(2\,;1\,;5)$. On considère aussi un point M mobile appartenant au segment $[AB]$.
Le but de ce TP est de déterminer la valeur minimale de l'aire du triangle OMC ainsi que la ou les positions du point M rendant cette aire minimale.

A Étude expérimentale

Réaliser la figure à l'aide d'un logiciel de géométrique dynamique puis faire afficher l'aire du triangle OMC et conjecturer une réponse au problème posé.
Déterminer une équation paramétrique de la droite (AB) en utilisant le point A et un vecteur directeur le plus simple possible (on notera t le paramètre).

B Étude théorique

Notons H la projection orthogonale de C sur (OM).



1) Déterminer une équation paramétrique de la droite (AB) (on notera t le paramètre) puis en déduire les coordonnées de M en fonction de t.

2) **a)** Déterminer une équation paramétrique la plus simple possible de la droite (OM) (on notera s le paramètre).

b) En déduire que les coordonnées du point H sont :

$$H\left((5-t)s\,;2ts\,;0\right) \quad \text{où} \quad s=\frac{2}{t^2-2t+5}$$

3) On note $f : t \mapsto \mathscr{A}_{OMC}$.

a) Après avoir exprimé sucessivement la base OM et la hauteur CH du triangle OMC en fonction de t, déterminer une expression de $f(t)$.
On pourra s'aider d'un logiciel de calcul formel.

b) Établir le tableau de variation de f.

c) En déduire les coordonnées des points H et M minimisant l'aire du triangle OMC, ainsi que cette aire.

C Prolongement et questions ouvertes

1) **a)** Démontrer que la valeur de t rendant minimale l'aire de OMC est aussi la valeur de t rendant minimales chacune des distances CH et OM.

b) Cette situation est-elle toujours vraie ? Argumenter.

2) **a)** Dans le logiciel de géométrique dynamique, faire afficher le lieu de H lorsque M parcourt (AB). Quelle conjecture peut-on faire ?

b) La démontrer.

(d'après l'IREM de Lyon)

TP 2 Symétrie orthogonale par rapport à un plan

INFO

Dans l'espace, on appelle symétrie orthogonale par rapport au plan $(\mathscr{P})$ la transformation qui laisse invariant tout point de $(\mathscr{P})$ et qui à tout point M n'appartenant pas à $(\mathscr{P})$, associe le point M' tel que $(\mathscr{P})$ soit le plan médiateur du segment $[MM']$.

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, on considère un plan $(\mathscr{P})$ d'équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$ et un point $M(x_M\,;y_M\,;z_M)$.
On souhaite déterminer les coordonnées $(X\,;Y\,;Z)$ du point M', symétrique de M par rapport à $(\mathscr{P})$.

A Mise en équation et résolution

1) a) Que peut-on dire du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ et du plan $(\mathscr{P})$?

b) Traduire vectoriellement cette information.

2) On note H l'intersection de $(\mathscr{P})$ et (MM').
Donner une expression des coordonnées de H en fonction de celles de M et de M'.

3) a) En déduire que X, Y et Z sont solutions du système suivant, où k est une inconnue à préciser :

$$\begin{cases} X &= ka + x_M \\ Y &= kb + y_M \\ Z &= kc + z_M \\ a(X+x_M)+b(Y+y_M)+c(Z+z_M)+2d &= 0 \end{cases}$$

b) Résoudre ce système à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

B Expérimentation avec un logiciel

Soient $M(1\,;-1\,;3)$ un point de l'espace et $(\mathscr{P})$ le plan engendré par les points $A(2\,;-2\,;1)$, $B(-1\,;-2\,;3)$ et $C(1\,;1\,;1)$.

1) Déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathscr{P})$.

2) a) Avec un logiciel de géométrie dynamique, placer les points A, B C et visualiser $(\mathscr{P})$.

b) Placer M puis M' en lui donnant les coordonnées trouvées dans la partie 1.
Vérifier que la construction est cohérente.

TP 3 Plan tangent à une surface

INFO

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère la surface, notée $(\mathscr{S})$, d'équation $z = x^2 + y^2$. On souhaite déterminer l'équation cartésienne du plan $(\mathscr{T})$, tangent à $(\mathscr{S})$ au point $A(1;1;2)$.

1) Vérifier que A appartient bien à $(\mathscr{S})$.

2) On se place dans le plan $(\mathscr{P})$ d'équation $x = 1$.

a) Peut-on donner une équation de ce plan sous la forme $z = \dots$? Si non, donner une représentation paramétrique de ce plan.

b) On note $(\mathscr{C})$ la courbe intersection de $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{S})$. Démontrer qu'une équation de $(\mathscr{C})$ dans le plan $(\mathscr{P})$ est $z = 1 + y^2$.

c) Expliquer pourquoi, dans l'espace, $z = 1 + y^2$ n'est pas une équation de $(\mathscr{C})$. Déterminer une équation paramétrique de $(\mathscr{C})$.

d) Voici une capture d'écran du logiciel Maxima, permettant de représenter graphiquement $(\mathscr{S})$, $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{C})$:

```
(%i1) load(draw)$
      draw3d(color = blue,
               explicit(x^2+y^2, x,-3,3,y,-3,3),
             color = brown,
               parametric_surface(1,u,v, u,-3,3, v,-3,18),
             color = green,
               line_width = 5,
               parametric(1,t,1+t^2, t,-3,3)
      );
```

Recopier et expliquer chacune des intructions.

e) Démontrer que dans $(\mathscr{P})$, une équation de (d_x), tangente à $(\mathscr{C})$ au point A, est $z = 2y$.

f) Donner une représentation paramétrique de (d_x) et la représenter avec le logiciel.

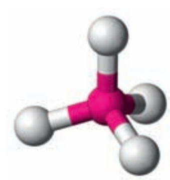
3) Reprendre le raisonnement précédant dans le plan $(\mathscr{Q})$ d'équation $y = 1$.
On notera (d_y) la tangente obtenue.

4) a) Démontrer que le point A et les deux droites (d_x) et (d_y) définissent bien un plan.

b) Donner une équation cartésienne de ce plan, sous la forme $z = \dots$

c) Représenter ce plan ainsi que $(\mathscr{S})$ et observer que ce plan est bien le plan $(\mathscr{T})$ recherché.

Récréation, énigmes



1) En chimie, certaines molécules présentent une géométrie tétraédrique.

a) Citer quelques molécules de ce type.

b) Quel est l'angle formé par l'atome central et deux atomes périphériques ?

2) La cristallographique est la science qui a pour objet l'étude des substances cristallines à l'échelle atomique.

a) Citer quelques exemples de cristaux et donner leur forme géométrique.

b) Quels sont les angles dièdres de ces polyèdres ?

3) Le ballon de football a pour modèle géométrique l'icosaèdre tronqué.
Quels sont les angles dièdres entre les deux types de faces ?

Probabilités conditionnelles et indépendance

Connaissances nécessaires à ce chapitre

- Représenter une expérience aléatoire par un arbre (pondéré ou non) ou un tableau
- Connaître le vocabulaire, les notations et les propriétés des probabilités
- Connaître les propriétés générales des variables aléatoires (définition, loi de probabilité, espérance et écart-type)
- Connaître les propriétés de la loi binomiale et savoir calculer des probabilités avec une calculatrice

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

Auto-évaluation

Dans la population française, 43 % est du groupe sanguin O, 45 % du groupe A, 9 % du groupe B et 3 % du groupe AB.
Par ailleurs :

- pour le groupe O, 86 % ont un rhésus positif ;
- pour le groupe A, 87 % ont un rhésus positif ;
- pour le groupe B, 78 % ont un rhésus positif ;
- pour le groupe AB, 67 % ont un rhésus positif.

1 On choisit une personne au hasard dans la population française et on considère :

- O l'évènement « la personne est du groupe O », et on définit de même les évènements A, B et AB ;
- $R+$ l'évènement « la personne a un rhésus positif » et on définit de même l'évènement $R-$.

1) Recopier et compléter :

	A	B	O	AB
$R+$	39,15 %			
$R-$				

2) Décrire l'évènement $AB \cup R-$ par une phrase et calculer sa probabilité.

3) Trois personnes indépendantes se présentent à un don du sang. On considère que le don est un succès si cette personne est du groupe O. Représenter ce schéma de Bernoulli par un arbre pondéré.

2 On extrait une personne au hasard dans la population française et on considère la variable aléatoire X donnant le rang de la 1re lettre de son groupe sanguin dans l'alphabet (exemple : $X = 2$ si c'est le groupe B).

1) Donner la loi de probabilité de X.

2) Calculer $P(X < 5)$.

3) Calculer l'espérance $E(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$ de X.

3 On prélève au hasard 100 personnes dans la population française et on considère la variable aléatoire Y donnant le nombre de personnes du groupe A.

1) Expliquer pourquoi l'on peut considérer que Y suit une loi binomiale et donner ses paramètres.

2) Calculer l'espérance $E(Y)$ et l'écart-type $\sigma(Y)$ de Y.

3) Calculer (arrondir à 10^{-3} près) :

a) $P(Y = 42)$ **c)** $P(Y \leqslant 55)$ **e)** $P(Y > 43)$
b) $P(Y = E(Y))$ **d)** $P(Y < 47)$ **f)** $P(Y \geqslant 40)$

Voir solutions p. 419

Activités d'approche

ACTIVITÉ 1 Des probabilités sous condition

Partie A : À la cantine du lycée

Dans un lycée, il y a 359 élèves en Seconde, 341 en Première et 354 en Terminale.

651 élèves mangent à la cantine du lycée, le tout selon la répartition suivante :

- 66 % des élèves de Seconde mangent à la cantine ;
- 39 % des élèves de Première mangent à l'extérieur.

On tire au sort un élève du lycée et on considère les évènement suivants :

- C : « l'élève tiré au sort mange à la cantine »
- PR : « l'élève tiré au sort est en Première »
- S : « l'élève tiré au sort est en Seconde »
- T : « l'élève tiré au sort est en Terminale »

Dans la suite, les probabilités seront données sous forme de fractions.

1) Recopier et compléter le tableau ci-dessous (arrondir à l'entier le plus proche) :

	Cantine	Extérieur	Total
Seconde			
Première			
Terminale			
Total			1 054

2) **a)** Calculer $P(S)$ et $P(C \cap S)$.

b) On considère la « définition » suivante :

> A et B étant deux évènements donnés (avec $P(B) \neq 0$), on note $P_B(A)$ la probabilité de A sachant B c'est-à-dire la probabilité que A soit réalisé sachant que B est réalisé. On dit que $P_B(A)$ est une probabilité conditionnelle.

Décrire $P_S(C)$ par une phrase puis la calculer.

c) Quel est l'univers associé à P_S, c'est-à-dire dans quel ensemble tire-t-on au sort quand on considère une probabilité sachant S ?

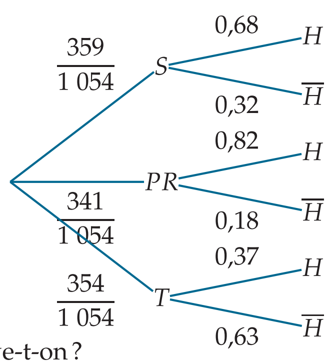
d) Déterminer un lien entre $P(S)$ et $P(C \cap S)$ et $P_S(C)$.

e) D'une manière générale, quel lien peut-on alors conjecturer entre $P(B)$, $P(A \cap B)$ et $P_B(A)$?

3) Tester la conjecture précédente avec $P_C(T)$ et $P_{\overline{C}}(PR)$.

Partie B : Avec un arbre pondéré

Après une enquête menée sur les élèves de ce lycée (qu'ils aillent à la cantine ou non), on a dressé l'arbre pondéré ci-contre où H désigne l'évènement « l'élève aime les haricots ».



1) Certaines des pondérations présentes sur cet arbre sont des probabilités conditionnelles.
Dire lesquelles et les exprimer avec la notation vue à la question **2b** de la partie A.

2) **a)** En admettant la formule conjecturée à la question **2e** de la partie A, exprimer $P_T(H)$ en fonction de $P(T)$ et $P(H \cap T)$.

b) En déduire $P(H \cap T)$ en fonction de $P_T(H)$ et $P(T)$ puis calculer $P(H \cap T)$.

c) Quelle règle bien connue sur les arbres pondérés retrouve-t-on ?

ACTIVITÉ 2 Des probabilités totales !

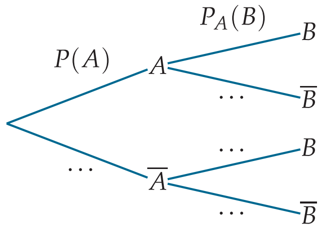
1) • Quand il y a des nuages, Sabal prend un parapluie avec une probabilité 0,9.
• Quand il n'y a pas de nuage, Sabal prend un parapluie avec une probabilité 0,15.
• Hier soir, la météo annonçait des nuages avec une probabilité 0,95.

Avant d'ouvrir les volets de sa chambre, Amita voit son frère Sabal partir à l'école sans parapluie et se dit « Il y a quand même plus d'une chance sur deux qu'il y ait des nuages dans le ciel ». Que peut-on en penser ?

2) D'une manière plus générale, on considère maintenant deux évènements A et B de probabilités non nulles.

a) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre.

b) En déduire $P_B(A)$ en fonction de $P(A)$, $P\left(\overline{A}\right)$, $P_A(B)$ et $P_{\overline{A}}(B)$.



ACTIVITÉ 3 Ça dépend un peu... Beaucoup...

Partie A : Questions de Science

Pour un sondage portant sur 100 personnes, on a posé deux questions :

- Savez-vous ce qu'est une réaction d'oxydo-réduction ?
- Savez-vous ce qu'est la loi binomiale ?

	O	$\overline{O}$
B	33	5
$\overline{B}$	4	58

Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessus où O est l'évènement « la personne sait ce qu'est une réaction d'oxydo-réduction » et B : « la personne sait ce qu'est la loi binomiale ».

1) Peut-on penser que la réalisation de l'événement O influe sur la probabilité de l'événement B ? En donner une raison possible.

2) a) Que peut-on alors dire de $P_O(B)$ et $P(B)$?

b) Vérifier que $P(O \cap B) \neq P(O) \times P(B)$.

On dit que O et B ne sont pas indépendants.

> D'une manière générale, deux événements A et B sont indépendants si, et seulement si, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Partie B : Question d'Art

Pour un sondage portant sur 200 personnes, on a posé la question « Préférez-vous la musique, le cinéma ou le théâtre ? ».

On a par ailleurs classé les résultats suivant que la personne portait des lunettes ou non dans le tableau ci-contre où M est l'évènement « la personne préfère la musique », C : « la personne préfère le cinéma », T : « la personne préfère le théâtre » et L : « la personne porte des lunettes ».

	M	C	T
L	87	16	25
$\overline{L}$	54	9	9

1) Peut-on penser que les évènements M et L sont indépendants ?
Vérifier par le calcul, avec la définition de l'indépendance vue dans la partie **A** .

2) Même question pour les évènements C et L.

3) En quoi les résultats des deux questions précédentes peuvent-ils paraître étonnants ?

4) a) Calculer p_1 la proportion de porteurs de lunettes, p_2 la proportion de porteurs de lunettes parmi ceux qui préfèrent la musique et p_3 la proportion de porteurs de lunettes parmi ceux qui préfèrent le cinéma.

b) Qu'observe-t-on ? Interpréter.

Dans tout ce chapitre, Ω désigne un univers, A et B deux évènements de Ω et P une probabilité sur Ω.

1. Probabilités conditionnelles et arbres pondérés

A. Probabilités conditionnelles

DÉFINITION

Si $P(A) \neq 0$, **la probabilité de** B **sachant** A, notée $P_A(B)$, est définie par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Remarque : Si $P(B) \neq 0$, on a de manière symétrique :

$$P_B(A) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Exemple Dans un lycée, on demande aux élèves et aux professeurs s'ils préfèrent avoir cours le matin ou l'après-midi.

On obtient les résultats donnés dans le tableau ci-dessous :

	Matin	Après-midi	Total
Élèves	657	438	1 095
Professeurs	84	21	105
Total	741	459	1 200

On choisit une personne au hasard (parmi élèves et professeurs) et on note :

- E l'évènement : « La personne tirée au sort est un élève » ;
- M l'évènement : « La personne tirée au sort préfère avoir cours le matin ».

1) Calculer $P(E)$ et $P(E \cap M)$.
2) En déduire $P_E(M)$ avec la formule de la définition précédente.
3) Retrouver ce résultat sans utiliser la formule du cours.

Correction

1) On est dans une situation d'équiprobabilité donc :
   - $P(E) = \dfrac{1\,095}{1\,200} = 0{,}912\,5$;
   - $P(E \cap M) = \dfrac{657}{1\,200} = 0{,}547\,5$.
2) On en déduit que $P_E(M) = \dfrac{P(E \cap M)}{P(E)} = \dfrac{0{,}547\,5}{0{,}912\,5} = 0{,}6$.
3) $P_E(M)$ est « la probabilité que la personne tirée au sort préfère avoir cours le matin sachant que c'est un élève », cette probabilité peut donc être obtenue en calculant $\dfrac{657}{1\,095} = 0{,}6$.

B. Application aux arbres pondérés

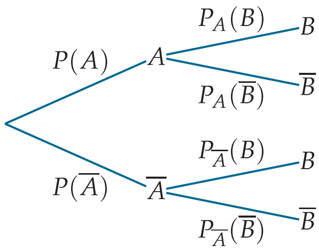
PROPRIÉTÉ

Les principales règles de construction des **arbres pondérés** (ou **arbres probabilistes**) sont :

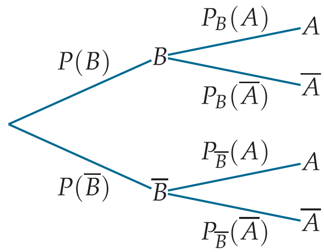
- la somme des probabilités des évènements (disjoints) correspondant aux branches partant d'un même nœud est 1 ;
- les probabilités présentes sur les 2e, 3e, etc. branches d'un chemin sont des probabilités conditionnelles.

Remarques :

- Dans le cas de deux évènements A et B de probabilités non nulles, on a :

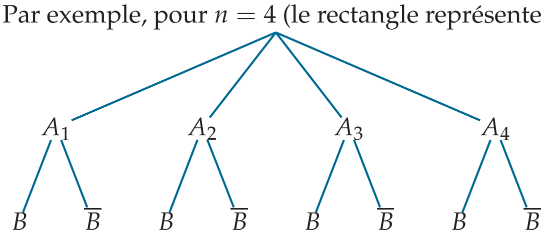


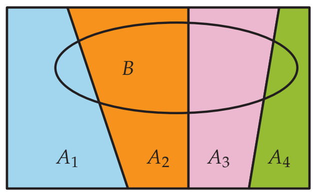
ou



  C'est le contexte qui induira de représenter la situation par un arbre ou l'autre.
- Le premier point illustre le fait que les évènements A_1, A_2, …et A_n correspondant aux branches partant du premier nœud sont des évènements disjoints, de probabilités non nulles et tels que $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$.
  On dit alors que A_1, A_2, …et A_n forment une **partition de l'univers** Ω.

  Par exemple, pour $n = 4$ (le rectangle représente l'univers) :





PROPRIÉTÉ

Si $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$, alors $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$.

Cette formule permet de justifier l'une des règles d'utilisation des arbres pondérés :
la probabilité de l'évènement correspondant à un chemin de l'arbre est le produit des probabilités inscrites sur les branches de ce chemin.

MÉTHODE 1 Représenter une situation à l'aide d'un arbre pondéré

► Ex. 6 p. 338

Exercice d'application

Sur l'étal d'un maraîcher, il y a 3/4 de légumes rouges et le reste de légumes verts.

- Parmi les légumes rouges 30 % sont des poivrons et 70 % sont des tomates.
- Parmi les légumes verts 80 % sont des poivrons et 20 % sont des tomates.

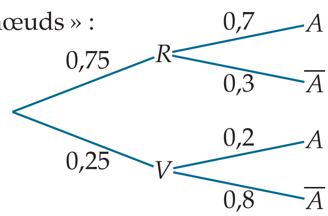
On choisit un légume au hasard sur l'étal et on considère les évènements :

- A : « le légume choisi est une tomAte » ;
- R : « le légume choisi est Rouge » ;
- V : « le légume choisi est Vert ».

1) Représenter la situation par un arbre.
2) Calculer $P(R \cap A)$.

Correction

1) Pour le premier nœud, les deux possibilités sont R : « le légume choisi est rouge » et son évènement contraire $\overline{R} = V$: « le légume choisi est vert ».
   Il reste ensuite à distinguer tomates et poivrons pour les « deuxièmes nœuds » :



   Comme l'évènement « le légume choisi est un poivron » n'est pas nommé par une lettre, on a utilisé $\overline{A}$ pour le représenter dans l'arbre mais on aurait aussi pu introduire une nouvelle notation.
2) $P(R \cap A) = P(R) \times P_R(A) = 0{,}75 \times 0{,}7 = 0{,}525$.

C. Formule des probabilités totales

PROPRIÉTÉ : Formule des probabilités totales

- Si $P(A) \neq 0$ et $P(A) \neq 1$ alors $P(B) = P(A \cap B) + P\left(\overline{A} \cap B\right)$
$= P(A) \times P_A(B) + P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}(B)$.
- D'une manière plus générale, si A_1, A_2, …et A_n forment une partition de Ω, c'est-à-dire sont n évènements disjoints, de probabilités non nulles et tels que $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$ alors

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \ldots + P(A_n \cap B) \\ &= P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \ldots + P(A_n) \times P_{A_n}(B). \end{aligned}$$

PREUVE Pour le 1er point :
Les évènements $A \cap B$ et $\overline{A} \cap B$ sont disjoints et $B = (A \cap B) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)$ donc $P(B) = P(A \cap B) + P\left(\overline{A} \cap B\right)$: on en déduit que $P(B) = P(A) \times P_A(B) + P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}(B)$ de la propriété précédente.

PROPRIÉTÉ

La formule des probabilités totales permet de justifier une autre règle d'utilisation des arbres pondérés :
la probabilité d'un évènement est la somme des probabilités associées aux chemins qui permettent de réaliser cet évènement.

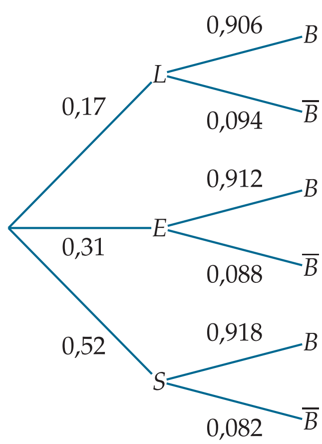
MÉTHODE 2 Utiliser la formule des probabilités totales

► Ex. 21 p. 340

Exercice d'application En 2015, la répartition des élèves ayant passé le baccalauréat général en France métropolitaine et dans les DOM est : 17 % d'élèves de la filière L, 31 % d'élèves de la filière ES et 52 % d'élèves de la filière S.
Par ailleurs, les taux de réussite dans ces filières sont 90,6 % en L, 91,2 % en ES et 91,8 % en S.

On tire au hasard un élève ayant passé le bac général en 2015.
1) Dresser un arbre pondéré représentant la situation.
2) Quelle est la probabilité que la personne tirée au hasard ait obtenu le bac ?
3) Déterminer $P_{\overline{B}}(S)$.

Correction



1) On obtient l'arbre ci-contre où :
- L est l'évènement : « la personne a passé le bac L » ;
- E est l'évènement : « la personne a passé le bac ES » ;
- S est l'évènement : « la personne a passé le bac S » ;
- B est l'évènement : « la personne a obtenu le bac ».

2) La formule des probabilités totales donne

$$\begin{aligned} P(B) &= P(L) \times P_L(B) + P(E) \times P_E(B) + P(S) \times P_S(B) \\ &= 0{,}17 \times 0{,}906 + 0{,}31 \times 0{,}912 + 0{,}52 \times 0{,}918 \\ &= 0{,}914\,1. \end{aligned}$$

3) On sait que $P_{\overline{B}}(S) = \dfrac{P\left(\overline{B} \cap S\right)}{P\left(\overline{B}\right)}$ or :
- $P\left(\overline{B} \cap S\right) = P(S) \times P_S\left(\overline{B}\right) = 0{,}52 \times 0{,}082 = 0{,}042\,64$;
- $P\left(\overline{B}\right) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}914\,1 = 0{,}085\,9$.

On en déduit donc que $P_{\overline{B}}(S) = \dfrac{0{,}042\,64}{0{,}085\,9} \approx 0,496$.

2. Indépendance de deux évènements

DÉFINITION

On dit que A et B sont **indépendants** si, et seulement si, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

REMARQUE : Attention à ne pas confondre indépendant et incompatible (qui est synonyme de disjoint c'est-à-dire que $A \cap B = \emptyset$ et non pas $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$).

Exemple Dans la population, il y a 71 % de porteurs de lunettes parmi lesquels 37 % ont 55 ans ou plus. Dans la population, il y a 63 % de personnes de moins de 55 ans.
On tire au sort une personne dans la population et on considère les deux évènements :

- A : « la personne a 55 ans ou plus » ;
- L : « la personne porte des lunettes ».

Les évènements A et L sont-ils indépendants ?

Correction D'après l'énoncé, $P(L) = 0{,}71$; $P(A) = 1 - 0{,}63 = 0{,}37$ et $P_L(A) = 0{,}37$ donc $P(A) \times P(L) = 0{,}37 \times 0{,}71 = 0{,}262\,7$ et $P(A \cap L) = P(L) \times P_L(A) = 0{,}71 \times 0{,}37 = 0{,}262\,7$.
Comme $P(A) \times P(L) = P(A \cap L)$, on en déduit que A et L sont indépendants.

PROPRIÉTÉ

Si $P(A) \neq 0$ (ou $P(B) \neq 0$) alors A et B sont indépendants si, et seulement si, $P_A(B) = P(B)$ (ou $P_B(A) = P(A)$).

PREUVE Pour A tel que $P(A) \neq 0$, A et B sont indépendants si, et seulement si :
$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \Leftrightarrow P(A) \times P_A(B) = P(A) \times P(B) \Leftrightarrow P_A(B) = P(B)$ car $P(A) \neq 0$.

REMARQUES :

- $P_A(B) = P(B)$ traduit le fait que savoir que A est réalisé ne modifie pas la probabilité de B, autrement dit, que la réalisation de A n'a pas d'influence sur la réalisation de B.
- Dans l'exemple précédent, on aurait pu conclure directement puisque $P(A) = P_L(A)$.

PROPRIÉTÉ : ROC

Si A et B sont deux évènements indépendants alors $\overline{A}$ et B sont également indépendants.

PREUVE Pour A et B indépendants, il s'agit de montrer que $P\left(\overline{A} \cap B\right) = P\left(\overline{A}\right) \times P(B)$.

Notons préalablement que $P(B) = P\left(\overline{A} \cap B\right) + P(A \cap B)$ d'après la formule des probabilités totales donc $P\left(\overline{A} \cap B\right) = P(B) - P(A \cap B)$.

Comme A et B sont indépendants, on a $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ donc, d'après ce qui précède, $P\left(\overline{A} \cap B\right) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A) \times P(B) = (1 - P(A)) \times P(B) = P\left(\overline{A}\right) \times P(B)$: $\overline{A}$ et B sont bien indépendants.

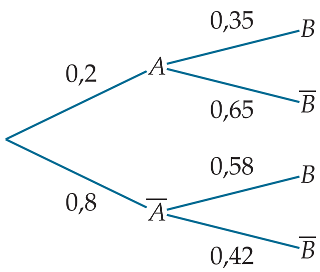
Exemple Dans l'exemple précédent, les événements A : « la personne a 55 ans ou plus » et $\overline{L}$: « la personne ne porte pas de lunettes » sont donc également indépendants.

REMARQUES :

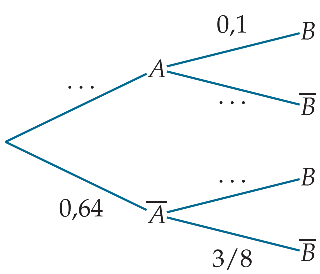
- Plus généralement, si A et B sont indépendants alors $\overline{A}$ et B sont indépendants, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants et A et $\overline{B}$ sont indépendants.
- Quand on considère un schéma de Bernoulli, on a des tirages indépendants.
  Cela veut dire que le fait qu'un tirage soit réussi ou non n'a pas d'influence sur le fait que le suivant soit réussi ou non : c'est pour cela que les probabilités (conditionnelles) de réussite ou d'échec sur toutes les branches sont les mêmes.

Activités mentales

1 Dans l'arbre ci-dessous, exprimer chacune des pondérations comme une probabilité (par exemple $0{,}65 = P_A(\overline{B})$).



2 Calculer les pondérations manquantes dans l'arbre ci-dessous puis en déduire $P(B)$.



3 Dans un immeuble, on donne la répartition des appartements suivant :

- que ce soit un studio ou non ;
- qu'il soit occupé par une seule personne ou bien par plusieurs personnes.

	Studio	Pas studio	Total
Seule	8		15
Plusieurs	2		7
Total	10	12	22

1) Déterminer les valeurs manquantes dans le tableau.

2) Quand on choisit un appartement au hasard dans l'immeuble, on appelle S l'évènement « l'appartement est un studio » et PL l'évènement « l'appartement est occupé par plusieurs personnes ».

a) Calculer $P(S)$, $P_{\overline{S}}(PL)$ et $P_{PL}(S)$.

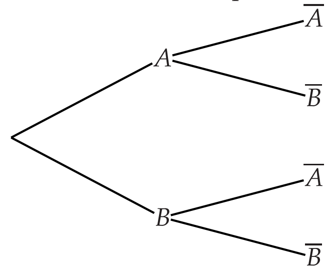
b) Les évènements S et PL sont-ils indépendants ?

4 On considère deux évènements A et B tels que $P(A) = \frac{3}{5}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$.
Déterminer $P(B)$ de sorte que A et B soient indépendants.

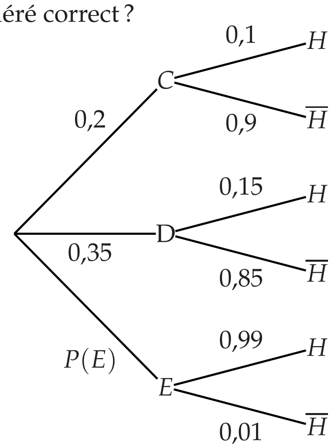
Probabilités conditionnelles

5 Dans cet exercice, A, B, C, D, E et H désignent des évènements quelconques d'un univers Ω.

1) Trouver l'erreur dans l'arbre de probabilité suivant :



2) Quelle(s) condition(s) doivent vérifier les évènements C, D et E pour que l'arbre ci-dessous soit un arbre pondéré correct ?



6 ► **MÉTHODE 1** p. 335

1) On considère deux évènements R et S tels que $P(R) = \frac{1}{4}$, $P_R(S) = \frac{5}{6}$ et $P_{\overline{R}}(\overline{S}) = \frac{11}{12}$.
Construire un arbre pondéré avec ces évènements R et S.

2) Tao ne sait pas s'il lui reste de quoi préparer à manger dans son réfrigérateur.
Il estime la probabilité que ce soit le cas à 0,8.

- Dans ce cas (s'il a de quoi préparer à manger), il estime que la probabilité que le repas qu'il se préparera soit bon est de 0,65.
- Sinon, il ira dans son restaurant favori dans lequel il estime que la probabilité que le repas servi soit bon est de 0,99.

Construire un arbre pondéré représentant la situation après avoir explicité les notations des évènements apparaissant dans cet arbre.

7 On considère deux évènements A et B tels que $P(A) = 0{,}1$ et $P(A \cap B) = 0{,}06$. Calculer $P_A(B)$.

8 On considère deux évènements C et D tels que $P(D) = 0{,}6$ et $P(C \cap \overline{D}) = 0{,}35$. Calculer $P_{\overline{D}}(C)$.

9 On considère deux évènements disjoints E et F de probabilités non nulles. Calculer $P_E(F)$.

10 On considère deux évènements A et B tels que $P(A) = 0{,}37$, $P(B) = 0{,}68$ et $P(A \cup B) = 0{,}84$. Calculer :

1) $P_A(B)$ **2)** $P_B(A)$

11 On considère deux évènements A et B tels que $P(A) = 0{,}63$ et $P_A(B) = 0{,}06$. Calculer :

1) $P(A \cap B)$ **2)** $P\left(A \cap \overline{B}\right)$

12 On considère deux évènements E et F tels que $P(E) = \dfrac{1}{3}$ et $P_{\overline{E}}(F) = \dfrac{7}{12}$. Calculer :

1) $P\left(\overline{E} \cap F\right)$ **2)** $P\left(\overline{E} \cap \overline{F}\right)$

13 **Avec des phrases**

1) Dans une bibliothèque, les statistiques montrent que :
- 55 % des adhérents sont des garçons ;
- 20 % des adhérents sont des garçons ayant emprunté plus de 50 livres.

Quand on rencontre un garçon sortant de la bibliothèque, quelle est la probabilité qu'il ait emprunté plus de 50 livres ?

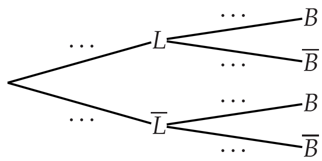
2) Quand on joue à un jeu de grattage, la probabilité d'obtenir « 3 télés » est de 0,000 001.
Si c'est le cas, on est invité à la télévision pour faire tourner une roue comportant 100 sections équiprobables dont 5 offrent un gain de 1 000 000 €.
Quelle est la probabilité de gagner 1 000 000 € à ce jeu ?

3) « Je suis sûr à 95 % de manquer le bus, auquel cas je serai en retard. Et même si je l'ai, il y aura une chance sur trois que je sois quand même en retard ».
Quelle est la probabilité que cette personne soit à l'heure ?

4) Dans le lecteur MP3 d'Anita, 17 % des titres sont du rock français. Plus généralement, 61 % des titres du lecteur sont des titres français.
On met le lecteur en mode aléatoire et le premier titre est français. Quelle est la probabilité que ce soit du rock ?

14 Après les contrôles de mathématiques, 60 % du temps, Issa dit « Je suis sûr que j'ai loupé ».
Ses amis sont pourtant formels : « Quand il dit ça, il a quand même 15 ou plus les 3/4 du temps. Et quand il ne dit rien, on peut être sûr à 95 % qu'il va avoir 15 ou plus. »
Après un devoir de mathématiques, on considère les évènements :
- L : « Issa dit qu'il a manqué le devoir » ;
- B : « Issa a 15 ou plus au devoir ».

1) Recopier et compléter l'arbre ci-dessous :



2) Calculer $P(L \cap B)$ et interpréter cette probabilité dans les termes de l'énoncé.

3) Calculer la probabilité qu'il ne dise rien et qu'il ait moins de 15.

15 Dans une playlist, Naïm a mis 10 albums et réglé le lecteur en sélection aléatoire.
Le logiciel de sélection aléatoire choisit d'abord un album puis choisit une chanson dans cet album.
Quelle est la probabilité que la 1re chanson jouée soit la préférée de Naïm, qui se trouve dans un album de 12 titres ? On représentera la situation par un arbre.

16 On considère deux évènements A et B et le tableau de probabilités ci-dessous :

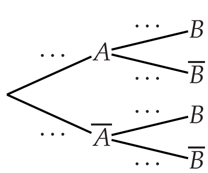
	A	$\overline{A}$	Total
B	0,44		
$\overline{B}$		0,13	0,32
Total			1

1) Recopier et compléter ce tableau.

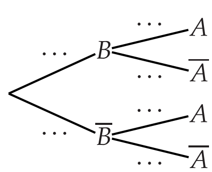
2) Lire $P(A)$, $P\left(\overline{B}\right)$, $P(A \cap B)$ et $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$.

3) Calculer $P_A(B)$, $P_A\left(\overline{B}\right)$, $P_{\overline{A}}(B)$ et $P_{\overline{A}}(\overline{B})$. On mettra les résultats sous forme de fractions irréductibles.

4) Recopier et compléter l'arbre ci-dessous :



5) De même, recopier et compléter :



17 **Trois à la suite** ROC

A-t-on $P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P_A(B) \times P_B(C)$?
Si oui, le démontrer, si non, modifier la formule pour en obtenir une correcte.

Dans les exercices **18** à **20**, on pourra éventuellement s'appuyer sur des arbres correctement construits.

18 On considère deux évènements A et B tels que $P(A) = 0{,}8$ et $P(A \cap B) = 0{,}48$.

1) Montrer que $P\left(A \cap \overline{B}\right) = 0{,}32$.

2) Calculer $P_A\left(\overline{B}\right)$.

19 On considère deux évènements E et F tels que $P(E) = 0{,}4$ et $P\left(\overline{E} \cap \overline{F}\right) = 0{,}12$. Calculer $P_{\overline{E}}(F)$.

20 On considère deux évènements A et B tels que $P(A) = 0{,}45$; $P(B) = 0{,}6$ et $P(A \cup B) = 0{,}71$. Calculer :

1) $P_A(B)$ **2)** $P_A\left(\overline{B}\right)$ **3)** $P_{\overline{B}}(A)$ **4)** $P_{\overline{B}}\left(\overline{A}\right)$

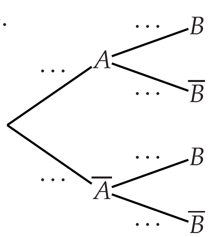
21 **D'après Bac** ► MÉTHODE 2 p. 336

Sophie a mis des dragées dans une boîte, les unes contiennent une amande, les autres non :

- 30 % des dragées contiennent une amande ;
- 40 % des dragées avec amande sont bleues, les autres sont roses ;
- 75 % des dragées sans amande sont bleues, les autres sont roses.

Sophie choisit au hasard une dragée dans la boîte et on considère les évènements :

- A : « la dragée choisie contient une amande » ;
- B : « la dragée choisie est bleue ».



1) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre.

2) Montrer que $P(A \cap B) = 0{,}12$.

3) Calculer $P(B)$.

4) En déduire $P_B(A)$.

5) Calculer $P_{\overline{B}}(A)$.

6) Sophie préfère les dragées contenant une amande. Doit-elle plutôt choisir une dragée bleue ou bien une dragée rose ?

22 **Améliorer la qualité**

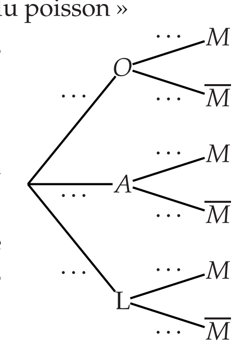
Ordralfabétix est poissonnier et 15 % du poisson qu'il vend a été pêché par ses soins, 30 % vient d'un grossiste armoricain et le reste d'un grossiste de Lutèce.

Il a remarqué que 5 % de ses clients sont mécontents du poisson qu'il a lui-même pêché, 10 % du poisson provenant du grossiste armoricain et 90 % du poisson de Lutèce.

Un client achète un poisson à Ordralfabétix.

On considère les évènements suivants :

- O : « Le poisson a été pêché par Ordralfabétix »
- A : « Le poisson provient du grossiste armoricain »
- L : « Le poisson provient du grossiste de Lutèce »
- M : « Le client est mécontent du poisson »



1) Recopier et compléter l'arbre probabiliste ci-contre.

2) **a)** Calculer $P(M)$.

b) Un client est mécontent du poisson acheté.
Quelle est la probabilité que ce poisson ait été pêché par Ordralfabétix ?

3) Ordralfabétix souhaite ramener le taux de mécontentement à 30 % en continuant à pêcher 15 % de sa production. Déterminer les proportions de poisson qu'il doit commander à chaque grossiste pour atteindre son objectif.

23 **Épidémiologie**

Dans un pays, une épidémie touche 10 % de la population. Un test de dépistage de la maladie a été mis au point mais il n'est pas parfait :

- si un individu n'est pas touché par la maladie, le test est tout de même positif dans 1 % des cas ;
- si un individu est touché par la maladie, le test est tout de même négatif dans 0,1 % des cas.

1) Représenter la situation par un arbre pondéré.

2) Toute la population passe le test de dépistage et on décide de donner un traitement à tous les individus ayant un test positif.

a) Montrer que le traitement est donné à 10,89 % de la population.

b) À quel pourcentage de la population le traitement est-il donné à tort ?

3) On tire un échantillon de 100 individus dans la population, ce tirage étant assimilable à un tirage avec remise.

a) Quelle est la probabilité que 10 individus exactement soient sous traitement ?

b) Quelle est la probabilité que 5 individus ou moins soient sous traitement ?

24 Sur une chaîne de production d'un composant électronique, on effectue des tests qualité :

- Un premier examen visuel est effectué éliminant 5 % des composants, qui sont détruits.
- Les composants restants passent un test de fiabilité qui est réussi par 90 % des composants qui sont alors mis en vente.
- Parmi les composants n'ayant pas réussi le test de fiabilité, 30 % peuvent être réparés facilement et mis en vente, le reste est détruit.

On prélève un composant au hasard sur cette chaîne.

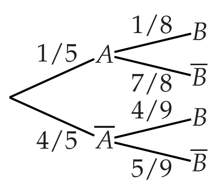
1) Représenter la situation par un arbre de probabilité. On notera E l'événement « le composant réussit l'examen visuel », F « le composant réussit le test de fiabilité » et V « le composant est mis en vente ».
2) Calculer $P\left(\overline{F} \cap V\right)$, $P(V)$ et $P_V\left(\overline{F}\right)$.
3) Un composant :
   - coûte 0,05 € s'il est détruit ;
   - rapporte 0,5 € s'il est mis en vente sans réparation et 0,25 € s'il est mis en vente après réparation.

   a) Donner la loi de probabilité de X, la variable aléatoire donnant la somme algébrique rapportée par un composant produit et éventuellement vendu.

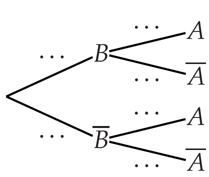
   b) Combien d'argent peut-on « espérer » gagner par composant ?

25 Compléter l'arbre 2 en utilisant l'arbre 1 :

Arbre 1



Arbre 2



26 Chez Edmond, la vaisselle se joue toujours aux jeux vidéo de la façon suivante : on lance une pièce et :

- si c'est pile, il affronte sa mère à un jeu de combat où il n'a que 30 % de chance de gagner ;
- si c'est face, il affronte son père à un jeu de puzzle (avec des briques) où il a 40 % de chance de perdre.

S'il perd sa partie, il fait la vaisselle, sinon, ses parents s'affrontent sur un jeu de stratégie où ils sont aussi bons l'un que l'autre pour savoir qui fera la vaisselle.

Ce soir, c'est le père d'Edmond qui est de vaisselle. Quelle est la probabilité que le premier duel ait eu lieu sur le jeu de puzzle ?

27 Obstétrique–Question ouverte

D'après l'« Enquête nationale prénatale » de 2010 réalisée par l'Inserm, la probabilité d'une grossesse donnant lieu à une naissance prématurée en France est de 6,6 % mais est accentuée par le fait que la grossesse soit multiple (jumeaux, triplés, etc) ou non.

Plus précisément, cette probabilité est de 41,7 % en cas de grossesse multiple contre 5,5 % sinon.

Déterminer la probabilité d'une grossesse multiple.

28 Miao veut organiser une tombola : elle prévoit de vendre des tickets dont 20 % sont gagnants et 80 % sont perdants.

Pour chaque gagnant, elle organisera ensuite un tirage au sort tel qu'il y ait :

- 80 % de chance d'obtenir un lot de 1 € ;
- x % de chance d'obtenir un lot de 2 € ;
- $20 - x$ % de chance d'obtenir un lot de 100 €.

1) À combien Miao doit-elle fixer la probabilité d'obtention du deuxième lot pour qu'elle puisse espérer ne dépenser que 1,71 € par ticket en achats de lots.
2) Proposer une expérience aléatoire permettant de faire ce tirage au sort.

29 Génétique

Le daltonisme est une maladie génétique à transmission récessive liée au chromosome X c'est-à-dire que l'allèle responsable est récessif, pour un gène présent sur le chromosome X.

- Pour une femme, on distinguera le fait d'être malade (présence de l'allèle responsable sur les deux chromosomes X), porteuse de la maladie (présence de l'allèle responsable sur un seul chromosome X) et saine (absence totale de l'allèle responsable).
- Pour un homme, la présence de l'allèle sur l'unique chromosome X assure qu'il est malade.

Béatrice a un père daltonien mais elle-même n'est pas malade.

Sachant que 8 % des hommes sont daltoniens, quelle est la probabilité que Béatrice ait un enfant daltonien ?

On admettra que le daltonisme ou non d'une personne n'influence pas préférentiellement le don d'un chromosome X ou Y.

Suites et probabilités

30 **D'après Bac (Pondichéry - 2013)** ALGO

Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

- Un salarié malade est absent.
- La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.
- Si la semaine n le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à 0,04.
- Si la semaine n le salarié est malade, il reste malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à 0,24.

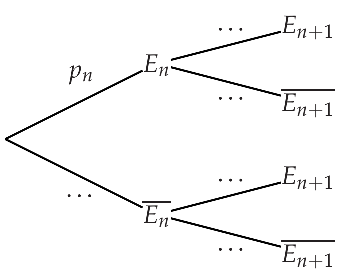
On désigne, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par E_n l'évènement « le salarié est absent pour cause de maladie la n^e semaine ». On note p_n la probabilité de l'évènement E_n.

On a ainsi : $p_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $0 \leqslant p_n < 1$.

1) a) Déterminer la valeur de p_3 à l'aide d'un arbre de probabilité.

b) Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.

2) a) Recopier sur la copie et compléter l'arbre de probabilité donné ci-dessous



b) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $p_{n+1} = 0{,}2p_n + 0{,}04$.

c) Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 par $u_n = p_n - 0{,}05$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison r.

En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n et r.

d) En déduire la limite de la suite (p_n).

e) On admet dans cette question que la suite (p_n) est croissante. On considère l'algorithme suivant :

```
Variables
     K et J sont des entiers naturels
     P est un nombre réel
Initialisation
     P prend la valeur 0
     J prend la valeur 1
Entrée
     Saisir la valeur de K
Traitement
     Tant que P<0,05-10^-K
       P prend la valeur 0,2*P+0,04
       J prend la valeur J+1
     Fin Tant que
Sortie
     Afficher J
```

À quoi correspond l'affichage final J ?

Pourquoi est-on sûr que cet algorithme s'arrête ?

31 Chaque jour Bill doit décider s'il achète du pain ou non.

- S'il a acheté du pain un jour, la probabilité qu'il en achète le lendemain est 0,3 (parce qu'il lui en reste parfois du jour précédent ou qu'il n'en a simplement pas envie ce jour-là).
- S'il n'a pas acheté de pain un jour, la probabilité qu'il en achète le lendemain est 0,8.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle A_n l'évènement « Bill achète du pain le n^e jour » et on note $p_n = P(A_n)$.

Aujourd'hui (le 1er jour), Bill a acheté du pain, ainsi $p_1 = 1$.

1) Calculer p_2 et p_3.

2) Représenter la situation par un arbre sur lequel figurent les évènements A_n, $\overline{A_n}$, A_{n+1} et $\overline{A_{n+1}}$.

3) Montrer que $p_{n+1} = 0{,}8 - 0{,}5p_n$.

4) Montrer que $p_n = \dfrac{7}{15}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} + \dfrac{8}{15}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

5) a) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.

b) Interpréter concrètement le résultat de la question précédente.

Évènements indépendants

32 On considère deux évènements indépendants A et B tels que $P(A) = 0{,}15$ et $P(A \cap B) = 0{,}085$.
Calculer $P(B)$.

33 On considère deux évènements indépendants E et F tels que $P\left(\overline{F}\right) = 0{,}53$ et $P(E \cap F) = 0{,}25$.
Calculer $P(E)$.

34 On considère deux évènements indépendants C et D tels que $P(C \cup D) = 0{,}23$ et $P(C) = 0{,}11$.
Calculer $P(D)$.

35 **Indépendants et incompatibles ?** ROC

Deux évènements disjoints de probabilités non nulles peuvent-ils être indépendants ?

36 **Couleurs aléatoires** ALGO

On considère l'algorithme suivant où la commande `entalea(n;p)` donne un entier aléatoire entre n et p :

```
Variables
    a et b entiers
Traitement et affichage
    Donner à a la valeur entalea(1;3)
    Si a=1 Alors
      Donner à b la valeur entalea(1;3)
      Si b=1 Alors afficher "rouge"
      Sinon afficher "orange"
      Fin si
    Finsi
    Si a=2 Alors
      Donner à b la valeur entalea(1;4)
      Si b=1 Alors afficher "rouge"
      Sinon afficher "orange"
      Fin si
    Finsi
    Si a=3 Alors
      Donner à b la valeur entalea(1;24)
      Si b<=7 Alors afficher "rouge"
      Sinon afficher "orange"
      Fin si
    Finsi
```

Les évènements suivants sont-ils indépendants ?

1) « a= 3 » et « l'algorithme affiche rouge ».
2) « a= 3 » et « l'algorithme affiche orange ».
3) « a= 1 » et « l'algorithme affiche rouge ».

37 Dans un magasin de meubles, il y a 55 % de canapés dont 14 % en cuir, 30 % de fauteuils dont 20 % en cuir et le reste est constitué de poufs dont 42 % en cuir.
Un client se présente et choisit un meuble.
On considère les évènements :

- F : « le meuble choisi est un fauteuil » ;
- C : « le meuble choisi est en cuir ».

Montrer que ces deux évènements sont indépendants.

38 Lily a dans sa poche deux pièces de 20 centimes, trois de 50 centimes et une de 1 euro.
Elle tire successivement (sans remise) deux pièces de sa poche. Les évènements « les deux pièces sont du même montant » et « les deux pièces lui permettent d'acheter un croissant à 1 euro » sont-ils indépendants ?

39 Aujourd'hui Nat' a décidé d'aller donner son sang. Ben hésite alors : « Je vais peut-être en profiter pour aller faire du vélo le long des bords de Seine ».
On considère que la probabilité qu'il aille faire du vélo est 0,85.

Nat' ayant un petit volume sanguin, il est possible qu'on ne l'autorise pas à donner son sang (elle est « refusée » une fois sur cinq) auquel cas, si Ben est parti faire du vélo, il ne sera pas là quand elle rentrera.
Dans tous les autres cas, il sera là quand elle rentrera.

En admettant, que les évènements « Nat' n'est pas autorisée à donner son sang » et « Ben choisit d'aller faire du vélo » soient indépendants, quelle est la probabilité que Ben soit là quand Nat' rentrera ?

40 Dans la chorale d'un lycée, il y 7 élèves de Seconde, 9 élèves de Première et n élèves de Terminale.
De plus, parmi les élèves de Seconde, il n'y a qu'une seule fille, contre 3 parmi les élèves de Première et 6 parmi les élèves de Terminale.

On tire au sort un élève de la chorale.

1) Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de n les évènements « l'élève est en Terminale » et « l'élève est une fille » sont indépendants.
2) Pour $n = 24$, que peut-on dire de l'indépendance éventuelle des évènements :
   a) « l'élève est en Terminale » et « l'élève est un garçon » ?
   b) « l'élève est en Première » et « l'élève est une fille » ?

41 **D'après Bac (Antilles-Guyane - 2013)** ALGO

Les deux parties sont indépendantes.

Le robot Tom doit emprunter un pont sans garde-corps de 10 pas de long et de 2 pas de large.

Sa démarche est très particulière :

- soit il avance d'un pas tout droit ;
- soit il se déplace en diagonale vers la gauche (déplacement équivalent à un pas vers la gauche et un pas tout droit) ;
- soit il se déplace en diagonale vers la droite (déplacement équivalent à un pas vers la droite et un pas tout droit).

On suppose que ces trois types de déplacement sont aléatoires et équiprobables.

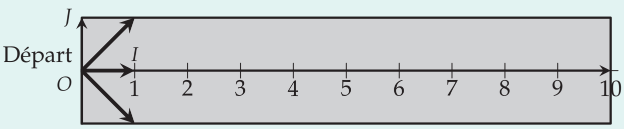
L'objectif de cet exercice est d'estimer la probabilité p de l'évènement S « Tom traverse le pont » c'est-à-dire « Tom n'est pas tombé dans l'eau et se trouve encore sur le pont au bout de 10 déplacements ».

PARTIE A : Modélisation et simulation

On schématise le pont par un rectangle dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ I, J)$ comme l'indique la figure ci-dessous.

On suppose que Tom se trouve au point de coordonnées $(0\ ;\ 0)$ au début de la traversée.

On note $(x\ ;\ y)$ les coordonnées de la position de Tom après x déplacements.



On a écrit l'algorithme suivant qui simule la position de Tom au bout de x déplacements :

```
x, y, n sont des entiers
Affecter à x la valeur 0
Affecter à y la valeur 0
Tant que y ⩾ − 1 et y ⩽ 1 et x ⩽ 9
    Affecter à n une valeur choisie au
hasard entre − 1, 0 et 1
    Affecter à y la valeur y + n
    Affecter à x la valeur x + 1
Fin tant que
Afficher "la position de Tom est" (x ; y)
```

1) On donne les couples suivants : $(-1\ ;\ 1)$; $(10\ ;\ 0)$; $(2\ ;\ 4)$; $(10\ ;\ 2)$.
Lesquels ont pu être obtenus avec cet algorithme ? Justifier la réponse.

2) Modifier cet algorithme pour qu'à la place de « la position de Tom est $(x\ ;\ y)$ », il affiche finalement « Tom a réussi la traversée » ou « Tom est tombé ».

PARTIE B

Pour tout n entier naturel compris entre 0 et 10, on note :

- A_n l'évènement « après n déplacements, Tom se trouve sur un point d'ordonnée -1 ».
- B_n l'évènement « après n déplacements, Tom se trouve sur un point d'ordonnée 0 ».
- C_n l'évènement « après n déplacements, Tom se trouve sur un point d'ordonnée 1 ».

On note a_n, b_n, c_n les probabilités respectives des évènements A_n, B_n, C_n.

1) Justifier que $a_0 = 0$, $b_0 = 1$, $c_0 = 0$.

2) Montrer que pour tout entier naturel n compris entre 0 et 9, on a :
$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & \dfrac{a_n + b_n}{3} \\ b_{n+1} & = & \dfrac{a_n + b_n + c_n}{3} \end{array}\right. .$$
On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

3) Calculer les probabilités $p(A_1)$, $p(B_1)$ et $p(C_1)$.

4) Calculer la probabilité que Tom se trouve sur le pont au bout de deux déplacements.

5) À l'aide d'un tableur, on a obtenu ci-dessous la feuille de calcul qui donne des valeurs approchées de a_n, b_n, c_n pour n compris entre 0 et 10.
Donner une valeur approchée à $0{,}001$ près de la probabilité que Tom traverse le pont (on pourra s'aider du tableau ci-dessous).

n	a_n	b_n	c_n
0	0	1	0
1	0,333 333	0,333 333	0,333 333
2	0,222 222	0,333 333	0,222 222
3	0,185 185	0,259 259	0,185 185
4	0,148 148	0,209 877	0,148 148
5	0,119 342	0,168 724	0,119 342
6	0,096 022	0,135 802	0,096 022
7	0,077 275	0,109 282	0,077 275
8	0,062 186	0,087 944	0,062 186
9	0,050 043	0,070 772	0,050 043
10	0,040 272	0,056 953	0,040 272

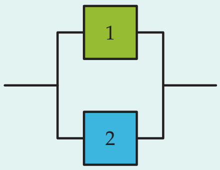
42 **D'après Bac (Antille-Guyane - 2015)**

Un circuit électronique est composé de deux composants identiques numérotés 1 et 2.

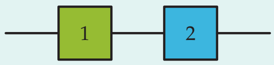
On note D_1 l'évènement « le composant 1 est défaillant avant un an » et on note D_2 l'évènement « le composant 2 est défaillant avant un an ».

On suppose que les deux évènements D_1 et D_2 sont indépendants et que $P(D_1) = P(D_2) = 0{,}39$.

Deux montages possibles sont envisagés, présentés ci-dessous :



Circuit A en parallèle



Circuit B en série

1) • Lorsque les deux composants sont montés « en parallèle », le circuit A est défaillant uniquement si les deux composants sont défaillants en même temps.

• Lorsque les deux composants sont montés « en série », le circuit B est défaillant dès que l'un au moins des deux composants est défaillant.

Quel montage privilégier ?

2) On choisit le meilleur montage trouvé à la question précédente pour fabriquer un appareil.
Sur un échantillon de 250 de ces appareils tirés au hasard (ce tirage étant assimilable à un tirage avec remise), en moyenne, combien seront défectueux à cause de ce circuit ?

43 Pour profiter d'une réduction, une association a acheté une très grande quantité de boîtes de conserve de haricots verts et de carottes.

65 % de ces boîtes sont de la marque Bonciel dont 40 % de boîtes de haricots verts, le reste de boîtes de carottes. Les autres boîtes sont de la marque Massegrin.

On choisit une boîte de haricots verts dans la réserve de l'association et on considère les évènements :

- B (respectivement M) : « la boîte est de marque Bonciel (respectivement Massegrin) » ;
- H (respectivement C) : « la boîte contient des haricots verts (respectivement carottes) ».

On sait que la probabilité d'obtenir des haricots verts est de $\dfrac{27}{50}$.

1) a) Déterminer $P_M(C)$.

b) Calculer $P_H(B)$ et interpréter cette probabilité par une phrase.

2) Les évènements M et C sont-ils indépendants ?

44 **Coût d'un contrôle anti-dopage**

Dans un certain sport, on considère que 2 % des sportifs se dopent.

Un test anti-dopage répond aux spécificités suivantes :

- si un sportif se dope, le test est positif dans 99 % des cas ;
- si un sportif ne se dope pas, le test est négatif dans 99,9 % des cas.

1) Déterminer la probabilité qu'un sportif pris au hasard soit contrôlé positif avec ce test.

2) Si un sportif est contrôlé positif à ce test, on fait un deuxième test : si celui-ci est également positif, le sportif est déclaré coupable, sinon, il est innocenté.
On choisit un sportif subissant un contrôle anti-dopage et on considère les évènements :

- D : « le sportif est dopé » ;
- P_1 : « le premier test est positif » ;
- P_2 : « le deuxième test est positif ».

a) Montrer que la probabilité que le sportif soit déclaré coupable est 0,019 602 98 en admettant que $P_{D\cap P_1}(P_2) = P_D(P_2)$ et $P_{\overline{D}\cap P_1}(P_2) = P_{\overline{D}}(P_2)$.

b) Un officiel affirme : « avec ce protocole, il est presque impossible qu'un sportif soit déclaré coupable à tort ». Commenter cette affirmation.

3) On tire au sort 50 sportifs pratiquant ce sport, ce tirage au sort étant assimilable à un tirage au sort avec remise.

a) En moyenne, combien de ces sportifs seront déclarés coupables ?

b) Quelle est la probabilité qu'il y ait entre 2 et 10 déclarés coupables ?

4) Un test antidopage coûte 500 € à réaliser.
On considère la variable aléatoire X donnant le coût d'un contrôle antidopage (c'est-à-dire un ou deux tests).

a) Donner la loi de probabilité de X.

b) La fédération de ce sport prévoit de réaliser 10 000 contrôles l'année prochaine.
Quelle somme « moyenne » devrait-elle prévoir pour tous ces contrôles dans son budget ?

45 Dans un jeu d'aventure, pour traverser une forêt, on peut choisir entre deux chemins A et B.

- Sur le chemin A, il y a 1 km entre le point de départ et une porte (porte 1) puis encore 1 km entre la porte 1 et le point d'arrivée.
- Sur le chemin B, il y a 1 km entre le point de départ et une porte (porte 2) puis encore 1 km entre la porte 2 et une autre porte (porte 3) et enfin 1 km entre la porte 3 et le point d'arrivée.
- Si un joueur est bloqué par une porte, il doit revenir au point de départ et prendre l'autre chemin.

Le joueur ne connaît pas ces règles et choisit le chemin A ou le chemin B avec la même probabilité, les règles d'ouverture des portes sont alors les suivantes :

- si le joueur choisit le chemin A, la probabilité que la porte 1 soit ouverte est 0,6 ; si elle est fermée, les portes 2 et 3 sont ouvertes ;
- si le joueur choisit le chemin B, la probabilité que la porte 2 soit ouverte est 0,8 ;
  - si elle est fermée, la porte 1 est ouverte ;
  - si elle est ouverte la probabilité que la porte 3 soit ouverte est également 0,8 ; si la porte 3 est fermée alors la porte 1 est ouverte.

Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire donnant la distance parcourue par un joueur.

46 Soit X et Y deux variables aléatoires prenant les valeurs respectives $x_1, \ldots, x_n$ d'une part et $y_1, \ldots, y_m$ d'autre part, avec n et m des entiers naturels non nuls.

On dit que X et Y sont indépendantes si les évènements $(X = x_i)$ et $(Y = y_j)$ sont indépendants quels que soient i et j tels que $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant m$.

1) On dispose de cinq billets de 5 € (deux dont le numéro de série se termine par 8 et trois dont le numéro de série se termine par 9) et 45 billets de 20 € (dix-huit dont le numéro de série se termine par 8 et vingt-sept dont le numéro de série se termine par 9). On choisit un billet au hasard parmi ces cinquante billets et on considère X la variable aléatoire donnant le montant du billet et Y la variable aléatoire donnant le dernier chiffre du numéro de série.
   Montrer que X et Y sont indépendantes.
2) On tire deux dés tétraédriques dont les faces sont numérotées de 1 à 4 et on considère les variables aléatoires S et D donnant respectivement la somme des deux chiffres obtenus et la différence du plus grand et du plus petit chiffre obtenus.
   S et D sont-elles indépendantes ?

47 Dans une urne, il y n boules rouges et p boules bleues. On tire une boule dans l'urne puis on la remet.

- Si la boule tirée est rouge, on double le nombre de boules rouges dans l'urne.
- Si la boule tirée est bleue, on double le nombre de boules bleues dans l'urne.

On réalise ensuite un deuxième tirage. Déterminer les nombres possibles de boules rouges et bleues dans l'urne de départ avec les informations suivantes :

- la probabilité que la deuxième boule soit rouge sachant que la première est rouge est $\frac{16}{33}$;
- la probabilité que la deuxième boule soit bleue sachant que la première est bleue est $\frac{17}{21}$.

48 On considère le jeu suivant, on lance 4 fois de suite une pièce équilibrée :

- si l'on n'obtient pas de « pile », on lance un dé à quatre faces (numérotées de 1 à 4) et on gagne si on fait 4, on perd sinon ;
- si l'on obtient entre 1 et 3 fois « pile », on lance un dé à six faces (numérotées de 1 à 6) et on gagne si on fait 6, on perd sinon ;
- si l'on obtient 4 fois « pile », on lance un dé à n faces (numérotées de 1 à n) et on gagne si on fait n, on perd sinon.

Déterminer la valeur de n pour laquelle les évènements « faire entre 1 et 3 fois « pile » à la première étape » et « gagner à ce jeu » sont indépendants.

49 **Question ouverte**

Quand elle va au cinéma, Nadia va toujours à celui qui est à côté de chez elle, le mardi soir à la séance de 20h. Elle a remarqué que :

- si elle y est allée un mardi, il n'y a que 40 % de chance qu'elle y aille le suivant ;
- si elle n'y est pas allée un mardi, il y a 80 % de chance qu'elle y aille le suivant.

Ce mardi, elle n'est pas allée au cinéma. Quelle est la probabilité qu'elle y aille dans un an (c'est-à-dire 52 semaines) ? On pourra considérer la suite (q_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $q_n = p_n - \frac{4}{7}$ où p_n est la probabilité que Nadia aille au cinéma dans n semaines.

À la fin de ce chapitre, je dois être capable de :

- Construire un arbre pondéré à partir d'un énoncé
- Calculer et interpréter des probabilités conditionnelles
- Utiliser la formule des probabilités totales
- Discuter l'indépendance de deux évènements
- Travailler avec les suites dans un contexte probabiliste

QCM d'auto-évaluation

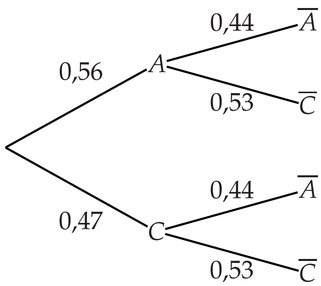
Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

Pour chaque question, plusieurs réponses sont proposées. Déterminer celles qui sont correctes.

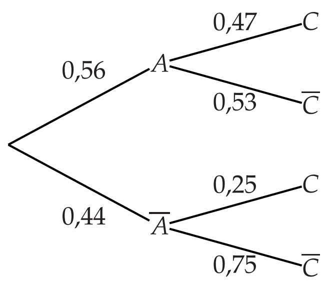
Selon la FIFA, lors de la finale de la Coupe du Monde Féminine FIFA 2015 entre les États-Unis et le Japon, les footballeuses américaines ont réalisé 56 % des tirs et 47 % de ceux-ci ont été cadrés.
De leur côté, les joueuses japonaises n'ont cadré que 25 % de leurs tirs.
On considère un tir au hasard réalisé pendant ce match et on appelle A l'évènement « le tir a été réalisé par une joueuse américaine » et C l'évènement « le tir est cadré ».

50 Quel arbre représente correctement la situation ?

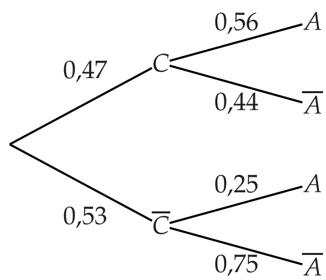
(a)



(b)



(c)



51 La probabilité $P_{\overline{A}}(C)$ est :

(a) 0,56 (b) 0,44 (c) 0,47 (d) 0,53 (e) 0,25 (f) 0,75

52 La probabilité que le tir ne soit pas cadré sachant qu'il a été réalisé par une joueuse japonaise est :

(a) 0,56 (b) 0,44 (c) 0,47 (d) 0,53 (e) 0,25 (f) 0,75

53 La probabilité que le tir pris au hasard soit cadré est :

(a) 0,47 (b) 0,25 (c) 0,82 (d) 0,373 2

54 La probabilité que le tir ait été réalisé par une joueuse japonaise sachant qu'il est cadré est :

(a) $P_C\left(\overline{A}\right)$ (b) $P_{\overline{A}}(C)$ (c) 0,25 (d) environ 0,295

55 Les évènements A et C :

(a) sont indépendants (b) ne sont pas indépendants

Vaïdeguy a pris l'habitude de laisser à manger devant chez elle pour un joli petit renard, qui vient parfois lui rendre visite. On considère ainsi que :

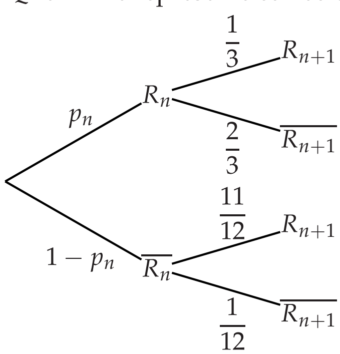
- si le renard vient un jour, il vient le lendemain avec une probabilité de $\frac{1}{3}$;
- s'il ne vient pas un jour, il vient le lendemain avec une probabilité de $\frac{11}{12}$.

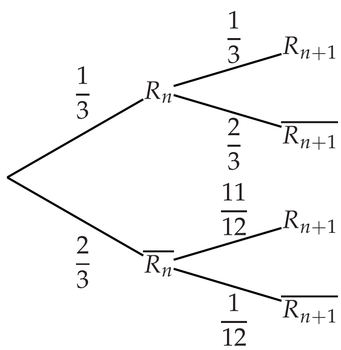
Aujourd'hui (le 1er jour), le renard est venu et, pour tout entier $n \geqslant 1$, on appelle p_n la probabilité de l'évènement R_n : « le renard vient le n^{e} jour ».

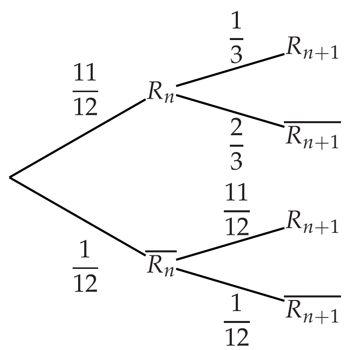
56 La probabilité p_1 est :

ⓐ 0 ⓑ 1 ⓒ $\frac{1}{3}$ ⓓ $\frac{11}{12}$

57 Quel arbre représente correctement la situation ?

ⓐ


ⓑ


ⓒ


58 Pour tout entier $n \geqslant 1$, p_{n+1} est égal à :

ⓐ $\frac{1}{3}$ ⓒ $p_n \times \frac{1}{3} + (1-p_n) \times \frac{11}{12}$

ⓑ $\frac{11}{12}$ ⓓ $\frac{11}{12} - \frac{7}{12}p_n$

59 La suite (u_n) définie par $u_n = p_n - \frac{11}{19}$ pour tout $n \geqslant 1$ est géométrique de raison :

ⓐ $\frac{11}{19}$ ⓑ 1 ⓒ $\frac{1}{3}$ ⓓ $\frac{11}{12}$ ⓔ $\frac{7}{12}$ ⓕ $-\frac{7}{12}$

60 La probabilité que le renard vienne rendre visite à Vaïdeguy « un jour lointain » est :

ⓐ nulle ⓑ proche de 1 ⓒ proche de $\frac{11}{19}$

Math le dit lui-même « je ne triche que rarement, disons 5 % du temps, mais quand je triche, je gagne à coup sûr ! ». Ce soir, il joue à un jeu de plateau avec quatre de ses amis et, comme ils sont tous de même niveau, on estime qu'ils ont tous une probabilité de victoire de $\frac{1}{5}$, si Math ne triche pas...

61 Math gagne une partie, quelle est la probabilité qu'il ait triché ?

ⓐ $\frac{5}{24}$ ⓑ 0,05 ⓒ $\frac{1}{20}$

TP 1 Des « faux-positifs »

A Avec 60 personnes

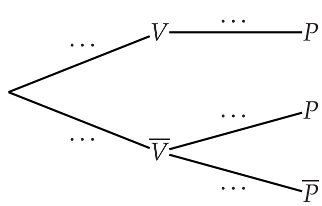
Le 24 juillet 2015, la loi relative au renseignement a été promulguée.
Quelques mois plus tôt, le 30 avril 2015, l'Institut national de recherche en informatique et en automatique (Inria) proposait quelques « Éléments d'analyse technique du projet de loi relatif au renseignement » dans lequel figurait le paragraphe suivant :

> **Le paradoxe des « faux-positifs »**
> Le traitement par des programmes informatiques des données collectées, en particulier évoqué dans l'article L. 851-4 du projet de loi, doit faire l'objet d'analyses formelles correctes. En particulier nous attirons l'attention du législateur sur ce que les statisticiens appellent le paradoxe des faux-positifs. Son principe est le suivant. Supposons que l'on recherche des terroristes dans une population. Tout algorithme de détection a une marge d'erreur c'est-à-dire va identifier des personnes sans intention terroriste (des « faux-positifs »).
> Si la marge d'erreur est de 1 %, ce qui est considéré à ce jour comme très faible, l'algorithme identifiera quelques 600 000 personnes sur une population totale de 60 millions de personnes. Si le nombre de vrais terroristes est par exemple de 60, ces vrais terroristes ne représenteront que 0,01 % de la population identifiée.
>
> Ce phénomène scientifique bien connu et lié à l'identification statistique d'évènements rares a donc des conséquences que le texte du projet de loi actuel ne prend pas en compte.

1) a) Expliquer ce qui est nommé un « faux-positif » dans ce contexte.
b) Résumer la position de l'Inria sur ce projet de loi.

2) À quel pourcentage de la population française correspond le nombre de « vrais terroristes » donné en exemple ?

3) En admettant qu'il n'y a pas de « faux-négatif », recopier et compléter l'arbre ci-contre avec :
- V signifie « la personne est un vrai terroriste » ;
- P signifie « le contrôle est positif » (c'est-à-dire identifié comme terroriste).



4) Retrouver le pourcentage de 0,01 % annoncé.

B Avec 3 000 personnes

Le 6 mai 2015, dans une interview donnée au journal LeMonde.fr, Daniel Le Métayer, directeur de recherche à l'Inria précise :

> Même avec un algorithme extrêmement précis, qui ne se tromperait qu'une fois sur cent, à l'échelle de la population il y aurait de l'ordre de 600 000 personnes suspectées à tort. En d'autres termes, en faisant l'hypothèse énoncée par le gouvernement que 3 000 personnes mériteraient d'être surveillées, la probabilité qu'une personne identifiée par le système soit vraiment un terroriste serait alors d'environ . . . %, ce qui est négligeable.

Reprendre le raisonnement précédent avec ces nouvelles données et déterminer le pourcentage manquant dans le texte (on admet toujours qu'il n'y a pas de « faux-négatif »).

TP 2 D'une humeur aléatoire

ALGO INFO

A En haut, à droite !

M. Wiener est professeur de mathématiques. Quand il corrige un paquet de copies, il a pris l'habitude de dessiner sur un quadrillage ce qu'il appelle sa « courbe d'humeur », obtenue en partant au départ d'une intersection du quadrillage puis, s'il met une note :

- entre 0 et 9, il trace un segment horizontal de 1 carreau vers la droite (son humeur stagne) ;
- entre 10 et 20, il trace un segment vertical de 1 carreau vers le haut (son humeur monte).

Précisons qu'il ne note qu'avec des nombres entiers.

1) Dessiner la courbe d'humeur de M. Wiener après avoir corrigé dans cet ordre des copies ayant obtenu 15-9-3-20-20-12-8-17.

2) Curieux d'entendre des phrases comme « Bravo, ma courbe d'humeur a atteint des sommets ! » ou « Ma courbe d'humeur est restée beaucoup trop plate à mon goût », les élèves de M. Wiener ont écrit l'algorithme ci-dessous avec le logiciel AlgoBox permettant d'obtenir des courbes d'humeur aléatoires pour voir à quoi cela ressemble.

```
VARIABLES
   x EST_DU_TYPE NOMBRE
   y EST_DU_TYPE NOMBRE
   a EST_DU_TYPE NOMBRE
   b EST_DU_TYPE NOMBRE
   c EST_DU_TYPE NOMBRE
   i EST_DU_TYPE NOMBRE
   n EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
   x PREND_LA_VALEUR 0
   y PREND_LA_VALEUR 0
   LIRE n
   POUR i ALLANT_DE 1 A n
      DEBUT_POUR
      a PREND_LA_VALEUR x
      b PREND_LA_VALEUR y
      c PREND_LA_VALEUR ALGOBOX_ALEA_ENT(0,20)
      SI (c<10) ALORS
           DEBUT_SI
           x PREND_LA_VALEUR x+1
           FIN_SI
           SINON
              DEBUT_SINON
              y PREND_LA_VALEUR y+1
              FIN_SINON
      TRACER_SEGMENT(a,b)->(x,y)
      FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

On rappelle que `ALGOBOX_ALEA_ENT(n,p)` renvoie un entier au hasard entre n et p, chacun des entiers possibles ayant la même probabilité d'être obtenu.

a) Recopier et compléter le tableau ci-dessous pour $n = 4$ si `ALGOBOX_ALEA_ENT(0,20)` renvoie successivement $c = 13$, $c = 18$, $c = 5$ et $c = 10$; puis dessiner la courbe d'humeur correspondante.

	Initialisation	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$
a	$\times$				
b	$\times$				
c	$\times$				
x					
y					

b) Saisir l'algorithme dans AlgoBox et le faire tourner pour quelques valeurs de n de votre choix. Pour cela :

- la commande `TRACER_SEGMENT(a,b)->(x,y)` se trouve dans l'onglet **Dessiner dans un repère** ;
- on pourra régler Xmin à 0, Ymin à 0, Xmax à n, Ymax à n, Graduations X à 1 et Graduations Y à 1.

c) Les élèves de M. Wiener ont fait tourner plusieurs fois l'algorithme pour $n = 35$ (l'effectif de leur classe) et ont constaté que, sur ces essais, la fenêtre de tracé avec Xmin $= 0$, Ymin $= 0$, Xmax $= 35$, Ymax $= 35$ n'est jamais entièrement utilisée.

i) Expliquer pourquoi.

ii) Justifier que l'abscisse du point d'arrivée suit une loi binomiale dont vous préciserez les paramètres.
En déduire quelle valeur minimale choisir pour Xmax pour avoir au moins 95 % de chance que la courbe d'humeur ne dépasse pas de la fenêtre horizontalement.

iii) Reprendre la question précédente avec l'ordonnée du point d'arrivée.

iv) Tester ces valeurs avec le logiciel.

3) M. Wiener, amusé par l'algorithme de ses élèves, leur dit :
« C'est très bien ce que vous avez fait, mais vos notes aléatoires ne sont pas réalistes. Par exemple, dans votre classe, je n'ai pas mis une seule fois de note inférieure ou égale à 5 ».

a) Expliquer le problème de l'algorithme que soulève M. Wiener.

b) Pour pallier le problème, ses élèves lui demandent à combien il estime la probabilité qu'un élève pris au hasard ait la moyenne : il répond qu'en s'appuyant sur les notes récoltées depuis le début de l'année, il estime cette probabilité à 0,65.

Modifier l'algorithme en conséquence en utilisant la fonction `random()` (à la place de `ALGOBOX_ALEA_ENT(n,p)`) qui renvoie un nombre aléatoire entre 0 et 1.

c) Reprendre les questions **2(c)ii** et **2(c)iii** avec ce nouvel algorithme et le tester.

B En haut, en bas !

M. Wiener a changé d'avis ! Maintenant, une « courbe d'humeur » est obtenue, toujours en partant d'une intersection du quadrillage, mais les segments ne sont plus horizontaux ou verticaux puisqu'il se déplace :

- d'un carreau vers la droite et d'un carreau vers le haut s'il met la moyenne ;
- d'un carreau vers la droite et d'un carreau vers le bas s'il ne met pas la moyenne.

Modifier le programme précédent pour tenir compte de ces changements.

TP 3 Aide au diagnostic

INFO

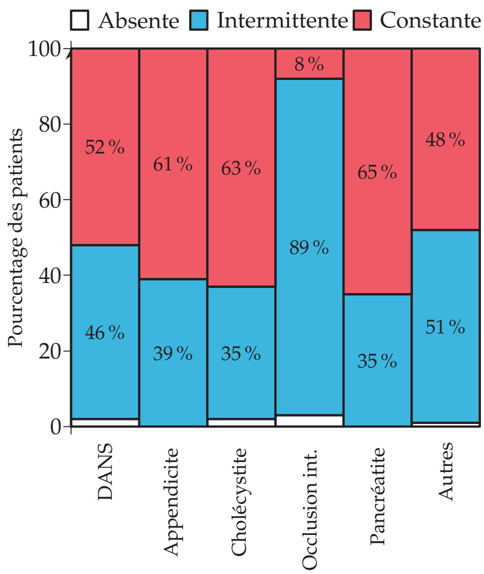
L'étude « Abdomens aigus : prise en charge diagnostique. Rapport du 106e Congrès de l'AFC » publiée en 2004 par J.-L. Bouillot et L. Bresler et portant sur des séries de personnes s'étant présentées aux urgences pour des douleurs abdominales a donné les résultats suivants :

Diagnostic	Fréquence
DANS	34,8 %
Appendicite	7,5 %
Cholécystite	7,6 %
Occlusion intestinale	10,1 %
Pancréatite	4,3 %
Autres	35,7 %

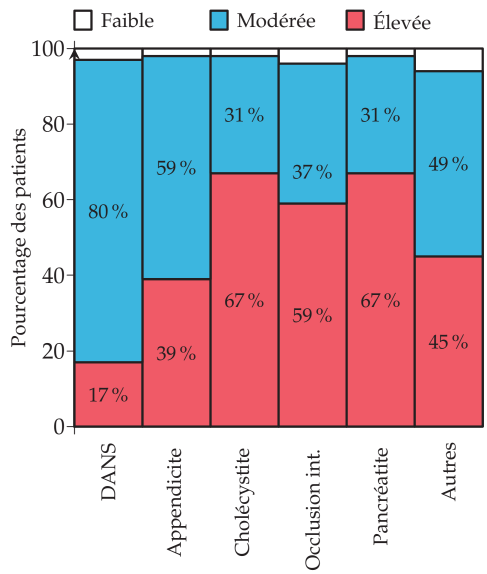
DANS : douleur abdominale non spécifiée

On considère par ailleurs les graphiques suivants :

Type de douleur



Intensité de la douleur :



Un patient se plaignant de douleurs abdominales se présente aux urgences.

1) a) En s'appuyant sur le tableau et les graphiques précédents, déterminer la probabilité que la douleur du patient soit intermittente.

b) Le patient décrit sa douleur comme intermittente. Recopier la feuille de calcul suivante dans un tableur :

	A	B	C
1	Diagnostic	Fréquence	Fréquence douleur intermittente
2	DANS	34,8 %	46 %
3	Appendicite	7,5 %	39 %
4	Cholécystite	7,6 %	35 %
5	Occlusion int.	10,1 %	89 %
6	Pancréatite	4,3 %	35 %
7	Autres	35,7 %	51 %

c) Écrire dans la cellule D2 une formule permettant de calculer la probabilité que le patient souffre de DANS sachant qu'il ressent une douleur intermittente.

d) Recopier vers le bas afin de compléter la colonne D avec les probabilités des différents diagnostics sachant que le patient ressent une douleur intermittente.

e) Recopier le tableau ci-dessous et, dans la 3^{e} colonne, y classer les diagnostics par probabilité décroissante sachant que le patient ressent une douleur intermittente.

Rang	Sans information	Sachant que la douleur est intermittente	Sachant que la douleur est élevée
1er	Autres		
2^{e}	DANS		
3^{e}	Occlusion int.		
4^{e}	Cholécystite		
5^{e}	Appendicite		
6^{e}	Pancréatite		

2) Le fait de savoir que la douleur est intermittente donne-t-il une information importante quant à l'ordre des diagnostics à explorer ?

3) a) Déterminer la probabilité que la douleur du patient soit élevée.

b) Le patient décrit sa douleur comme élevée. Recopier la feuille de calcul suivante dans un tableur :

	A	B	C
1	Diagnostic	Fréquence	Fréquence douleur élevée
2	DANS	34,8 %	17 %
3	Appendicite	7,5 %	39 %
4	Cholécystite	7,6 %	67 %
5	Occlusion int.	10,1 %	59 %
6	Pancréatite	4,3 %	67 %
7	Autres	35,7 %	45 %

c) Écrire une formule dans la cellule D2 permettant de calculer la probabilité que le patient souffre de DANS sachant qu'il ressent une douleur élevée.

d) Recopier vers le bas afin de compléter la colonne D avec les probabilités des différents diagnostics sachant que le patient ressent une douleur élevée.

e) Dans la 4^{e} colonne du tableau de la question **1e**, classer les diagnostics par probabilité décroissante sachant que le patient ressent une douleur élevée.

f) Le fait de savoir que la douleur est élevée donne-t-il une information importante quant à l'ordre des diagnostics à explorer ?

Les statistiques et probabilités (notamment conditionnelles) sont très utilisées en médecine. C'est le cas dans ce TP pour permettre un premier diagnostic pertinent afin d'orienter plus rapidement le patient vers des soins ou des examens adéquats, mais il y a beaucoup d'autres applications.

Récréation, énigmes

Déminons, en toute logique

Au démineur, on rappelle que :

- le chiffre inscrit dans une case est le nombre de mines dans les cases adjacentes à la case ;
- une case avec un drapeau désigne une case identifiée comme minée.

Partie A : Avec un « coin »

1) On considère la configuration ci-contre.

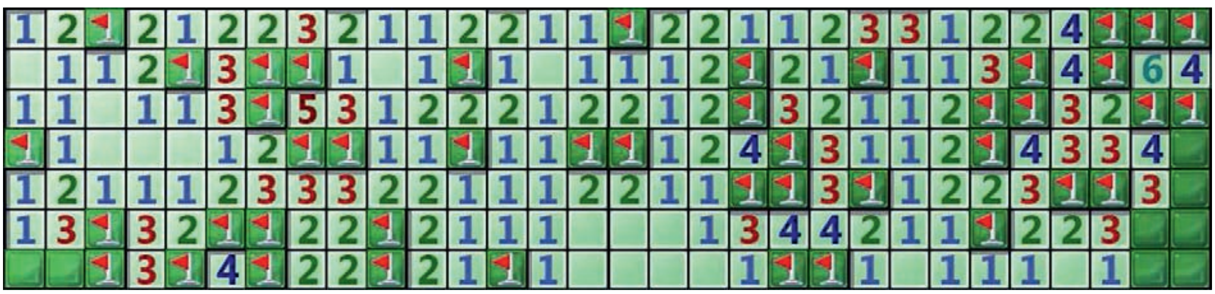
   a) Parmi les quatre cases non découvertes, peut-il y avoir 4 mines ? 3 mines ? 2 mines ? 1 mine ?
   b) À l'aide d'un quadrillage, dessiner toutes les configurations possibles.
   c) En déduire la probabilité de choisir la configuration correcte parmi celles possibles.

2) On considère la configuration ci-contre.

   a) Dessiner toutes les configurations possibles et en déduire la probabilité de choisir la configuration correcte parmi celles-ci.
   b) En admettant que le reste de la grille ait été entièrement déminé et que le compteur indique qu'il reste exactement deux mines, déterminer la probabilité de choisir la configuration correcte parmi celles possibles.

Partie B : Avec deux « coins »

On considère la configuration suivante et l'on sait qu'il reste exactement 3 mines dans les cases non découvertes, en bas à gauche et en bas à droite de la grille :



1) Combien y-a-t'il de mines dans la partie gauche ? Dans la partie droite ?
2) Quelle est la probabilité de choisir la bonne configuration dans la partie gauche ?
3) À l'aide d'un quadrillage, dessiner toutes les configurations possibles pour la partie droite puis en déduire la probabilité de choisir la configuration correcte parmi celles possibles dans cette partie.
4) a) Sous quelle condition sur les évènements « on choisit la bonne configuration dans la partie gauche » et « on choisit la bonne configuration dans la partie droite » peut-on calculer la probabilité que l'on démine correctement cette grille ?

   Cette condition semble-t-elle raisonnable ?

   b) Sous cette condition, calculer la probabilité de déminer correctement la grille (quand on choisit parmi les configurations possibles !).

STATISTIQUES
PROBABILITÉS

2

Lois à densité

Connaissances nécessaires à ce chapitre

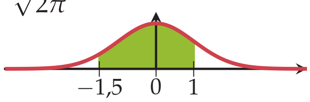
- Calculer des intégrales pour déterminer des aires
- Calculer des probabilités avec une loi binomiale
- Savoir calculer et interpréter l'espérance et l'écart-type d'une variable aléatoire

Auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

1 Calculer $\int_0^3 2\,\mathrm{d}x$ et $\int_0^4 2\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t$.

2 Avec la calculatrice, donner l'aire colorée ci-dessous (en unité d'aire) où la courbe représente la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ (arrondir au millième).



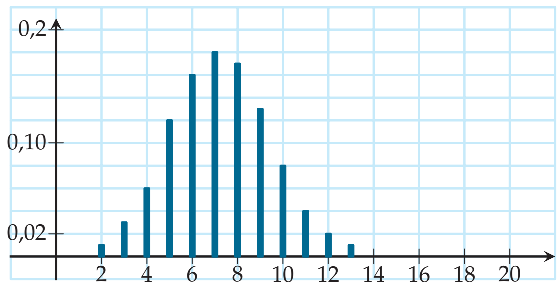
3 X est une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}82$. Calculer :
1) $P(X = 7)$ **2)** $P(X < 5)$ **3)** $P(X \leqslant 4)$ **4)** $\sigma(X)$

4 On a relevé les probabilités des gains à un jeu télévisé. On note G la variable aléatoire qui donne le gain en euros.
Le tableau suivant donne la loi de probabilité de G.

g_i	1 000	2 000	5 000	10 000
$P(G = g_i)$	0,63	0,21	0,12	0,04

1) Calculer $E(G)$ et $\sigma(G)$.
2) Donner une interprétation de $E(G)$.
3) Dans un deuxième jeu, l'espérance est égale à 2 050, mais l'écart-type est de 20 000. Dans quel jeu les gains sont-ils les plus hétérogènes ?

5 On a représenté graphiquement ci-dessous une variable aléatoire suivant une loi binomiale.



Donner une valeur approchée de $P(X = 3)$ puis de $P(X \geqslant 10)$.

6 Dans un jeu de hasard, on peut (en comptant la mise) perdre 3 €, gagner 7 € ou gagner 50 €.
La variable aléatoire X donnant le gain algébrique dans ce jeu vérifie $E(X) = -2$ et $V(X) = 31$.
1) L'organisateur décide d'ajouter 1 euro à tous les gains algébriques.
Que deviennent l'espérance et la variance ?
2) Soit Y la variable aléatoire telle que $Y = 2X$.
Déterminer les valeurs que peut prendre la variable aléatoire Y puis déterminer $E(Y)$ et $V(Y)$.

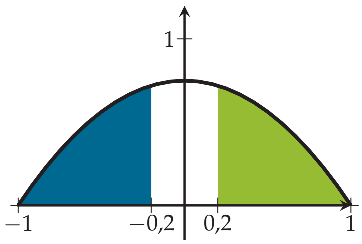
Voir solutions p. 419

ACTIVITÉ 1 La probabilité d'être toujours gagnant

Partie A : Des aires et des probabilités

Dans la salle des professeurs de mathématiques, il y a une cible de fléchettes dont la forme est parabolique :

Plus précisément, la fonction f ayant permis de tracer cette cible est définie sur $[-1\ ;\ 1]$ par $f(x) = 0{,}75\left(1 - x^2\right)$, de sorte que l'on ait :



Dans toute la suite, on travaillera sur le second graphique, dans le repère orthonormé.

Quand les professeurs de mathématiques jouent aux fléchettes, la règle est la suivante :
- quand on atteint la partie bleue, on gagne un café ;
- quand on atteint la partie verte, on gagne une barre chocolatée ;
- quand on atteint la partie non colorée, un collègue corrige un paquet de copies à votre place.

On admet, par ailleurs, que lors d'un lancer :
- l'on ne rate jamais la cible ;
- tous les points de la cible sont équiprobables.

1) Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$.

2) **a)** Déterminer la probabilité d'obtenir un café.

b) En déduire la probabilité d'obtenir une barre chocolatée.

3) Déterminer la probabilité de ne pas corriger son paquet de copies.

Partie B : Avec une variable aléatoire

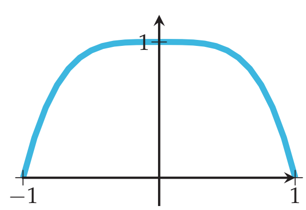
Un professeur de mathématiques lance une fléchette dans la cible et on considère X la **variable aléatoire** donnant l'abscisse du point d'arrivée de la fléchette.

1) Quel est l'ensemble des valeurs que prend X ?

2) Tracer la courbe de f (sans les zones colorées), hachurer l'ensemble des points de la cible pour lesquels $-0{,}6 \leqslant X \leqslant 0{,}7$ puis calculer $P(-0{,}6 \leqslant X \leqslant 0{,}7)$.

3) Pour $a < b$ et $a, b \in [-1\ ;\ 1]$, donner $P(a \leqslant X \leqslant b)$ sous la forme d'une intégrale.

4) La cible est maintenant délimitée sur $[-1\ ;\ 1]$ par la courbe de la fonction g définie par $g(x) = 1 - x^4$ ci-contre.



a) Déterminer l'aire entre l'axe des abscisses et la courbe de g sur $[-1\ ;\ 1]$.

b) Reprendre les questions **2** et **3** avec la nouvelle cible.

ACTIVITÉ 2 Vers la loi uniforme

CALC INFO

Partie A : Avec une calculatrice

La calculatrice permet d'obtenir un nombre aléatoire avec 10 décimales dans l'intervalle $[0\,;\,1[$:

Calculatrice TI

On appuie sur la touche math puis on choisit **PRB** et **NbrAléat**.

Calculatrice Casio

On appuie sur OPTN puis on choisit **PROB**, **Rand** et **Ran#**.

1) Combien y a-t-il de nombres avec 10 décimales dans l'intervalle $[0\,;\,1[$?

2) Quelle est la probabilité d'obtenir 0,123 456 789 0 ?

Partie B : Avec le tableur

On utilise le tableur et la commande « =ALEA() » qui donne un nombre aléatoire (avec 15 décimales) pour réaliser une simulation de 5 000 nombres dans $[0\,;\,1[$.
Dans la copie d'écran ci-dessous, on présente des relevés de cette simulation.

E3 =NB.SI($A1:$A5000;"<0,2")-NB.SI($A1:$A5000;"<0,1")

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	0,502668082421260										
2	0,366299904640073		Classe	[0;0,1[	[0,1;0,2[	[0,2;0,4[	[0,4;0,6[	[0,6;0,8[	[0,8;0,9[	[0,9;1[	Total
3	0,803212003060794		Effectif	512	493	982	1025	969	528	491	5000
4	0,540163650044041		fréquence	0,1024	0,0986	0,1964	0,2050	0,1938	0,1056	0,0982	1
5	0,769655100151884										
6	0,005502001771556										

1) Comment semblent être les fréquences observées pour des classes de même amplitude ?

2) Donner une estimation de la probabilité d'obtention d'un nombre dans l'intervalle $[0{,}1\,;\,0{,}2[$?

3) Donner une estimation de la probabilité d'obtention d'un nombre dans l'intervalle $[0{,}6\,;\,0{,}9[$?

Partie C : Un peu de réflexion

On choisit un nombre réel au hasard dans $[0\,;\,1]$ (sans se préoccuper du nombre de décimales).

1) Que peut-on penser de la probabilité de tomber exactement sur 0,4 ?

2) Que peut-on penser de la probabilité d'obtenir un nombre supérieur à 0,5 ?

Partie D : Avec une fonction

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,1]$ par $f(x) = 1$.

1) Montrer que cette fonction est une densité de probabilité.

2) Soit X la variable aléatoire suivant la loi de densité f.

a) Déterminer $P(X = 0{,}4)$.

b) Déterminer $P(X > 0{,}5)$.

> On admet que le choix d'un nombre au hasard dans $[0\,;\,1]$ peut-être modélisé par une variable aléatoire suivant la loi de densité f définie dans la partie D de l'activité.
> On dit que la variable aléatoire suit la loi uniforme sur $[0\,;\,1]$.

Partie E : Entre 2 et 5

On considère une variable aléatoire Y donnant un nombre aléatoire sur l'intervalle $[2\,;\,5]$.

1) Déterminer $P(2{,}5 \leqslant Y \leqslant 4)$ puis $P(c \leqslant Y \leqslant d)$ pour $c \leqslant d$ dans $[2\,;\,5]$.

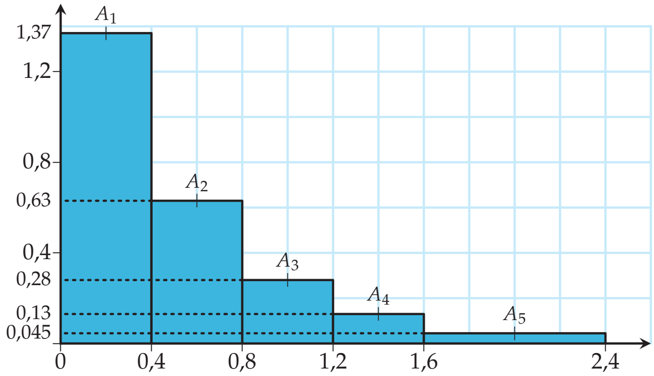
2) En déduire la fonction de densité de Y.

ACTIVITÉ 3 Vers la loi exponentielle

Plusieurs fois dans la semaine, lorsqu'il revient du lycée, Karim doit sortir le linge de la machine à laver familiale et l'étendre.

Pour une étude statistique, on a relevé 100 fois le temps écoulé (en heure) entre le moment où il rentre chez lui et celui où il s'acquitte de cette tâche.

Les résultats sont donnés par l'histogramme ci-contre où la fréquence d'une classe est donnée par l'aire (exprimée en unité d'aire) du rectangle correspondant à cette classe.



Partie A : Avec l'histogramme

1) Avec quelle fréquence Karim a-t-il mis entre 0 et 24 minutes avant de sortir le linge ?

2) Aujourd'hui Karim va devoir rentrer du lycée et étendre le linge : on considère la variable aléatoire X donnant le temps qui s'écoulera (en heure) entre le moment où il rentrera chez lui et celui où il s'acquittera de sa tâche.

a) Préciser toutes les valeurs que peut prendre la variable aléatoire X.

b) En utilisant l'histogramme de manière prédictive, proposer une valeur de $P(0{,}5 \leqslant X \leqslant 1)$.

L'objet de la partie **B** est de déterminer une fonction de densité continue possible pour X.

Partie B : Vers une fonction de densité

1) Dans un repère orthonormé, placer A_1, A_2, A_3, A_4 et A_5, milieux des côtés des rectangles du graphique précédent. Ces points semblent-ils pouvoir être « approchés » par une droite ?

2) Recopier puis compléter le tableau suivant (arrondir y'_i à 0,01 près) :

Point A_i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
Abscisse x_i					
Ordonnée y_i					
$y'_i = \ln(y_i)$					

3) a) Dans un nouveau repère orthonormé (différent de celui de la question **1**) placer les points de coordonnées $(x_i\,;\,y'_i)$ pour i entier entre 1 et 5.

b) Ces points semblent-ils pouvoir être « approchés » par une droite ? Si oui, la tracer à main levée et lire graphiquement son équation réduite.

c) Un logiciel propose pour équation $y' = -2x + \ln(2)$.
Cela est-il cohérent avec la réponse donnée à la question précédente ?

d) En utilisant cette droite d'équation $y' = -2x + \ln(2)$, déduire une fonction f dont la courbe « approche » les points A_1, A_2, A_3, A_4 et A_5 de manière satisfaisante.

e) Tracer la courbe de f dans le repère de la question **1**.

4) On admet que f est bien la fonction de densité de la variable aléatoire X sur $[0\,;\,+\infty[$.

a) Déterminer $P(0{,}5 \leqslant X \leqslant 1)$ puis comparer avec le résultat obtenu à la question **2b** de la partie **A**.

b) Déterminer la probabilité que Karim attende moins de 3h pour vider la machine à laver.

ACTIVITÉ 4 Vers la loi normale centrée réduite

INFO

Le but de cette activité est d'étudier l'évolution des lois binomiales $\mathscr{B}(n\ ;\ p)$ lorsque n tend vers $+\infty$, après centrage et réduction.

On considère une variable aléatoire X_n suivant une loi $\mathscr{B}(n\ ;\ p)$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0\ ;\ 1[$.

1) a) Déterminer l'espérance et l'écart-type de X_n en fonction de n et p.

b) Expliquer pourquoi on peut écrire que la variable aléatoire Z définie par $Z = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ est centrée réduite.

2) On va utiliser un logiciel de géométrie dynamique pour représenter la loi de probabilité de Z. Plus précisément, on cherche à représenter cette loi à l'aide d'un histogramme dont les rectangles sont centrés sur les valeurs z_i prises par Z et dont les aires donnent la probabilité de $Z = z_i$ correspondante.

a) Créer deux curseurs pour n allant de 1 à 3 000 et p allant de 0 à 1.

b) Calculer avec la barre de saisie :

- l'espérance `m=n*p`
- l'écart-type `s=sqrt(n*p*(1-p))`

c) Entrer dans la barre de saisie :

```
Séquence[(i-m)/s-1/(2*s),i,0,n+1]
```

Cela crée la liste des bornes sur l'axe des abscisses.

d) Entrer dans la barre de saisie :

```
Séquence[s*binomiale(n,p,i,False),i,0,n]
```

Cela crée la liste des hauteurs des histogrammes. Chaque intervalle ayant une longueur de $\frac{1}{s}$, il faut introduire un facteur s dans la formule pour que l'aire corresponde bien à la probabilité.

e) Entrer dans la barre de saisie :

```
histogramme[liste1,liste2]
```

On obtient un histogramme : les aires des rectangles correspondent aux probabilités.

3) Pour différentes valeurs de p, faire varier n de 1 à 3 000. Qu'observe-t-on ?

4) Tracer la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ en entrant dans la barre de saisie :

```
f(x)=1/(sqrt(2*pi))*e^(-x^2/2)
```

5) Entrer dans la barre de saisie :

```
Intégrale[f,-inf,+inf]
```

Que peut-on en déduire pour la fonction f ?

DÉBAT 5 Centrage et réduction

On considère deux variables aléatoires X et Y suivant respectivement les lois $\mathscr{N}(0\ ;\ 1)$ et $\mathscr{N}(1\ ;\ 3^2)$ et le tableau ci-dessous (les probabilités sont arrondies au millième) :

k	0	1	2	3
$P(X \leqslant k)$	0,5	0,841	0,977	0,999

1) Peut-on déterminer $P(Y \leqslant 4)$ uniquement à l'aide des informations de l'énoncé ?

2) Pour quelles valeurs de k peut-on déterminer $P(Y \leqslant k)$ uniquement à l'aide des informations de l'énoncé ?

1. Variables aléatoires à densité

Exemple Dans une bouteille vide de contenance 1,5 litres, on verse une quantité au hasard d'eau. On considère la variable aléatoire X égale à ce volume d'eau en litres. Cette quantité peut être égale à n'importe quel nombre de l'intervalle $[0\,;\,1{,}5]$.
Cela signifie que X prend ses valeurs dans l'intervalle $[0\,;\,1{,}5]$.

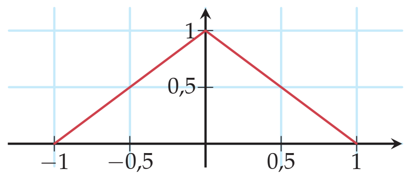
Remarque : Jusqu'à présent on a travaillé avec des variables aléatoires **discrètes** qui prennent un nombre fini de valeurs et leur loi est soit connue (binomiale ou Bernoulli), soit présentable sous la forme d'un tableau. Dans l'exemple précédent, la variable aléatoire prend une infinité de valeurs et toutes ces valeurs sont dans un intervalle de $\mathbb{R}$.

DÉFINITION

Si une fonction f définie sur un intervalle I est continue et positive sur I et si l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses et la courbe de f sur l'intervalle I est égale à 1 (unité d'aire) alors on dit que f est une **fonction de densité** (ou une **densité de probabilité**).

Exemple

On considère la fonction f définie sur $[-1\,;\,1]$ par $f(x) = \begin{cases} x+1 \text{ si } x \in [-1\,;\,0[\\ -x+1 \text{ si } x \in [0\,;\,1] \end{cases}$.

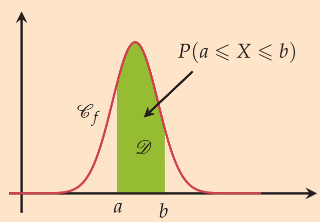


La fonction f est positive et continue sur $[-1\,;\,1]$.
De plus, le domaine entre la courbe de f et l'axe des abscisses sur $[-1\,;\,1]$ est un triangle d'aire $\dfrac{2\times 1}{2} = 1$: la fonction f est donc une fonction de densité.

DÉFINITION

Soit f une fonction de densité sur un intervalle I.

Dire que la variable aléatoire X suit la loi de densité f signifie que pour tout intervalle $[a\,;\,b]$ inclus dans I on a $P(a \leqslant X \leqslant b) = \text{aire}\,(\mathscr{D})$ où $\mathscr{D}$ est le domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.
On a alors $P(a \leqslant X \leqslant b) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.



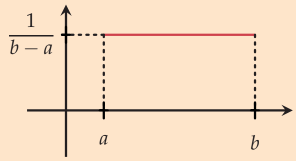
Remarques :

- On dit alors que X est une **variable aléatoire à densité**.
- La probabilité qu'une variable aléatoire à densité X prenne une valeur c est égale à 0 car $P(X = c) = \displaystyle\int_c^c f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
  Par conséquent, les éventuelles inégalités strictes peuvent être remplacées par des inégalités larges dans les calculs de probabilités : par exemple $P\,(1 < X \leqslant 3) = P\,(1 \leqslant X \leqslant 3)$.

2. Loi uniforme sur $[a\ ;\ b]$

DÉFINITION

Une variable aléatoire X suit **la loi uniforme sur** $[a\ ;\ b]$ si elle admet pour densité la fonction constante f définie sur $[a\ ;\ b]$ par $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$.



NOTATION : « X suit la loi uniforme sur $[a\ ;\ b]$ » s'écrit aussi « X suit la loi $\mathscr{U}([a\ ;\ b])$ ».

PROPRIÉTÉ

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[a\ ;\ b]$ et $[c\ ;\ d]$ un intervalle inclus dans $[a\ ;\ b]$. Alors on a $P(X \in [c\ ;\ d]) = \dfrac{d-c}{b-a}$.

PREUVE X admet pour densité $f : t \mapsto \dfrac{1}{b-a}$ sur $[a\ ;\ b]$.

Donc on a $P(X \in [c\ ;\ d]) = \displaystyle\int_c^d f(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{b-a}t\right]_c^d = \frac{d-c}{b-a}$.

PROPRIÉTÉ

On considère une variable aléatoire X suivant la loi uniforme sur $[a\ ;\ b]$ de densité f et on appelle espérance mathématique de X le nombre $E(X) = \displaystyle\int_a^b tf(t)\,\mathrm{d}t$.

On a alors $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$.

PREUVE On a $E(X) = \displaystyle\int_a^b tf(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{1}{b-a}t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2(b-a)}\right]_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)}$

$= \dfrac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \dfrac{a+b}{2}$.

MÉTHODE 1 Calculer une probabilité et une espérance pour une loi uniforme ► Ex. 22 p. 370

On utilise les différentes formules des propriétés ou on calcule à l'aide de la fonction de densité et des intégrales.

Exercice d'application Armand et Lise rentrent de l'école à pied. Leurs parents savent qu'ils doivent arriver entre 17h et 18h à la maison. On peut modéliser leur heure d'arrivée par une variable aléatoire X suivant la loi uniforme sur $[17\ ;\ 18]$.

1) Quelle est la probabilité qu'ils arrivent entre 17h et 17h15 ?
2) À quelle heure leurs parents peuvent-ils « espérer » les voir arriver ?

Correction

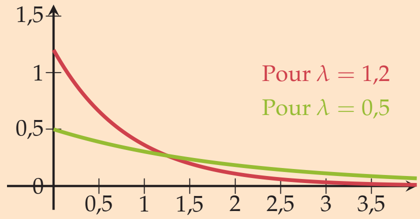
1) Sous forme décimale, 17h15= 17,25h puis $P(17 \leqslant X \leqslant 17{,}25) = \dfrac{17{,}25-17}{18-17} = 0{,}25$.
2) On a $E(X) = \dfrac{17+18}{2} = 17{,}5$ donc leurs parents peuvent espérer les voir arriver à 17h30.

REMARQUE : Pour la question 1 de la méthode 1, comme $f : t \mapsto \dfrac{1}{18-17} = 1$ sur $[17\ ;\ 18]$ est la fonction de densité de X, on aurait aussi pu calculer $P(17 \leqslant X \leqslant 17{,}25) = \displaystyle\int_{17}^{17{,}25} 1\,\mathrm{d}t = [t]_{17}^{17{,}25} = 17{,}25 - 17 = 0{,}25$.

3. Loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$)

DÉFINITION

Une variable aléatoire X suit la **loi exponentielle de paramètre** λ où $\lambda > 0$ si elle admet pour densité la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.



Notation : « X suit la loi exponentielle de paramètre λ » s'écrit aussi « X suit la loi $\mathscr{E}(\lambda)$ ».

PROPRIÉTÉ

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{E}(\lambda)$ et a, c et d trois réels positifs. On a alors :

- $P(c \leqslant X \leqslant d) = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$
- $P(X \leqslant a) = 1 - e^{-\lambda a}$
- $P(X \geqslant a) = e^{-\lambda a}$

PREUVE

- Pour tous réels c et d positifs, on a $P(c \leqslant X \leqslant d) = \int_c^d \lambda e^{-\lambda t}\,dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_c^d$ $= -e^{-\lambda d} - \left(-e^{-\lambda c}\right) = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$.
- En prenant $c = 0$ et $d = a$ dans le résultat précédent, on trouve $P(X \leqslant a) = P(0 \leqslant X \leqslant a)$ $= e^{-\lambda \times 0} - e^{-\lambda a} = 1 - e^{-\lambda a}$.
- On a $P(X \geqslant a) = 1 - P(X < a) = 1 - P(X \leqslant a) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda a}\right) = e^{-\lambda a}$.

PROPRIÉTÉ

On considère une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre λ de densité f et on appelle espérance mathématique de X le nombre $E(X) = \lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x t f(t)\,dt$.

On a alors $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.

PREUVE

La fonction f est définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$.

Posons alors pour tout réel t positif $g(t) = t f(t) = t\lambda e^{-\lambda t}$: il s'agit alors de connaître une primitive de g pour calculer l'intégrale.

La fonction G définie sur $[0\,;+\infty[$ par $G(t) = \left(-t - \dfrac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda t}$ est une primitive de g.

En effet $G'(t) = -1 \times e^{-\lambda t} + \left(-t - \dfrac{1}{\lambda}\right) \times \left(-\lambda e^{-\lambda t}\right) = -e^{-\lambda t} + \lambda t e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t} = \lambda t e^{-\lambda t}$.

On a alors $\displaystyle\int_0^x t f(t)\,dt = [G(t)]_0^x = \left(-x - \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda x} - \left(-0 - \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda 0} = -x e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda}$.

On a donc $E(X) = \lim\limits_{x \to +\infty} -x e^{-\lambda x} - \dfrac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} + \dfrac{1}{\lambda} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-\lambda x e^{-\lambda x}}{\lambda} - \dfrac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} + \dfrac{1}{\lambda}$.

Comme $\lambda > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} -\lambda x = -\infty$:

- par composition, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-\lambda x} = 0$.
- par composition et croissance comparée, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} -\lambda x e^{-\lambda x} = 0$.

Finalement, on obtient bien $E(X) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-\lambda x e^{-\lambda x}}{\lambda} - \dfrac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} + \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{\lambda}$.

MÉTHODE 2 Calculer avec une loi exponentielle

► Ex. 30 p. 371

Exercice d'application On considère que le temps d'attente en minutes à un guichet du service après-vente d'un magasin peut être modélisé par une variable aléatoire T suivant la loi exponentielle de paramètre 0,2.

1) Calculer au millième près la probabilité d'attendre un temps inférieur ou égal à 5 minutes.
2) Calculer au millième près la probabilité d'attendre plus de 10 minutes.
3) Un client se présente au guichet. Quel temps peut-il « espérer » attendre ?

Correction

1) On calcule $P(0 \leqslant T \leqslant 5) = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}2\times 5} = 1 - \mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}632$.
2) On calcule $P(T \geqslant 10) = \mathrm{e}^{-0{,}2\times 10} = \mathrm{e}^{-2} \approx 0{,}135$.
3) $E(T) = \dfrac{1}{0{,}2} = 5$ donc le client peut espérer attendre 5 minutes.

Remarque : Dans le cas de la première probabilité, un calcul d'intégrale était envisageable : la fonction de densité de T est la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(t) = 0{,}2\mathrm{e}^{-0{,}2t}$.
La probabilité d'attendre un temps inférieur ou égal à 5 minutes est donc :
$P(0 \leqslant T \leqslant 5) = \displaystyle\int_0^5 0{,}2\mathrm{e}^{-0{,}2t}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-0{,}2t}\right]_0^5 = -\mathrm{e}^{-0{,}2\times 5} - \left(-\mathrm{e}^{-0{,}2\times 0}\right) = 1 - \mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}632$.

MÉTHODE 3 Déterminer le paramètre λ d'une loi exponentielle

► Ex. 32 p. 371

Dans les cas où une information (probabilité ou espérance) peut être exploitée, on pose l'équation issue des formules du cours et on résout cette équation pour déterminer λ.

Exercice d'application

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{E}(\lambda)$ avec $P(X \leqslant 5) = 0{,}2$. Déterminer λ.

Correction

D'après l'énoncé, on a $P(X \leqslant 5) = 0{,}2$ donc $1 - \mathrm{e}^{-5\lambda} = 0{,}2$.
Résolvons donc cette équation : $1 - \mathrm{e}^{-5\lambda} = 0{,}2 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-5\lambda} = 0{,}8 \Leftrightarrow \ln\left(\mathrm{e}^{-5\lambda}\right) = \ln(0{,}8)$
$\Leftrightarrow -5\lambda = \ln(0{,}8)$ donc $\lambda = \dfrac{\ln(0{,}8)}{-5} \approx 0{,}045$.

PROPRIÉTÉ

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et deux nombres $t > 0$ et $h > 0$.
La probabilité conditionnelle $P_{(X>t)}(X > t+h)$ est égale à la probabilité $P(X > h)$.
On dit que la loi exponentielle est **sans vieillissement** ou **avec absence de mémoire**.

PREUVE Par définition, on a : $P_{(X>t)}(X > t+h) = \dfrac{P((X>t)\cap(X>t+h))}{P(X>t)}$
$= \dfrac{P(X>t+h)}{P(X>t)} = \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda(t+h)}}{\mathrm{e}^{-\lambda t}} = \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda t}\times\mathrm{e}^{-\lambda h}}{\mathrm{e}^{-\lambda t}} = \mathrm{e}^{-\lambda h} = P(X > h)$.

Exemple On considère un appareil dont la durée de vie en années suit la loi exponentielle de paramètre 0,05 : d'après la propriété, $P_{(X>4)}(X > 9) = P_{(X>4)}(X > 4+5) = P(X > 5)$.
Concrètement, si l'appareil a déjà fonctionné 4 ans, la probabilité qu'il fonctionne encore 5 ans de plus est égale à la probabilité (non conditionnelle) qu'il fonctionne plus de 5 ans.

4. Lois normales

A. Loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$

DÉFINITION

Une variable aléatoire est centrée lorsque son espérance vaut 0 et elle est réduite lorsque son écart-type vaut 1.

THÉORÈME : Théorème de Moivre-Laplace

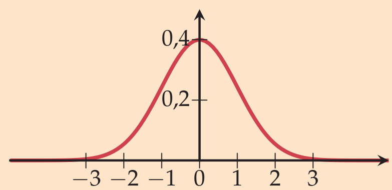
Soit X_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n\ ;\ p)$ et $Z = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$, variable aléatoire centrée réduite. Alors pour tous réels a et b tels que $a \leqslant b$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} P(a \leqslant Z \leqslant b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x.$$

DÉFINITION

Une variable aléatoire X suit la **loi normale centrée réduite** $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$ si elle admet pour densité la fonction f (dont la courbe est donnée ci-contre) définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}.$$



Autrement dit, pour tous réels a et b tels que $a \leqslant b$, on a :

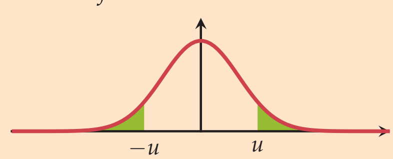
$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x.$$

Remarque : Comme on ne peut pas calculer l'intégrale à l'aide d'une primitive (car cette fonction de densité n'en admet pas d'explicite), on utilise une calculatrice pour calculer des probabilités de la forme $P(a \leqslant X \leqslant b)$ ou pour trouver un nombre x tel que $P(X \leqslant x) = p$ avec p donné (voir ► MÉTHODE 4 p. 365).

PROPRIÉTÉ

Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ la fonction de densité d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$.

- L'aire totale entre la courbe représentant la fonction de densité f et l'axe des abscisses est 1.
- f est une fonction paire, donc sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
  Par un argument de symétrie, pour tout réel u, on a :
  $$P(X \leqslant -u) = P(X \geqslant u).$$



Remarque : Pour $u = 0$, on a $P(X \leqslant 0) = P(X \geqslant 0) = 0{,}5$.

PROPRIÉTÉ

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$, de fonction de densité f. Alors

- $E(X) = \lim\limits_{x \to -\infty} \displaystyle\int_x^0 tf(t)\mathrm{d}t + \lim\limits_{y \to +\infty} \int_0^y tf(t)\mathrm{d}t = 0$
- $V(X) = 1$ et $\sigma(X) = 1$.

MÉTHODE 4 Calculer avec la loi $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$

► Ex. 41 p. 373 CALC

Exercice d'application

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$.

1) À l'aide d'une calculatrice, déterminer une valeur approchée au millième de :

a) $P(2 \leqslant X \leqslant 3)$ b) $P(X \leqslant 0{,}7)$ c) $P(X > -0{,}2)$

2) a) Déterminer t tel que $P(X \leqslant t) = 0{,}25$. b) Déterminer u tel que $P(X > u) = 0{,}4$.

Correction

1) a) **Calculatrice TI**

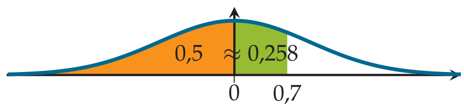
- On accède au menu **distrib** en appuyant sur la touche 2nde puis la touche var
- On choisit `NormalFrep(` et on écrit `NormalFrep(2,3,0,1)`.

Calculatrice Casio

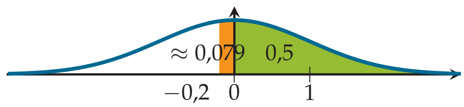
- Dans le menu **RUN**, on appuie sur OPTN puis **STAT** puis **DIST** puis **NORM** puis **Ncd**.
- On écrit alors `NormCD(2,3,1,0)`.

On obtient $P(2 \leqslant X \leqslant 3) \approx 0{,}021$.

b) La calculatrice donne $P(0 \leqslant X \leqslant 0{,}7) \approx 0{,}258$ donc
$P(X \leqslant 0{,}7) = P(X < 0) + P(0 \leqslant X \leqslant 0{,}7)$
$\approx 0{,}5 + 0{,}258 = 0{,}758$.



c) La calculatrice donne $P(-0{,}2 < X < 0) \approx 0{,}079$ donc
$P(X > -0{,}2) = P(-0{,}2 < X < 0) + P(X \geqslant 0)$
$\approx 0{,}079 + 0{,}5 = 0{,}579$.



2) a) **Calculatrice TI**

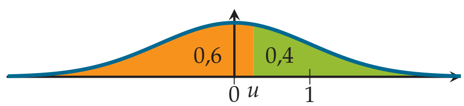
- Dans le menu **distrib**, on choisit `FracNormale(` et on écrit `FracNormale(0.25,0,1)`.

Calculatrice Casio

- Dans le menu **STAT** > **DIST** > **NORM**, on choisit **InvN** et on écrit `InvNormCD(0.25,1,0)`.

On obtient $t \approx -0{,}674$.

b) $P(X > u) = 0{,}4 \Leftrightarrow P(X \leqslant u) = 0{,}6$.
On trouve $u \approx 0{,}253$.

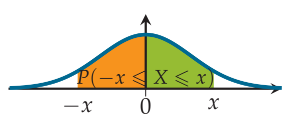


THÉORÈME : ROC

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$ et $\alpha \in]0\ ;\ 1[$.
Alors il existe un unique réel $u_\alpha > 0$ tel que $P(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha$.

PREUVE Soit $\alpha \in]0\ ;\ 1[$, on a alors $1 - \alpha \in]0\ ;\ 1[$.

Sur $[0\ ;\ +\infty[$, soit $f : x \mapsto P(-x \leqslant X \leqslant x) = 2P(0 \leqslant X \leqslant x) = 2\displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$
par symétrie de la fonction de densité de la loi $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$.



Comme $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ est une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$:

- $f = 2g$ est dérivable donc **continue** sur $[0\ ;\ +\infty[$;
- $f'(x) = 2g'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} > 0$ donc f est **strictement croissante** sur $[0\ ;\ +\infty[$.

De plus, $f(0) = P(-0 \leqslant X \leqslant 0) = P(X = 0) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} P(-x \leqslant X \leqslant x) = 1$ par définition d'une loi à densité. Comme $\mathbf{1}-\alpha \in [\mathbf{0}\ ;\ \mathbf{1}[$, d'après le théorème de bijection, l'équation $f(x) = 1 - \alpha$ admet une unique solution notée u_α sur $[0\ ;\ +\infty[$ c'est-à-dire qu'il existe un unique réel $u_\alpha > 0$ tel que $P(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha$.

VALEURS PARTICULIÈRES : En particulier, $u_{0{,}05} \approx 1{,}96$ et $u_{0{,}01} \approx 2{,}58$.
Autrement dit, $P(-1{,}96 \leqslant X \leqslant 1{,}96) \approx 0{,}95$ et $P(-2{,}58 \leqslant X \leqslant 2{,}58) \approx 0{,}99$.

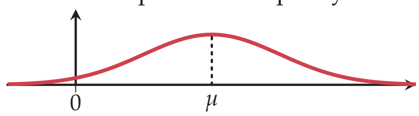
B. Lois normales $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$

DÉFINITION

Soit μ et σ deux réels avec $\sigma > 0$. On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi normale** $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$ si $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.

REMARQUES :

- Il en résulte que si X suit la loi $\mathcal{N}(0\,;\,1)$ alors $\mu + \sigma X$ suit la loi $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$.
- Si X suit la loi $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$, alors sa densité f est donnée par $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.
  La courbe de f est appelée **gaussienne** et est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \mu$ ce qui permet d'en déduire des probabilités par symétrie autour de μ.



MÉTHODE 5 Calculer avec une loi $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$

► Ex. 47 p. 374 CALC

Exercice d'application

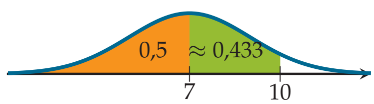
1) Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(7\,;\,2^2)$.
À l'aide d'une calculatrice, déterminer une valeur approchée au millième de :
a) $P(6 \leqslant X \leqslant 9)$ b) $P(X < 10)$ c) $P(X \geqslant 8)$

2) Soit Y une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(6\,;\,3^2)$.
À l'aide d'une calculatrice, déterminer une valeur approchée au millième de :
a) t tel que $P(Y < t) = 0{,}95$. b) u tel que $P(Y \geqslant u) = 0{,}1$.

Correction

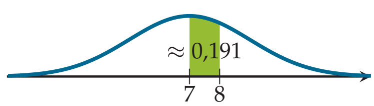
1) a) On entre `NormalFrep(6,9,7,2)` ou `NormCD(6,9,2,7)` selon le modèle de calculatrice et on obtient $P(6 \leqslant X \leqslant 9) \approx 0{,}533$.

b) • Une calculatrice donne $P(7 < X < 10) \approx 0{,}433$ donc $P(X < 10) = P(X \leqslant 7) + P(7 < X < 10)$ $\approx 0{,}5 + 0{,}433 = 0{,}933$.



• Pour calculer $P(X < a)$, on peut aussi calculer $P\left(-10^{99} \leqslant X < a\right)$ avec une calculatrice. On obtient alors $P\left(-10^{99} \leqslant X < 10\right) \approx 0{,}933$.

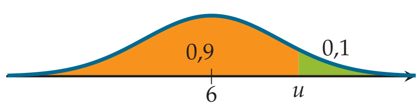
c) • La calculatrice donne $P(7 \leqslant X < 8) \approx 0{,}191$ donc $P(X \geqslant 8) = P(X \geqslant 7) - P(7 \leqslant X < 8)$ $\approx 0{,}5 - 0{,}191 = 0{,}309$.



• Pour calculer $P(X \geqslant a)$, on peut aussi calculer $P\left(a \leqslant X \leqslant 10^{99}\right)$ avec une calculatrice. on obtient alors $P\left(8 \leqslant X \leqslant 10^{99}\right) \approx 0{,}309$.

2) a) On entre `FracNormale(0.95,6,3)` ou `InvNormCD(0.95,3,6)` selon le modèle de calculatrice et on obtient $t \approx 10{,}935$.

b) On a $P(X \geqslant u) = 0{,}1 \Leftrightarrow P(X < u) = 0{,}9$.
Une calculatrice donne $u \approx 9{,}845$.



REMARQUE : Ces méthodes utilisant le fait que $P(X \leqslant a) \approx P(-10^{99} \leqslant X \leqslant a)$ et $P(X \geqslant a) \approx P(a \leqslant X \leqslant 10^{99})$ peuvent également être utilisées dans le cas particulier de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.

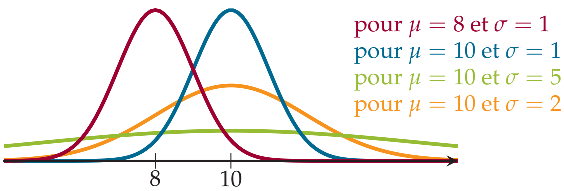
PROPRIÉTÉ

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$. On a alors :

- $E(X) = \mu$;
- $V(X) = \sigma^2$ et $\sigma(X) = \sigma$.

REMARQUES :

- Plus σ est petit, plus les valeurs prises par X sont concentrées autour de la moyenne.



- On peut considérer que sous certaines conditions (par exemple $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$), la loi $\mathcal{N}\left(np\,;\,\sqrt{np(1-p)}^{\,2}\right)$ approxime convenablement la loi $\mathscr{B}(n\,;\,p)$.

MÉTHODE 6 Centrer et réduire pour déterminer des paramètres d'une loi

► Ex. 54 p. 375

Centrer et réduire une variable aléatoire suivant une loi normale de paramètre(s) inconnu(s) permet de travailler avec la loi connue $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.

Exercice d'application On modélise par une loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ le temps T (en secondes) mis par un sportif amateur pour parcourir un 100 mètres.
Ce sportif a remarqué qu'il mettait en moyenne 13 secondes à parcourir la distance, et qu'il arrivait à descendre en dessous des 12 secondes pour 5 % des courses.
Déterminer les valeurs de μ et σ.

Correction

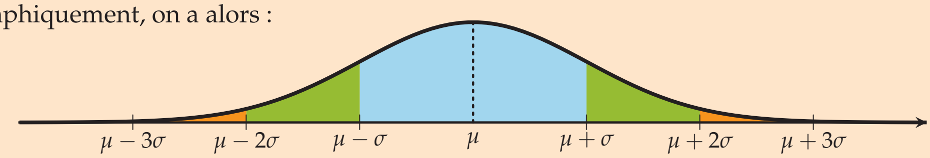
- Le temps moyen pour parcourir 100 mètres est de 13 secondes donc l'espérance μ vaut 13.
- On sait de plus que $P(T \leqslant 12) = 0{,}05$.
  Posons $Z = \dfrac{T-13}{\sigma}$, la variable aléatoire Z suit alors la loi normale centrée réduite.
  De plus, $T \leqslant 12 \Leftrightarrow \dfrac{T-13}{\sigma} \leqslant \dfrac{-1}{\sigma}$ d'où $P(T \leqslant 12) = P\left(Z \leqslant \dfrac{-1}{\sigma}\right) = 0{,}05$.
  Or, à l'aide d'une calculatrice, on trouve que le réel u tel que $P(Z \leqslant u) = 0{,}05$ vaut approximativement $-1{,}645$ donc $\dfrac{-1}{\sigma} \approx -1{,}645$ et $\sigma \approx \dfrac{1}{1{,}645} \approx 0{,}608$.

PROPRIÉTÉ : Quelques intervalles remarquables

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$. On a alors :

- $P(X \in [\mu-\sigma\,;\,\mu+\sigma]) = P(\mu-\sigma \leqslant X \leqslant \mu+\sigma) \approx 0{,}68$;
- $P(X \in [\mu-2\sigma\,;\,\mu+2\sigma]) = P(\mu-2\sigma \leqslant X \leqslant \mu+2\sigma) \approx 0{,}954$;
- $P(X \in [\mu-3\sigma\,;\,\mu+3\sigma]) = P(\mu-3\sigma \leqslant X \leqslant \mu+3\sigma) \approx 0{,}997$.

Graphiquement, on a alors :



où l'aire du domaine en bleu est environ 0,68, l'aire du domaine en bleu et vert est environ 0,954 et l'aire du domaine en bleu, vert et orange (jusqu'à $\mu-3\sigma$ et $\mu+3\sigma$) est environ 0,997.

S'entraîner

Activités mentales

1 Une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[0\,;\,100]$.

1) Que vaut $P(X < 20)$?

2) Calculer $E(X)$.

2 Lorsqu'il joue à son jeu favori et qu'il doit prendre une décision au hasard, Paul regarde sa montre et si la trotteuse indique entre 45 et 60 secondes, il répond par l'affirmative.

1) Quelle loi suit la variable aléatoire modélisant la valeur donnée par la trotteuse (en supposant son mouvement continu et uniforme) ?

2) Quelle est la probabilité qu'il réponde de manière affirmative ?

3 Donner la fonction de densité de la loi uniforme :

1) $\mathscr{U}\,([-1\,;\,1])$ **3)** $\mathscr{U}\,([-10\,;\,20])$

2) $\mathscr{U}\,([0\,;\,120])$ **4)** $\mathscr{U}\,([-0{,}1\,;\,0{,}3])$

4 Y est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}001$.
Calculer sous forme exacte :

1) $P(Y < 1\,500)$ **3)** $P(Y \geqslant 1\,000)$

2) $P(400 \leqslant Y \leqslant 2\,000)$ **4)** $P_{Y>1\,000}(Y > 2\,000)$

5 Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ de densité f. On sait que $f(0) = 0{,}5$.

1) Déterminer la valeur de λ.

2) Que vaut $E(X)$?

6 Une variable aléatoire D suit une loi exponentielle de paramètre λ. On sait que $P(D > 3) = \mathrm{e}^{-0{,}9}$.

1) Déterminer λ.

2) Calculer $P(D \leqslant 2)$.

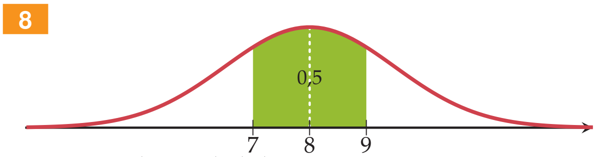
7 On a mené une étude statistique dans un lycée qui permet de dire que, si un élève arrive en retard, son retard peut être modélisé par une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. Pour les retardataires, le temps moyen de retard est 3 minutes.

1) Déterminer λ.

2) Déterminer la probabilité que le retard soit de moins de 3 minutes.

Dans les exercices **8** à **10**, on a tracé les courbes représentatives des fonctions de densité de variables aléatoires X, Y et Z suivant des lois $\mathscr{N}\left(\mu\,;\,\sigma^2\right)$ ainsi que leur axe de symétrie respectif et écrit l'aire des domaines colorés.

8

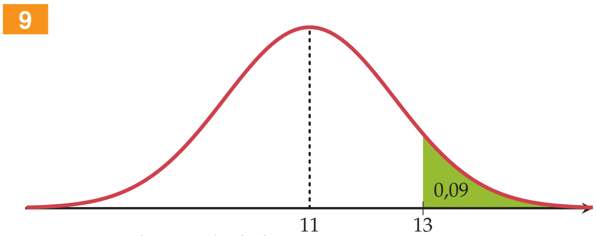


Déterminer les probabilités suivantes.

1) $P(8 < X < 9)$ **3)** $P(X \leqslant 9)$

2) $P(X \geqslant 9)$ **4)** $P_{(X>7)}(X \leqslant 8)$

9

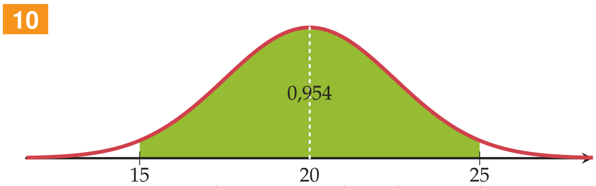


Déterminer les probabilités suivantes.

1) $P(Y \leqslant 9)$ **3)** $P(Y \geqslant 9)$

2) $P(11 < Y \leqslant 13)$ **4)** $P_{(Y>9)}(Y \leqslant 13)$

10



Déterminer une valeur approchée de μ et de σ.

11 On considère une variable aléatoire X suivant une loi normale de paramètres $\mu = 5$ et σ inconnu telle que $P(-7 \leqslant X \leqslant 17) \approx 0{,}997$.

1) Déterminer une valeur approchée de σ.

2) En déduire les probabilités suivantes sans utiliser une calculatrice.

a) $P(1 \leqslant X < 9)$ **b)** $P(5 < X < 9)$

12 On considère une variable aléatoire X suivant une loi $\mathscr{N}(3\,;\,\sigma^2)$ et telle que $P(X < 1) = 0{,}4$.
Déterminer les probabilités suivantes sans calculatrice.

1) $P(1 \leqslant X < 3)$ **2)** $P(X > 5)$ **3)** $P_{(X<5)}(X \geqslant 1)$

13 On considère une variable aléatoire X suivant une loi normale de paramètres μ inconnu et $\sigma = 2$ telle que $P(X \geqslant 11) \approx 0{,}001\,5$.

1) Déterminer μ.

2) En déduire $P(X < 5)$ sans calculatrice.

Variables aléatoires à densité

14 Parmi les exemples, donner ceux que l'on peut modéliser à l'aide d'une variable aléatoire pouvant prendre pour valeurs tous les réels d'un intervalle et, le cas échéant, indiquer cet intervalle.

1) On étudie le temps d'attente à l'accueil d'un standard téléphonique.

2) On lance un dé à 12 faces et on gagne 5 euros si l'on obtient un nombre supérieur ou égal à 10, on perd 2 euros sinon.
On étudie le gain obtenu.

3) En Europe, on estime qu'il y a 30 % de personnes myopes. On choisit au hasard un groupe de 50 personnes au hasard.
On étudie le nombre de personnes myopes dans ce groupe.

4) On étudie la taille des élèves d'un collège.

5) On étudie le temps avant qu'une voiture rouge passe à un carrefour.

15 On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,2]$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}x$.

1) Montrer que f est une fonction de densité sur $[0\,;\,2]$.

2) Soit X la variable aléatoire admettant f pour densité.
Calculer les probabilités suivantes :

a) $P(0{,}5 \leqslant X \leqslant 1{,}5)$ **c)** $P(X > 1)$

b) $P(X \leqslant 1)$ **d)** $P(0 \leqslant X \leqslant 2)$

16 Soit a un réel strictement positif. On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,1]$ par $f(x) = ax^2$.

1) Déterminer la valeur de a telle que f soit une fonction de densité sur $[0\,;\,1]$.

2) Soit X la variable aléatoire qui suit la loi de densité f pour la valeur de a trouvée à la question précédente.
Calculer les probabilités suivantes :

a) $P(0{,}1 \leqslant X \leqslant 0{,}5)$ **c)** $P(X < 0{,}5)$

b) $P(X \leqslant 0{,}1)$ **d)** $P_{(X \geqslant 0{,}5)}(X \geqslant 0{,}1)$

17 On considère la fonction g définie sur $[0\,;\,\pi]$ par $g(x) = \dfrac{1}{2}\sin(x)$.

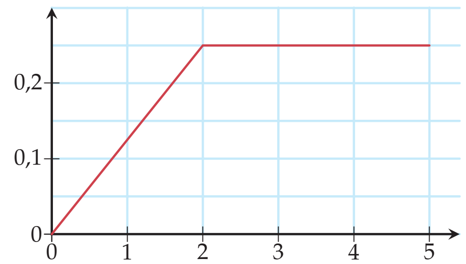
1) Montrer que g est une fonction de densité sur $[0\,;\,\pi]$.

2) Soit X la variable aléatoire suivant la loi de densité g.

a) Calculer $P\left(X \leqslant \dfrac{\pi}{3}\right)$.

b) Déterminer la valeur du nombre a telle que $P(X \leqslant a) = P(X \geqslant a)$.

18 On considère une variable aléatoire X dont la fonction de densité sur $[0\,;\,5]$ est représentée ci-dessous :

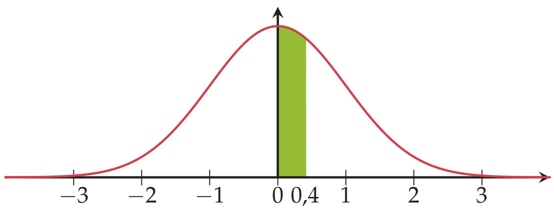


Déterminer :

1) $P(0 \leqslant X \leqslant 1)$ **3)** $P(1 \leqslant X \leqslant 4)$

2) $P(2 \leqslant X \leqslant 4)$ **4)** $P(X < 3)$

19 On considère une variable aléatoire X dont la fonction de densité sur $]-\infty\,;\,+\infty[$ est représentée ci-dessous :

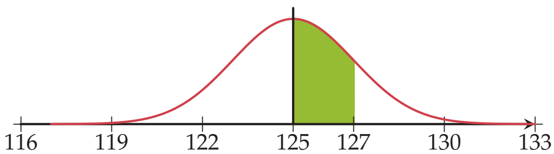


On admet que la courbe de cette fonction est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et que $P(0 \leqslant X \leqslant 0{,}4) = 0{,}155$.
Donner une valeur approchée de :

1) $P(-0{,}4 \leqslant X \leqslant 0)$ **3)** $P(X \leqslant 0{,}4)$

2) $P(X > 0{,}4)$ **4)** $P(-0{,}4 \leqslant X \leqslant 0{,}4)$

20 On considère une variable aléatoire X dont la fonction de densité sur $]-\infty\,;\,+\infty[$ est représentée ci-dessous :



On admet que la courbe de cette fonction est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 125$ (tracée ci-dessus) et que $P(125 \leqslant X \leqslant 127) = 0{,}341$.
Donner une valeur approchée de :

1) $P(123 \leqslant X \leqslant 125)$ **3)** $P(X \leqslant 123)$

2) $P(X > 125)$ **4)** $P(127 \leqslant X)$

Loi uniforme

21 On choisit au hasard un nombre réel dans l'intervalle $[10\ ;\ 100]$.

1) Comment peut-on modéliser ce choix ?

2) Calculer les probabilités :

a) que ce nombre soit dans l'intervalle $[15\ ;\ 35]$;

b) que ce nombre soit égal à 42,5 ;

c) que ce nombre soit strictement supérieur à 52,5.

22 ► MÉTHODE 1 p. 361

On modélise le choix d'un nombre réel dans l'intervalle $[0\ ;\ 7]$ par une variable aléatoire X suivant une loi uniforme.

1) Calculer les probabilités :

a) $P(X \in [1\ ;\ 5{,}5])$; **b)** $P(2{,}7 \leqslant X < 6)$.

2) Que vaut l'espérance de X ?

23 La commande « =ALEA() » du tableur permet d'obtenir au hasard un nombre dans l'intervalle $[0\ ;\ 1[$.

1) Quel type de nombre va fournir la commande « =4*ALEA()−1 » ?

2) Quelle loi peut-on choisir pour la variable aléatoire donnant le résultat obtenu ?

3) Calculer alors les probabilités :

a) que ce nombre soit dans l'intervalle $[0\ ;\ 2]$;

b) que ce nombre soit inférieur ou égal à 0.

24 Y est une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[-4\ ;\ 4[$.

1) Quelle formule faut-il entrer dans un tableur pour simuler la variable aléatoire Y ?

2) Calculer $E(Y)$.

3) Calculer $P(Y^2 > 1)$ et $P_{Y<2}(Y < 1{,}5)$.

25 On considère une variable aléatoire X suivant la loi $\mathscr{U}([0\ ;\ 20])$.

1) Quelle est la fonction de densité associée à cette variable aléatoire ?

2) Que vaut l'espérance de X ?

3) Soit t un réel de l'intervalle $([0\ ;\ 20])$. Déterminer l'expression de $P(X \leqslant t)$ en fonction de t.

26 Une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur $[0\ ;\ a]$ (où a est un nombre strictement positif) dont la fonction densité est donnée par $f(x) = 0{,}02$.

1) Déterminer la valeur de a.

2) Calculer les probabilités :

a) $P(X \in [0\ ;\ \pi])$ **c)** $P(X^2 + 2X = 0)$

b) $P(1 \leqslant X < 12{,}2)$ **d)** $P(X^2 < 9)$

27 Camille a dit à Solène qu'il passerait la voir chez elle pour récupérer un meuble entre 10h et 12h. N'ayant pas prévu d'heure précise, il peut arriver à tout instant.

1) Quelle loi suit la variable aléatoire H donnant l'heure d'arrivée de Camille ?

2) Calculer la probabilité que Camille arrive :

a) avant 11h20 **c)** entre 10h et 10h05

b) à 11h précise

3) Camille n'est toujours pas arrivé à 10h40.
Quelle est la probabilité qu'il arrive avant 11h20 ?

28 En rentrant de soirée, Léo sait qu'il va arriver dans la station de métro la plus proche entre 1h et 1h30. On fait l'hypothèse que son heure d'arrivée dans la station suit une loi uniforme. Depuis minuit il passe un métro toutes les 20 minutes dans cette station.

Quelle est la probabilité que Léo attende :

1) moins de 5 minutes ?

2) plus d'un quart d'heure ?

29 **Pour calculer** ALGO

On considère l'algorithme suivant :

Liste des variables utilisées
  `P,c,d` : *réels*
Traitement
  Afficher "Donner les valeurs c et d d'un intervalle $[c\ ;\ d]$"
  Afficher "c et d sont deux nombres entre 0 et 60"
  Demander `c`
  Demander `d`
  Donner à `P` la valeur $\dfrac{d-c}{60-0}$
Sortie
  Afficher la valeur de `P`

1) À quoi sert cet algorithme ?

2) Modifier cet algorithme pour qu'il demande des valeurs pour un intervalle $[a\ ;\ b]$ et qu'il calcule des probabilités pour une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[a\ ;\ b]$.

3) Que faut-il ajouter à ce nouvel algorithme pour qu'il calcule aussi l'espérance de cette variable aléatoire ?

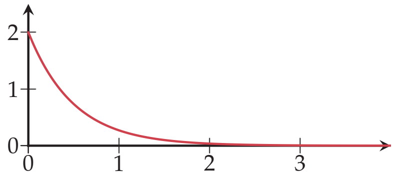
Lois exponentielles

30 ► MÉTHODE 2 p. 363

Une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre 0,3. Calculer :

1) $P(X \in [0\,;\,2])$ **3)** $P(5 < X < 10)$
2) $P(X \in [1\,;\,+\infty[)$ **4)** $P(X \in [5\,;\,10])$

31 Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ. La courbe de la fonction densité correspondante est donnée ci-dessous. Le point de coordonnées $A(0\,;\,2)$ appartient à cette courbe.



1) Déterminer la valeur de λ.
2) L'égalité $P(X < 0{,}5) = P(X \geqslant 0{,}5)$ est-elle vraie ?
3) Déterminer la valeur de t pour laquelle $P(X < t) = P(X \geqslant t)$.

32 ► MÉTHODE 3 p. 363

Une variable aléatoire Y suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1) Sachant que $P(Y > 30) = 0{,}2$, déterminer λ puis en donner une valeur approchée à 10^{-3} près.
2) On considère maintenant $\lambda = 0{,}05$. Calculer :
a) $P(Y \geqslant 15)$ **c)** $P_{(Y\geqslant 15)}(Y \geqslant 20)$
b) $P(Y \geqslant 5)$ **d)** $E(Y)$

33 Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ. On sait que $E(X) = 45$.

1) Déterminer la valeur de λ arrondie au millième.
2) A-t-on $P(X \geqslant 45) = 0{,}5$?

34 Dans le magasin où elle va retirer ses colis commandés sur Internet, Tessa sait qu'elle attend en moyenne 4 minutes. On sait que la durée d'attente en minute peut être modélisée par une variable aléatoire D suivant une loi exponentielle de paramètre λ.

1) Déterminer la valeur de λ.
2) Tessa vient retirer un colis. Calculer la probabilité :
a) que Tessa attende moins de 2 minutes ;
b) que Tessa attende plus de 5 minutes.
3) Tessa a déjà attendu 3 minutes. Quelle est la probabilité qu'elle attende au moins 2 minutes de plus ?

35 **Durée de vie d'un composant**

Un composant électronique d'un robot a une durée de vie, en année, qui peut être modélisée par une variable aléatoire T suivant une loi exponentielle de paramètre λ.

Une étude statistique a permis d'établir que $P(T < 5) = 0{,}1$.

On arrondira tous les résultats au millième.

1) Déterminer la valeur de λ.

Dans la suite, on prendra $\lambda = 0{,}02$.

2) Calculer la probabilité que ce composant ait une durée de vie supérieure ou égale à 14 ans.
3) Calculer la probabilité que ce composant ait une durée de vie inférieure ou égale à 10 ans.
4) Sachant que le composant a déjà fonctionné 7 ans, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure ou égale à 21 ans ?
5) Donner une estimation de la durée de vie moyenne de ce composant.

36 **Carbone 14**

La durée de vie, en années, d'un atome radioactif peut être modélisée par une variable aléatoire D suivant une loi exponentielle de paramètre λ.

On appelle demi-vie de cet élément le nombre réel T tel que la probabilité que cet atome se désintègre avant T années soit égale à 0,5.

Ainsi, la demi-vie du carbone 14 est 5 730 ans.

1) Calculer le paramètre λ dans le cas du carbone 14.
2) Calculer la probabilité qu'un atome de carbone 14 se désintègre :
a) avant 1 000 ans ; **b)** après 10 000 ans.
3) Déterminer la valeur de a telle que $P(D < a) = 0{,}95$ pour le carbone 14.
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

37 Un magasin vend des jeux électroniques.

On admet que ces jeux ont une durée de vie en heure modélisée par la variable aléatoire D suivant la loi exponentielle de paramètre 0,000 1.

1) Calculer la probabilité que le jeu ait une durée de vie inférieure ou égale à 5 000 heures.
2) Sachant que le jeu a déjà fonctionné 1 000 heures, quelle est la probabilité qu'il fonctionne plus de 8 000 heures ?

38 Dans un lycée, les oscilloscopes utilisés en physique-chimie ont une durée de vie, en année, modélisée par une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre λ.

On sait que la probabilité qu'un oscilloscope fonctionne plus de 8 ans est égale à 0,383.

1) Déterminer le paramètre λ. On arrondira à 10^{-4}.
Dans la suite on prendra $\lambda = 0{,}12$.

2) Interpréter et déterminer la probabilité $P(X \geqslant 3)$.

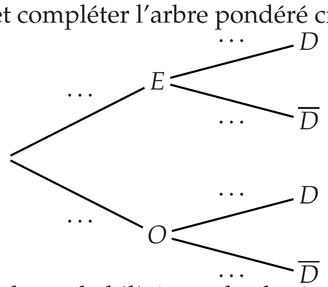
3) Interpréter et déterminer la probabilité $P_{X>2}(X > 10)$.

4) Donner une estimation de la durée de vie moyenne d'un oscilloscope.

5) Désirant changer son parc de matériel, le lycée achète 40 % d'oscilloscopes auprès du fournisseur Oscillo' et le reste auprès du magasin Electro'. Les deux fabricants ayant des productions différentes, les durées de vie moyenne des oscilloscopes qu'ils fournissent sont de 8 ans pour Oscillo' et de 5 ans pour Electro'. On admet toujours que les durées de vie des oscilloscopes sont modélisées par des variables aléatoires suivant des lois exponentielles.
Un professeur de physique-chimie prend au hasard un oscilloscope.
On note E, O et D les événements respectifs « l'appareil vient du fournisseur Electro' », « l'appareil vient du fournisseur Oscillo' » et « l'appareil fonctionne plus de dix ans »

a) Quelle est la probabilité que l'oscilloscope choisi fonctionne plus de 10 ans sachant qu'il vient du fournisseur Oscillo' ?

b) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



c) Quelle est la probabilité que la durée de vie de l'oscilloscope choisi soit supérieure ou égale à 10 ans ?

d) Quelle est la probabilité qu'il provienne de l'entreprise Electro' sachant que sa durée de vie est supérieure ou égale à 10 ans ?

39 Dans un circuit imprimé, un composant électronique a une durée de vie en années qui peut être modélisée par une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 0,125.

1) Un fabricant de circuit imprimé achète 1 000 composants électroniques et on suppose que les durées de vie des composants sont indépendantes.
Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de composants électroniques qui auront une durée de vie inférieure ou égale à 1 an.

a) Quelle loi suit X ? Préciser ses paramètres (si nécessaire, on arrondira à 10^{-2} près).

b) Calculer $P(X \leqslant 100)$.

2) Ce composant électronique est vendu 10 euros. Le fabricant propose aux clients la grille de remboursement suivante en cas de problème avec un composant :

Durée de vie	jusqu'à 2 ans	entre 2 et 4 ans	plus de 4 ans
Remboursement	5 €	3 €	0 €

Calculer une estimation de la recette moyenne (qui tient compte du prix de vente et du remboursement) d'un composant si le fabricant en vend une grande quantité.

40 **D'après Bac (Centres Étrangers - 2003)**

Une entreprise d'autocars dessert une région montagneuse. En chemin, les véhicules peuvent être bloqués par des incidents extérieurs comme des chutes de pierres, la présence de troupeaux sur la route, etc.

Un autocar part de son entrepôt. On note D la variable aléatoire qui mesure la distance en kilomètres que l'autocar va parcourir jusqu'à ce que survienne un incident et on admet que D suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \dfrac{1}{82}$, appelée aussi loi de durée de vie sans vieillissement. Dans tout l'exercice, les résultats seront arrondis au millième.

1) Calculer la probabilité que la distance parcourue sans incident soit :

a) comprise entre 50 et 100 km ;

b) supérieure à 300 km.

2) Sachant que l'autocar a déjà parcouru 350 km sans incident, quelle est la probabilité qu'il n'en subisse pas au cours des 25 prochains kilomètres ?

Loi normale $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$

41 ► MÉTHODE 4 p. 365

On considère une variable aléatoire X suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$.

Dans l'exercice, on arrondira les résultats au millième.

1) Déterminer les probabilités suivantes.

a) $P(0 \leqslant X \leqslant 0{,}5)$ **d)** $P(-1 \leqslant X \leqslant 0{,}5)$

b) $P(X \leqslant 0{,}5)$ **e)** $P(X \geqslant 1)$

c) $P(X > -0{,}5)$ **f)** $P(X < -2)$

> Pour calculer $P(X \leqslant a)$ ou $P(a \leqslant X)$, on peut calculer respectivement $P\left(-10^{99} \leqslant X \leqslant a\right)$ ou $P\left(a \leqslant X \leqslant 10^{99}\right)$ avec une calculatrice.

2) Dans chacun des cas suivants, déterminer la valeur du réel t telle que :

a) $P(X < t) = 0{,}8$ **c)** $P(0 \leqslant X \leqslant t) = 0{,}15$

b) $P(X > t) = 0{,}9$ **d)** $P(-t < X < t) = 0{,}4$

42 On considère une variable aléatoire Y suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$ et a est un réel tel que $P(Y < a) = 0{,}7$.

Déterminer les probabilités suivantes.

1) $P(Y \leqslant a)$ **3)** $P(Y \geqslant -a)$ **5)** $P(Y \leqslant -a)$

2) $P(Y > a)$ **4)** $P(0 \leqslant Y \leqslant a)$

43 On considère une variable aléatoire Z suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$.

Déterminer, en arrondissant au centième, h et t tels que :

1) $P(Z < 6t) = 0{,}99$ **2)** $P(-2h < Z < 2h) = 0{,}95$

44 Une puce qui se trouve sur l'origine d'un axe gradué en décimètre se prépare à effectuer un saut en longueur vers un autre point de l'axe.

On suppose que l'abscisse du point où retombe la puce suit la loi $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$.

On arrondira les résultats au millième.

1) Déterminer $P(-1 \leqslant X < 2)$.

2) Quelle est la probabilité que la puce retombe à son point de départ ?

3) Quelle est la probabilité que la puce parcourt plus de 1 dm ?

4) Un chat souhaite éviter que la puce ne retombe sur lui après son saut. À quelle distance doit-il se placer de la puce pour avoir 99 % de chance de l'éviter ?

45 Sigmund a vraiment du mal à gérer son argent ! La somme qu'il a sur son compte en banque (en milliers d'euros) est donnée par une variable aléatoire X suivant la loi $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$.

On donnera les résultats arrondis à 10^{-4} près.

1) Déterminer la probabilité que le compte de Sigmund soit à découvert.

2) Déterminer la probabilité que Sigmund :

a) ait entre 200 et 500 euros sur son compte ;

b) soit à découvert d'entre 100 et 600 euros.

3) S'il est à découvert, Sigmund reçoit un SMS de sa banque.

Déterminer la probabilité qu'il soit à découvert de plus de 500 euros sachant qu'il a reçu un SMS.

46 **Marche aléatoire** ALGO

On considère l'algorithme ci-dessous :

```
Liste des variables utilisées
  a : réel
  i,X : entiers
Traitement
  Donner à X la valeur 0
  Pour i variant de 1 à 100 faire
    Donner à a la valeur nombre aléatoire entre 0 et 1
    Si a<0,1 Alors
      Donner à X la valeur X+1
    Fin Si
  Fin Pour
Sortie
  Afficher X
```

1) Quelle variable aléatoire X cet algorithme permet-il de simuler ?

2) On considère le tableau suivant où Z suit la loi $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$ et où les probabilités sont arrondies à 10^{-3} près :

k	0	1	2	3	4
$P(Z \leqslant k)$	0,5	0,841	0,977	0,999	1

En appliquant le théorème de Moivre-Laplace, donner une approximation de $P(10 \leqslant X \leqslant 22)$ sans calculatrice, à l'aide de ce tableau.

3) Déterminer $P(10 \leqslant X \leqslant 22)$ avec la calculatrice et commenter les résultats obtenus.

Lois normales $\mathcal{N}(\mu\ ;\ \sigma^2)$

47 ► MÉTHODE 5 p. 366

Dans l'exercice, on arrondira les résultats au millième.

1) On considère une variable aléatoire X suivant la loi $\mathcal{N}(2\ ;\ 3^2)$. Déterminer les probabilités suivantes :

a) $P(0 \leqslant X \leqslant 3)$
b) $P(X < 2)$
c) $P(4 \geqslant X)$
d) $P(X < 1)$
e) $P(X \geqslant 3)$
f) $P(X > -2)$
g) $P_{(1<X<3)}(X \geqslant 2)$
h) $P_{(X \geqslant 2)}(X > 3)$

> Pour calculer $P(X \leqslant a)$ ou $P(a \leqslant X)$, on peut calculer respectivement $P\left(-10^{99} \leqslant X \leqslant a\right)$ ou $P\left(a \leqslant X \leqslant 10^{99}\right)$ avec une calculatrice.

2) On considère une variable aléatoire Y suivant la loi normale de paramètres $\mu = 10$ et $\sigma = 4$.
Dans chacun des cas suivants, déterminer la valeur du réel t telle que :

a) $P(Y < t) = 0{,}2$
b) $P(Y \geqslant t) = 0{,}7$
c) $P(-t < Y - 10 < t) = 0{,}9$
d) $P(t \leqslant Y \leqslant 10) = 0{,}35$
e) $P(t \leqslant Y < 9) = 0{,}1$

48 On considère une variable aléatoire Z suivant la loi normale $\mathcal{N}(8\ ;\ 4)$.

Dans l'exercice, on arrondira les résultats au dix-millième.

1) Déterminer les probabilités suivantes :

a) $P(6 \leqslant Z \leqslant 12)$
b) $P(Z > 9)$
c) $P(Z \leqslant 7{,}5)$
d) $P_{Z \geqslant 8}(Z < 10)$

2) Déterminer dans chacun des cas suivants la valeur du réel t telle que :

a) $P(Z \leqslant t) = 0{,}3$
b) $P(Z \geqslant 2t) = 0{,}4$

49 On considère une variable aléatoire X suivant la loi normale $\mathcal{N}(5\ ;\ 1{,}3^2)$.

1) Déterminer les probabilités $P(X > 2)$ et $P_{(X>1)}(X > 3)$ arrondies à 10^{-3} près.

2) La loi de X est-elle sans vieillissement ?

50 On considère une variable aléatoire Y suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu\ ;\ \sigma^2)$ et a est un réel positif tel que $P(Y < \mu + a) = 0{,}8$. Déterminer :

1) $P(\mu \leqslant Y \leqslant \mu + a)$
2) $P(Y > \mu + a)$
3) $P(Y \leqslant \mu - a)$
4) $P(\mu - a \leqslant Y \leqslant \mu + a)$

51 On considère une variable aléatoire X suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu\ ;\ \sigma^2)$ et le tableau ci-dessous :

x	-1	0	1	2	3
$P(X \leqslant x)$	0,006 2	0,030 4	0,105 6	0,266	0,5

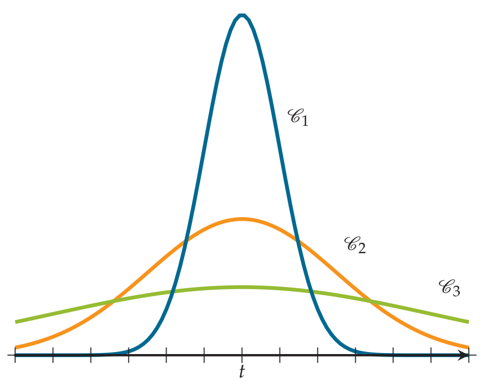
1) Déterminer les probabilités suivantes :

a) $P(0 < X \leqslant 2)$
b) $P(X \geqslant 1)$
c) $P((X < -1) \cup (X > 0))$

2) Déterminer μ.

3) En déduire σ sachant que $10\sigma \in \mathbb{N}$ et $1 < \sigma < 2$.

52 On considère les courbes ci-dessous représentant les fonctions de densité de trois variables aléatoires X, Y et Z suivant les lois respectives $\mathcal{N}\left(6\ ;\ 2{,}5^2\right)$, $\mathcal{N}\left(6\ ;\ 5^2\right)$ et $\mathcal{N}\left(6\ ;\ 1^2\right)$.



1) Graphiquement, quelle est la valeur de t ?

2) Associer chacune des courbes à la variable aléatoire lui correspondant.

53 Pour se rendre à son travail, Hiluphekile a le choix entre prendre son vélo ou prendre un bus.
On suppose que le temps de trajet à vélo (en minutes) suit la loi normale de paramètres $\mu = 43$ et $\sigma = 3$ et que le temps de trajet en bus suit la loi normale de paramètres $\mu = 38$ et $\sigma = 15$.

1) Quel est le temps moyen de parcours avec chacun des moyens de transport ?

2) Hiluphekile dispose de 45 minutes pour aller à son travail.
Quel moyen de transport lui conseiller s'il ne souhaite pas arriver en retard ?

3) Quel moyen de transport lui conseiller au retour ?

54 ► MÉTHODE 6 p. 367

X suit une loi normale de paramètres $\mu = 10$ et σ. On sait que $P(X \leqslant 11) = 0{,}8$.

1) Quelle loi suit la variable aléatoire $Z = \dfrac{X-10}{\sigma}$?
2) Déterminer la valeur de t tel que $P(Z \leqslant t) = 0{,}8$.
3) En déduire la valeur de σ.

55 **Conformité d'un produit**

Un fabricant de yaourts brassés utilise une machine pour remplir ses pots, dont la masse affichée est de 125 g. La masse de yaourt X introduite dans chaque pot suit la loi $\mathcal{N}(125\ ;\ 2^2)$ et un pot est déclaré conforme s'il contient au moins 122 g de yaourt brassé.

1) Quelle est la probabilité qu'un yaourt soit conforme ?
2) Le gérant souhaite modifier les réglages de la machine pour diminuer le nombre de pots non conformes. Il souhaite obtenir 97 % de yaourts conformes, sans changer la quantité moyenne de yaourt introduite dans les pots.
   On suppose que la masse X de yaourt suit toujours une loi normale d'espérance $\mu = 125$. On note σ' la nouvelle valeur de l'écart-type.
   a) Soit $Z = \dfrac{X-125}{\sigma'}$. Quelle loi suit Z ?
   b) Expliquer pourquoi $122 \leqslant X \Leftrightarrow -\dfrac{3}{\sigma'} \leqslant Z$.
   c) En déduire la valeur de σ'.
3) Un ingénieur lui a indiqué qu'il ne pourrait pas modifier l'écart-type, mais uniquement la moyenne. En prenant $\sigma = 2$, quelle quantité μ' de yaourt doit-être introduite pour obtenir 97 % de yaourts conformes ?

56 Frej a remarqué qu'il mettait en moyenne 20 minutes pour venir à son lycée. On suppose que la durée (en minutes) de son trajet, notée X, suit une loi normale de paramètres $\mu = 20$ et σ inconnu.

1) Chaque jour, il a cours à 8h. Il décide de partir à 7h40. Quelle est la probabilité qu'il arrive à l'heure ?
2) Ses parents étant peu satisfaits de son assiduité aux cours, il décide de partir à 7h30. Il remarque alors qu'il est en retard avec une probabilité de 0,022 8. Quelle est la valeur de σ ? On arrondira à 10^{-2} près et on utilisera cette valeur approchée dans la suite.
3) Suite à un ultimatum donné par ses parents, il désire arriver à l'heure dans 99 % des cas. À quelle heure devra-t-il partir ?
4) Peut-il arriver à l'heure à coup sûr ?

57 Une entreprise fabrique des rondelles métalliques. Une rondelle est conforme si son diamètre est compris entre 5 et 7 millimètres.

On suppose que le diamètre, en millimètre, d'une rondelle suit la loi $\mathcal{N}(6\ ;\ 0{,}5^2)$.

1) Déterminer la probabilité qu'une rondelle soit conforme. Arrondir au millième.
2) On suppose que la production de chaque rondelle est indépendante des autres.
   À combien de rondelles non conformes peut-on s'attendre dans un stock de 500 000 ?
3) Le directeur général veut améliorer la qualité de la production.
   Il souhaite diviser le nombre de rondelles non conforme par deux, en utilisant des machines plus régulières.
   Quelle nouvelle valeur de l'écart-type σ doit-il viser ? Arrondir au centième.

58 Pour des raisons de logistique, les organisateurs d'un marathon ont décidé de modéliser le temps de parcours (en heure) de chacun des 2 000 participants par la loi normale de paramètres $\mu = 3{,}5$ et $\sigma = 0{,}5$.

1) Les organisateurs ont décidé d'installer le ruban sur la ligne d'arrivée deux heures après le départ du marathon.
   Selon ce modèle, quel est la probabilité qu'un coureur pris au hasard termine la course avant l'installation du ruban ?
2) Les organisateurs souhaitent commencer la cérémonie de remise des médailles pour les trois premiers coureurs quand 95 % des coureurs seront arrivés.
   Au bout de combien de temps doivent-ils prévoir de le faire ?

59 **Question ouverte**

En observant ses résultats scolaires, Jean-Baptiste a remarqué une certaine régularité pour ses notes.

Il a relevé qu'il avait obtenu en moyenne 12,1 à ses devoirs, et qu'il n'avait pas la moyenne dans 4 % des contrôles.

Il souhaite modéliser la note qu'il obtient à un devoir par une loi normale.

Quelles valeurs doit-il choisir pour l'espérance et l'écart-type ?

60 On considère une variable aléatoire X suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$. On sait que $P(X < 14) = 0{,}066\,8$ et $P(X \geqslant 27) = 0{,}04$.

1) Quelle loi suit $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$?

2) a) Montrer que $X < 14 \Leftrightarrow Z < \dfrac{14-\mu}{\sigma}$.

b) Déterminer le réel t tel que $P(Z < t) = 0{,}066\,8$. Arrondir au centième.

c) En déduire que $14 = -1{,}5\sigma + \mu$.

3) Traduire de même $P(X \geqslant 27) = 0{,}04$ par une égalité portant sur μ et σ en arrondissant au centième.

4) En déduire les valeurs de μ et σ.

61 **Question ouverte**

Un lanceur de javelot amateur, souhaitant étudier ses performances, modélise la distance parcourue par son javelot (en mètre) par une loi normale de paramètres μ et σ inconnus. Après une semaine d'entraînement, il a relevé que dans 7,62 % des cas, ses lancers ne dépassaient pas les 50 mètres, alors que 23,75 % d'entre eux franchissaient la ligne des 65 mètres.
Quelles valeurs doit-il prendre pour μ et σ ?

62 Il y a en France 32 % de personnes qui fument.

On considère un échantillon de 1 000 personnes choisies au hasard et de manière indépendante dans la population française. On suppose que la population française est suffisamment grande pour que l'on puisse assimiler cela à un tirage au sort avec remise et on note X le nombre de personnes fumeuses dans l'échantillon.

Dans l'exercice, on arrondira les résultats à 10^{-4} près.

1) a) Quelle loi suit X ? Préciser les paramètres.

b) Déterminer la probabilité que plus du tiers des personnes interrogées soient fumeuses.

c) Déterminer la probabilité que strictement moins de 300 personnes soient fumeuses.

2) On souhaite modéliser le nombre de fumeurs dans l'échantillon par une variable aléatoire Y suivant une loi normale.

a) Quels paramètres va-t-on choisir ?

b) Reprendre alors les questions 1b) et 1c).

c) Comparer les résultats obtenus.

> Pour mieux ajuster les résultats, on peut utiliser une méthode dite de correction de continuité.

Quelques intervalles remarquables

63 X_1, X_2 et X_3 suivent des lois normales de paramètres, respectivement $\mu_1 = 3$ et $\sigma_1 = 1$, $\mu_2 = -2$ et $\sigma_2 = 0{,}5$, $\mu_3 = 5$ et $\sigma_3 = 10$.
Sans utiliser une calculatrice, donner les probabilités suivantes :

1) $P(X_1 > 3)$

2) $P(-5 < X_3 < 15)$

3) $P(-3 \leqslant X_2 \leqslant -1)$

4) $P(X_1 < 0)$

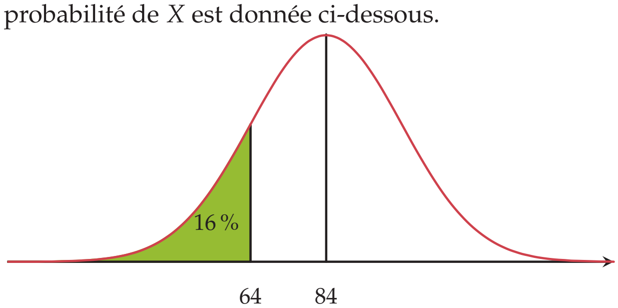
64 Nicolas étudie les résultats obtenus par les élèves de sa classe lors des contrôles. Il a remarqué que près de 95,4 % des notes tombaient entre 6 et 17.

1) Il décide de modéliser la note obtenue par un élève par une loi normale. Quelles valeurs peut-il choisir pour les paramètres μ et σ ?

2) La moyenne de la classe est de 10. Que penser du choix fait par Nicolas de privilégier la loi normale ?

65 **D'après Bac (Pondichéry–2015)**

Des études statistiques ont permis de modéliser la durée de vie, en mois, d'un type de lave-vaisselle par une variable aléatoire X suivant une loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\,;\,\sigma^2\right)$ de moyenne μ et d'écart-type σ.
De plus, on a $P(X \leqslant 64) = 0{,}16$.
La représentation graphique de la fonction densité de probabilité de X est donnée ci-dessous.



1) a) D'après le graphique, quelle valeur peut-on choisir pour μ ?

b) Toujours en exploitant le graphique, déterminer $P(64 \leqslant X \leqslant 104)$.

c) Sans calculatrice, déterminer quelle valeur approchée entière de σ on peut proposer.

2) On note Z la variable aléatoire définie par $Z = \dfrac{X-84}{\sigma}$.

a) Quelle est la loi de probabilité suivie par Z ?

b) Justifier que $P(X \leqslant 64) = P\left(Z \leqslant \dfrac{-20}{\sigma}\right)$.

c) En déduire la valeur de σ, arrondie à 10^{-3}.

Avec plusieurs lois

66 Un ingénieur souhaite acheter une machine permettant de fabriquer en série des cotons-tiges.
Le fabricant indique que le coton se détache de la tige dans 0,05 % des cas, rendant le produit défectueux.
L'ingénieur a pour intention de faire fonctionner cette machine pendant 10 ans, pour produire 5 milliards de cotons-tiges.
On suppose que le fait qu'un coton-tige soit défectueux est indépendant de l'état des autres cotons-tiges.
On note X le nombre de cotons-tiges défectueux que produira la machine pendant ces 10 ans.

1) a) Quelle loi suit X ? Préciser ses paramètres.
b) Peut-on déterminer la probabilité qu'au plus 2 504 000 cotons-tiges soient défectueux à l'aide de la calculatrice ? Du tableur ?

2) Déterminer l'espérance et la variance de X.

3) Par approximation, on suppose que la variable aléatoire T donnant le nombre, en milliard, de cotons-tiges défectueux suit une loi normale de paramètres $\mu = 2{,}5 \times 10^{-3}$ et $\sigma = 1{,}6 \times 10^{-6}$.
Déterminer une valeur approchée de la probabilité qu'au plus 2 504 000 cotons-tiges soient défectueux.

67 Cet exercice est un « vrai ou faux » : pour chacune des affirmations ci-dessous, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1)
- X_1 est une variable aléatoire suivant la loi normale de paramètres $\mu_1 = 105$ et $\sigma_1 = 2$;
- X_2 est une variable aléatoire suivant la loi normale de paramètres $\mu_2 = 10{,}5$ et $\sigma_2 = 0{,}2$.

Affirmation : $P(X_1 \geqslant 109) < P(X_2 < 10)$.

2)
- T_1 est une variable aléatoire suivant la loi normale de paramètres $\mu = 15$ et $\sigma = 5$;
- T_2 est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda = \dfrac{1}{7}$.

Affirmation : $P(T_1 > 10) > P(T_2 < 10)$.

3) Une variable aléatoire X suit une loi normale de paramètres $\mu = 20$ et σ et vérifie $P(X < 30) = 0{,}7$.
Affirmation : La valeur de σ est supérieure à 15.

4) a) Une entreprise fabrique et vend des pots de confiture de 350 g. Le contenu d'un pot doit peser entre 345 et 355 g pour être commercialisé.
La masse de confiture dans un pot (en gramme) peut être modélisée par une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance $\mu = 350$ et d'écart-type $\sigma = 2$.
Affirmation : Un pot a une probabilité inférieure à 3 % de ne pas être mis sur le marché.
b) On choisit au hasard 200 pots de confiture à l'issue de la chaîne de conditionnement.
On supposera la production suffisamment grande pour assimiler cela à un tirage avec remise.
Affirmation : La probabilité qu'au plus 50 pots pèsent moins de 349 g est supérieure à 2 %.

5) Y est une variable aléatoire suivant une loi normale de paramètres μ et σ inconnus et telle que $P(Y \leqslant 10) = 0{,}023$ et $P(Y \geqslant 25) = 0{,}159$.
Affirmation : L'espérance de Y est inférieure à l'espérance d'une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\dfrac{1}{22}$.

68 **Temps de guérison**

Winston a remarqué que lorsqu'il est enrhumé, il se rétablit en moyenne en 4 jours et au minimum en 1 jour. Il souhaite modéliser son temps de guérison (en jour) par une variable aléatoire T.
Dans l'exercice, on arrondira à 10^{-3} près si nécessaire.

Partie A

On admet dans cette partie que T suit une loi uniforme.

1) Donner les paramètres de cette loi uniforme.

2) Trouver un intervalle I de la forme $[4-u\ ;\ 4+u]$ tel que $P(T \in I) = 0{,}95$.

3) Interpréter le résultat de la question précédente dans les termes de l'énoncé.

Partie B : Loi exponentielle

Expliquer pourquoi une loi exponentielle ne convient pas pour cette modélisation.

Partie C : Loi normale

1) Expliquer pourquoi une loi normale ne devrait normalement pas convenir pour cette modélisation.

2) Julia, une ami de Winston, lui propose néanmoins de modéliser le temps de guérison T par une variable aléatoire $\mathcal{N}(4\ ;\ \sigma^2)$ telle que $P(T \leqslant 1) = 0{,}01$.
a) Expliquer le choix de cette loi.
b) Déterminer σ.
c) Trouver un intervalle J de la forme $[4-u\ ;\ 4+u]$ tel que $P(T \in J) = 0{,}95$.

69 D'après Bac (Antilles-Guyane - 2014)

Une entreprise de jouets en peluche souhaite commercialiser un nouveau produit et à cette fin, effectue divers tests permettant de rejeter les peluches ne répondant pas aux normes en vigueur.

D'expérience, le concepteur sait que 9 % des nouveaux jouets ne répondent pas aux normes.

À l'issue des tests, il est noté que :

- 96 % des peluches répondant aux normes sont acceptées par les tests ;
- 97 % des peluches ne répondant pas aux normes ne sont pas acceptées à l'issue des tests.

Partie A

On prélève une peluche au hasard dans la production de l'entreprise.

Calculer la probabilité qu'une peluche qui a été acceptée à l'issue des tests soit véritablement aux normes en vigueur. Arrondir le résultat au dix-millième.

Partie B

On considère que la vie d'une peluche se termine lorsqu'elle subit un dommage majeur (déchirure, arrachage ...). On admet que la durée de vie en années d'une peluche, notée D, suit une loi $\mathscr{E}(\lambda)$.

1) On sait que $P(D \leqslant 4) = 0{,}5$. Interpréter ce résultat dans le contexte de cet exercice.
Calculer la valeur exacte de λ.

2) On prendra ici $\lambda = 0{,}173\,3$.
Le jour de ses trois ans, un enfant qui joue avec cette peluche depuis sa naissance décide, voyant qu'elle est encore en parfait état, de la donner à sa sœur qui vient de naître.
Calculer la probabilité pour que sa sœur la garde sans dommage majeur au moins cinq années supplémentaires. Arrondir le résultat au dix-millième.

Partie C

Un cabinet de sondages et d'expertise souhaite savoir quel est le réel intérêt des enfants pour ce jouet. À la suite d'une étude, il apparaît que pour un enfant de quatre ans, le nombre de jours, noté J, où la peluche est son jouet préféré suit une loi normale de paramètres μ et σ. Il apparaît que $\mu = 358$ jours.

1) Soit $X = \dfrac{J - 358}{\sigma}$. Quelle est la loi suivie par X ?

2) On sait que $P(J \leqslant 385) = 0{,}975$. Déterminer la valeur de σ arrondie à l'entier le plus proche.

70 D'après Bac (Amérique du Nord - 2013)

Une boulangerie industrielle utilise une machine pour fabriquer des pains de campagne pesant en moyenne 400 g. Pour être vendus aux clients, ces pains doivent peser au moins 385 g. Un pain dont la masse est strictement inférieure à 385 g est un pain non-commercialisable ; un pain dont la masse est supérieure ou égale à 385 g est commercialisable.

La masse d'un pain fabriqué par la machine peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance $\mu = 400$ et d'écart-type $\sigma = 11$.

Les probabilités seront arrondies au millième le plus proche.

Partie A

On pourra utiliser le tableau suivant dans lequel les valeurs sont arrondies au millième le plus proche.

x	380	385	390	395	400
$P(X \leqslant x)$	0,035	0,086	0,182	0,325	0,5

x	405	410	415	420
$P(X \leqslant x)$	0,675	0,818	0,914	0,965

1) Calculer $P(390 \leqslant X \leqslant 410)$.

2) Calculer la probabilité p qu'un pain choisi au hasard dans la production soit commercialisable.

3) Le fabricant trouve cette probabilité p trop faible. Il décide de modifier ses méthodes de production afin de faire varier la valeur de σ sans modifier celle de μ.
Pour quelle valeur de σ la probabilité qu'un pain soit commercialisable est-elle égale à 96 % ?
On arrondira le résultat au dixième.
On pourra utiliser le résultat suivant :
lorsque Z est une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 1, on a $P(Z \leqslant -1{,}751) \approx 0{,}040$.

Partie B

Le boulanger utilise une balance électronique. Le temps de fonctionnement sans dérèglement, en jours, de cette balance électronique est une variable aléatoire T suivant une loi exponentielle de paramètre λ.

1) On sait que la probabilité que la balance électronique ne se dérègle pas avant 30 jours est de 0,913. En déduire la valeur de λ arrondie au millième.
Dans toute la suite on prendra $\lambda = 0{,}003$.

2) Quelle est la probabilité que la balance électronique fonctionne encore sans dérèglement après 90 jours, sachant qu'elle a fonctionné sans dérèglement 60 jours ?

3) Le vendeur de cette balance électronique a assuré au boulanger qu'il y avait une chance sur deux pour que la balance ne se dérègle pas avant un an.
A-t-il raison ? Si non, pour combien de jours est-ce vrai ?

71 D'après Bac (Métropole - 2014)

Dans cet exercice, on s'intéresse au mode de fonctionnement de deux restaurants : sans réservation ou avec réservation préalable.

1) Le premier restaurant fonctionne sans réservation mais le temps d'attente pour obtenir une table est souvent un problème pour les clients.
On modélise ce temps d'attente en minutes par une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre λ où λ est un réel strictement positif. On rappelle que l'espérance mathématique de X est égale à $\frac{1}{\lambda}$.
Une étude statistique a permis d'observer que le temps moyen d'attente pour obtenir une table est de 10 minutes.

a) Déterminer la valeur de λ.

b) Quelle est la probabilité qu'un client attende entre 10 et 20 minutes pour obtenir une table ?
On arrondira à 10^{-4}.

c) Un client attend depuis 10 minutes. Quelle est la probabilité qu'il doive attendre au moins 5 minutes de plus pour obtenir une table ?
On arrondira à 10^{-4}.

2) Le second restaurant a une capacité d'accueil de 70 places et ne sert que des personnes ayant réservé au préalable. La probabilité qu'une personne ayant réservé se présente au restaurant est estimée à 0,8.
On note n le nombre de réservations prises par le restaurant et Y la variable aléatoire correspondant au nombre de personnes ayant réservé qui se présentent au restaurant.
On admet que les comportements des personnes ayant réservé sont indépendants les uns des autres. La variable aléatoire Y suit alors une loi binomiale.

a) Préciser, en fonction de n, les paramètres de la loi de la variable aléatoire Y, son espérance mathématique $E(Y)$ et son écart-type $\sigma(Y)$.

b) Dans cette question, on désigne par Z une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ de moyenne $\mu = 64{,}8$ et d'écart-type $\sigma = 3{,}6$.
Calculer la probabilité p_1 de l'événement $\{Z \leqslant 71\}$ à l'aide de la calculatrice.

c) On admet que lorsque $n = 81$, p_1 est une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité $p(Y \leqslant 70)$ de l'événement $\{Y \leqslant 70\}$.
Le restaurant a reçu 81 réservations.
Quelle est la probabilité qu'il ne puisse pas accueillir certains des clients qui ont réservé et se présentent ?

72 D'après Bac (Nouvelle-Calédonie - 2014) ROC

L'objectif de cette partie est de démontrer le théorème ci-dessous :

> Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite, alors pour tout réel α appartenant à l'intervalle $]0\,;\,1[$, il existe un unique réel strictement positif u_α tel que $P\left(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha\right) = 1 - \alpha$.

Soit f la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Soit H la fonction définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$H(x) = P(-x \leqslant X \leqslant x) = \int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1) Que représente la fonction f pour la loi normale centrée réduite ?

2) Préciser $H(0)$ et la limite de $H(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

3) À l'aide de considérations graphiques, montrer que pour tout $x \geqslant 0$, on a $H(x) = 2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

4) En déduire que la dérivée H' de la fonction H sur $[0\,;\,+\infty[$ est la fonction $2f$ et dresser le tableau de variations de H sur $[0\,;\,+\infty[$.

5) Démontrer alors le théorème énoncé.

73 Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[a\,;\,b]$ où $a \leqslant 4$.

Déterminer a et b sachant que $E(X) = 5$ et $P(4 < X < 5) = \dfrac{5}{11}$.

74 **Loi exponentielle et algorithmique** ALGO

On considère une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre λ.

1) Écrire un algorithme qui :
- demande une valeur de λ et les valeurs c et d d'un intervalle $[c\,;\,d]$ inclus dans $[0\,;\,+\infty[$;
- qui fournisse la valeur de $P(X \in [c\,;\,d])$.

2) Modifier l'algorithme précédent pour qu'après avoir demandé une valeur de c, il calcule $P(X \geqslant c)$.

75 On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}$, fonction de densité de la loi exponentielle de paramètre λ.

On se propose dans cet exercice de montrer que la fonction f est bien une fonction densité.

1) Justifier que f est positive et continue sur $[0\,;\,+\infty[$.

2) a) On pose $G(x) = \displaystyle\int_0^x \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$.

Exprimer $G(x)$ en fonction de x.

b) Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} G(x)$.

c) Interpréter graphiquement ce résultat et conclure.

76 X est une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ.

On appelle F_X la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F_X(t) = P(X \leqslant t)$.

1) Déterminer l'expression de $F_X(t)$ en fonction de t (on pourra distinguer les cas $t < 0$ et $t \geqslant 0$).

2) Montrer que F_X est une fonction continue et croissante sur $\mathbb{R}$.

3) Montrer que $\displaystyle\lim_{t \to -\infty} F_X(t) = 0$ et $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} F_X(t) = 1$.

> D'une manière générale, si X est une variable aléatoire ayant pour fonction de densité f alors la fonction $F_X : x \mapsto P(X \leqslant x)$ est appelée fonction de répartition de la variable aléatoire X.

77 **Avec une équation exponentielle !**

1) Résoudre l'équation $\mathrm{e}^{-\lambda} - \mathrm{e}^{-2\lambda} = 0{,}25$.

2) Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ telle que $P(1 \leqslant X \leqslant 2) = 0{,}25$.

Déterminer $P(X \geqslant 2)$.

78 **Logarithme et algorithme** ALGO

On considère l'algorithme suivant :

1. *Liste des variables utilisées*
2. `x,A` : *réels*
3. *Traitement*
4. Donner à `x` la valeur random()
5. Donner à `A` la valeur $-\dfrac{1}{0{,}01}\ln(1-x)$
6. *Sortie*
7. Afficher la valeur de `A`

`random()` donne un nombre réel au hasard dans $[0\,;\,1[$.

1) Justifier que l'affichage de cet algorithme sera un nombre de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

2) On note A la variable aléatoire donnant le résultat final et X la variable aléatoire donnant le résultat intermédiaire x de l'algorithme.

a) Quelle loi suit X ?

b) Soit $t > 0$.

Montrer que $A \leqslant t \Leftrightarrow X \leqslant 1 - \mathrm{e}^{-0{,}01t}$.

c) En déduire $P(A \leqslant t)$ pour tout réel t.

Ce résultat prouve que A suit la loi $\mathscr{E}(0{,}01)$.

3) À quoi peut servir cet algorithme ?

79 **Symétrie de la loi normale** ROC

Le but de l'exercice est de démontrer des propriétés de symétrie pour la loi $\mathscr{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$ à partir de la loi $\mathscr{N}(0\,;\,1)$, on supposera donc connues les propriétés de symétrie de la loi $\mathscr{N}(0\,;\,1)$.

On considère une variable aléatoire X suivant une loi normale $\mathscr{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$.

1) Démontrer que $P(X \leqslant \mu) = P(X \geqslant \mu) = 0{,}5$.

2) Démontrer que pour tout réel t, on a $P(X \leqslant \mu + t) = P(X \geqslant \mu - t)$.

80 **Espérance de la loi normale** ROC

Le but de cet exercice est de démontrer que si X suit une loi normale centrée réduite, alors l'espérance de X vaut 0.

On rappelle que l'espérance de X est donnée par :

$$E(X) = \lim_{x \to -\infty} \int_x^0 tf(t)\mathrm{d}t + \lim_{y \to +\infty} \int_0^y tf(t)\mathrm{d}t$$

où f est la fonction densité de la loi normale centrée réduite.

On définit la fonction g sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = \dfrac{t}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$.

1) Déterminer une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

2) Conclure.

81 Un magasin de jouets vend des robots.
Ils sont d'apparence identique mais certains ont un défaut : la probabilité qu'un robot soit défectueux vaut 0,15.
On suppose que la durée de vie d'un robot non défectueux (respectivement défectueux) peut être modélisée par une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètres $\lambda = 0{,}2$ (respectivement $\lambda = 0{,}3$).

1) Quelle est la probabilité qu'un robot ait une durée de vie inférieure ou égale à 5 ans s'il a un défaut ?

2) Soit V la variable aléatoire donnant la durée de vie d'un robot acheté au hasard.

a) Montrer que, pour tout $t \geqslant 0$, on a :
$$P(V \geqslant t) = 0{,}85\mathrm{e}^{-0{,}2t} + 0{,}15\mathrm{e}^{-0{,}3t}.$$

b) Que penser de l'affirmation suivante : « Si un appareil a une durée de vie supérieure ou égale à 10 ans, il y a moins de 5 % de chance que ce soit un robot avec défaut » ?

82 Une compagnie aérienne souhaite optimiser l'occupation de ses avions.
Après avoir commandé une étude, elle a relevé que la longueur des jambes (pliées, en centimètres) des passagers adultes suit une loi normale de paramètres $\mu = 55$ et $\sigma = 5$.

1) Sans calculatrice, dire quel peut être l'espacement des sièges pour que 97,7 % des adultes puissent s'asseoir dans l'avion.

2) La compagnie décide d'opter pour un espacement de 64 cm entre les sièges.
Un passager sur 5 est un enfant et dispose donc toujours d'assez de place pour s'asseoir sur son siège.
Quelle est la probabilité p qu'un passager choisi au hasard ne puisse pas s'asseoir ?

3) Pour un vol, la compagnie a vendu tous les billets pour les 350 places disponibles.
Par ailleurs, l'avion dispose de 12 places avec beaucoup d'espace près des issues de secours.
En utilisant la probabilité p trouvée à la question précédente, déterminer quelle est la probabilité qu'au moins une personne ne puisse pas s'asseoir dans l'avion (sachant que le stewart peut déplacer des passagers dans l'avion).

83 Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = P(X \leqslant x)$ où X est une variable aléatoire.

84 **Une autre absence de vieillissement** ROC

On considère une variable aléatoire X suivant la loi $\mathscr{E}(\lambda)$ et s et t deux réels positifs.
Montrer que $P_{(X>s)}(X \leqslant s+t) = P(X \leqslant t)$.

85 On considère deux variables aléatoires X_1 et X_2 suivant les lois normales de paramètres, respectivement $\mu_1 = 3$ et $\sigma_1 = 1$ et $\mu_2 = -2$ et $\sigma_2 = 0{,}5$.
On admet que les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes, ce qui veut dire, en particulier que les événements de la forme $(X_1 \geqslant a)$ et $(X_2 < b)$ sont indépendants.
Le but de l'exercice est de montrer que $P(X_1 > X_2) > 0{,}95$.

1) Justifier que $P(X_1 > X_2) \geqslant P(X_1 > 0 \geqslant X_2)$.

2) Montrer que :
$$P(X_1 \geqslant 0 > X_2) = P(X_1 \geqslant 0) \times P(X_2 < 0).$$

3) Conclure sans calculatrice.

86 Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ.
Justifier à l'aide de la calculatrice qu'une valeur approchée arrondie à 10^{-5} de $P(\mu - 4\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 4\sigma)$ est 0,999 94.

87 **Variance d'une loi uniforme** ROC

On se propose de calculer la variance de la variable aléatoire X suivant une loi uniforme sur $[a\,;\,b]$ de densité f.

1) On pose $E\left(X^2\right) = \displaystyle\int_a^b t^2 f(t)\,\mathrm{d}t$. Déterminer $E\left(X^2\right)$.

2) Comme $E(X)$ et $E\left(X^2\right)$ existent, la variance de X est donnée par $V(X) = E\left(X^2\right) - (E(X))^2$.
Montrer que $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

88 **Recherche d'un paramètre** ALGO

On considère une variable X suivant une loi normale dont le paramètre σ est inconnu.
On admet que l'on dispose de deux réels a et $c > 0$ que $P(\mu - c \leqslant X \leqslant \mu + c) = a$.
Écrire un algorithme :

- qui demande les valeurs de a et c ;
- qui détermine et affiche la valeur de σ.

On admettra que le logiciel utilisé dispose d'une fonction `Inversenormale(p)` permettant de déterminer k tel que $P(Y \leqslant k) = p$ où Y suit la loi $\mathscr{N}(0\,;\,1)$.

Je teste mes connaissances

À la fin de ce chapitre, je dois être capable de :

- Connaître la fonction de densité d'une loi $\mathscr{U}([a\,;\,b])$
- Calculer dans le cadre d'une loi uniforme
- Connaître la fonction de densité d'une loi $\mathscr{E}(\lambda)$
- Calculer dans le cadre d'une loi exponentielle
- Connaître la fonction de densité de la loi $\mathscr{N}(0\,;\,1)$ et sa représentation graphique
- Calculer dans le cadre d'une loi $\mathscr{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$ en utilisant une calculatrice, un tableur ou une représentation graphique
- Connaître les valeurs approchées de la probabilité des événements $\{X \in [\mu-\sigma\,;\,\mu+\sigma]\}$, $\{X \in [\mu-2\sigma\,;\,\mu+2\sigma]\}$ et $\{X \in [\mu-3\sigma\,;\,\mu+3\sigma]\}$ lorsque X suit une loi $\mathscr{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$

QCM d'auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

Pour chaque question, plusieurs réponses sont proposées. Déterminer celles qui sont correctes.

On considère une variable aléatoire X suivant la loi uniforme sur $[0\,;\,10]$.

89 La fonction de densité associée à cette loi est la fonction f définie sur $[0\,;\,10]$ par :

a) $f(x) = 1$ b) $f(x) = \dfrac{1}{10}$ c) $f(x) = \dfrac{1}{10}x$

90 La probabilité $P(2 \leqslant X \leqslant 8)$ vaut :

a) 0,6 b) $\dfrac{8}{10}$ c) $\dfrac{3}{5}$

91 L'espérance de la variable aléatoire X est égale à :

a) 1 b) 5 c) $\dfrac{1}{10}$

On considère une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre 0,06.

92 La fonction de densité associée à cette loi est la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

a) $f(x) = \mathrm{e}^{-0{,}06x}$ b) $f(x) = -0{,}06\mathrm{e}^{-x}$ c) $f(x) = 0{,}06\mathrm{e}^{-0{,}06x}$ d) $f(x) = 0{,}06\mathrm{e}^{0{,}06x}$

93 La probabilité $P(X < 5)$ est égale à

a) $1 - \mathrm{e}^{-0{,}3}$ b) $1 - 0{,}06\mathrm{e}^{-0{,}3}$ c) $\mathrm{e}^{-0{,}3}$

94 La probabilité $P_{(X>2)}(X > 10)$ est égale à

a) $P(X > 8)$ b) $P(X > 10)$ c) $\mathrm{e}^{-0{,}48}$

95 L'espérance de la variable aléatoire X est égale à :

a) $\dfrac{1}{0{,}06}$ b) 0,06 c) $\mathrm{e}^{-0{,}06}$

96 On considère une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre λ.
On sait que $P(X < 20) = 0{,}5$. Le paramètre λ vaut :

a) 0,5 b) $\dfrac{\ln(2)}{20}$ c) $\dfrac{\ln(0{,}5)}{20}$

On considère une variable aléatoire X suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.

97 $P(1 \leqslant X \leqslant 1{,}2)$ vaut :

(a) $P(0 \leqslant X \leqslant 0{,}2)$ (b) $P(-1{,}2 \leqslant X \leqslant -1)$ (c) environ 0,044 (d) environ 0,298

98 $P(X > 2)$ vaut :

(a) $P(X < -2)$ (b) $P(X \geqslant 2)$ (c) environ 0,022 8 (d) environ 0,977

99 Le réel u tel que $P(-u \leqslant X \leqslant u) = 0{,}6$ est :

(a) $u \approx 0{,}842$ (b) $u = 0{,}8$ (c) $u \approx 0{,}25$ (d) u n'existe pas.

On considère une variable aléatoire Y suivant une loi normale de paramètres $\mu = 4$ et $\sigma = 5$.

100 Une valeur approchée au millième de $P(3 < Y \leqslant 6)$ est :

(a) 0,001 (b) 0,061 (c) 0,159 (d) 0,235

101 Le réel t tel que $P(Y > t) = 0{,}2$ est :

(a) $t \approx -0{,}208$ (b) $t \approx 8{,}208$ (c) $t \approx 0{,}2$ (d) $t \approx Y$

102 Soit t tel que $P(4 < Y < t) = 0{,}05$, alors :

(a) $t = 0{,}55$
(b) $t \approx 0{,}125$
(c) $t \approx 4{,}63$
(d) t n'existe pas car $t > 1$

103 Soit k tel que $P(Y < k) = -0{,}95$, alors :

(a) $k = 14$
(b) $k = -6$
(c) $k \approx 0{,}161$
(d) k n'existe pas car $-0{,}95 < 0$

104 Y a plus de 95 % de chance de « tomber dans l'intervalle » :

(a) $[-6\,;\,14]$ (b) $[-11\,;\,19]$ (c) $[-1\,;\,9]$ (d) $[0\,;\,0{,}95]$

105 La variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite est :

(a) $\dfrac{Y-4}{5}$ (b) $\dfrac{Y-5}{4}$ (c) $\dfrac{Y-4}{25}$ (d) $\dfrac{Y-5}{16}$

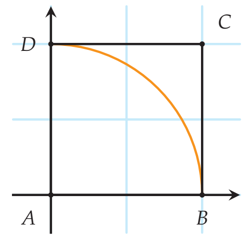
106 Parmi les lois ci-dessous, quelle est celle qui donne la plus petite espérance à la variable aléatoire qui la suit ?

(a) la loi uniforme sur $[-4\,;\,5]$
(b) la loi exponentielle de paramètre $\lambda = \dfrac{1}{3}$
(c) la loi normale centrée réduite
(d) la loi normale $\mathcal{N}(4\,;\,3^2)$

TP 1 Méthode de Monte-Carlo

ALGO

Le but de ce TP est de déterminer un encadrement de π à travers un procédé probabiliste. Cette méthode peut permettre également de donner une estimation de la valeur d'une intégrale comme cela est présenté dans le TP1 du chapitre A6.

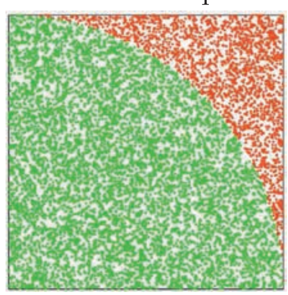


Dans un repère orthonormé $(A\ ;\ B, D)$, on considère le quart de disque de centre A et de rayon 1 et le carré $ABCD$.

1) Que vaut l'aire du quart de disque ?

2) Échantillonner au hasard un point du carré revient à prendre au hasard les deux coordonnées de ce point de manière indépendante.
On note X la variable aléatoire donnant l'abscisse du point et Y celle donnant son ordonnée.
- **a)** Quelles lois suivent les variables aléatoires X et Y ?
- **b)** À quelle condition sur X et Y un point appartient-il au quart de disque ?
- **c)** Écrire un algorithme qui simule le choix d'un point du carré $ABCD$ au hasard et qui indique si ce point est situé dans le quart de disque ou non.

3) Lors du tirage au hasard d'un point dans le carré $ABCD$, on admet que la probabilité que le point soit dans le quart de disque est égale à $\dfrac{\text{Aire du quart de disque}}{\text{Aire du carré}}$.
- **a)** Déterminer cette probabilité qu'un point au hasard soit dans le quart de disque.
- **b)** On a utilisé un algorithme permettant de simuler l'obtention au hasard d'un grand nombre de points dans le carré $ABCD$ et calculant le nombre de points à l'intérieur du quart de disque :
  la fréquence observée des points à l'intérieur du quart de disque donne une estimation de la probabilité qu'un point soit dans le quart de disque, c'est-à-dire une estimation de $\dfrac{\pi}{4}$.
  En lançant cet algorithme avec AlgoBox, on obtient les écrans suivants (les points en vert sont à l'intérieur du quart de disque et les points en rouge à l'extérieur) :



```
Entrer nombre_points : 10000
La fréquence est 0.7872
```

  En déduire une estimation de la valeur de π.

> Cette méthode probabiliste utilisée pour déterminer l'estimation d'une aire est appelée méthode de Monte-Carlo.

4) Lorsque l'on veut estimer une proportion ou une probabilité p, on peut en donner un intervalle de confiance au niveau 95 %.
En appelant f la fréquence observée et n la taille de l'échantillon, pour $0{,}2 \leqslant f \leqslant 0{,}8$ et $n \geqslant 25$, cet intervalle de confiance est donné par $p \in \left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$.
- **a)** Après avoir vérifié que les conditions sont remplies sur l'exemple précédent, donner un intervalle de confiance au niveau 95 % pour la valeur de p.
- **b)** À partir de quelle valeur de n, peut-on être sûr, au niveau de confiance 95 %, de donner un encadrement d'amplitude inférieure ou égale à 0,01 de $\dfrac{\pi}{4}$? Et de π ?

TP 2 Probabilité d'une rencontre

ALGO

Sam et Noémie se sont donné rendez-vous dans un bar du centre-ville entre 18 et 20h. Ils peuvent arriver à tout moment entre 18 et 20h donc le temps écoulé entre 18h et leur arrivée (exprimé en heure) peut être modélisé par une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0\,;\,2]$. Chacun a dit qu'il attendrait l'autre 15 minutes mais pas plus et pas au-delà de 20h.
Le but de ce TP est de déterminer la probabilité qu'ils se rencontrent.

A Une simulation

On considère l'algorithme suivant qui simule des heures d'arrivée pour Sam et Noémie, qui dit si la rencontre a lieu ou pas et affiche un graphique avec un point de couleur verte (respectivement rouge) de coordonnées $(x\,;\,y)$ où x est le temps écoulé entre 18 h et l'arrivée de Sam et y est le temps écoulé entre 18 h et l'arrivée de Noémie si la rencontre a lieu (respectivement n'a pas lieu).

```
VARIABLES
  S EST_DU_TYPE NOMBRE
  N EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  S PREND_LA_VALEUR 2*random()
  N PREND_LA_VALEUR 2*random()
 SI (abs(S-N)<=0.25) ALORS
      DEBUT_SI
        AFFICHER "ils se rencontrent"
        TRACER_POINT (S,N)
      FIN_SI
      SINON
         DEBUT_SINON
             AFFICHER "ils ne se rencontrent pas"
             TRACER_POINT (S,N)
         FIN_SINON
FIN_ALGORITHME
```

1) Entrer cet algorithme dans AlgoBox et le tester. Pour cela :
- la commande TRACER_POINT se situe dans l'onglet **Dessiner dans un repère** et on pourra régler $Xmin = -1$, $Xmax = 3$, $Ymin = -1$ et $Ymax = 3$ ainsi que Graduations X à 1 et Graduations Y à 1 ;
- la commande **random**() fournit un nombre au hasard dans $[0\,;\,1]$;
- la commande **abs**(donne la valeur absolue.

2) Modifier cet algorithme pour :
- qu'il simule 5 000 situations ;
- qu'il compte les situations où Sam et Noémie se rencontrent (on supprimera l'affichage « ils se rencontrent » ou « ils ne se rencontrent pas ») ;
- qu'il affiche le graphique contenant tous les points correspondant aux simulations et la fréquence des rencontres sur les 5 000 simulations.

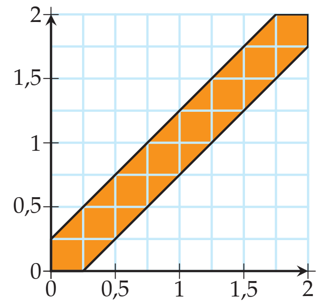
3) Donner une estimation de la probabilité de la rencontre de Sam et Noémie.

B Une explication

1) Justifier qu'une rencontre a lieu lorsque les coordonnées $(x\ ;\ y)$ du point vérifient le système :

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 \leqslant y \leqslant 2 \\ x - 0{,}25 \leqslant y \leqslant x + 0{,}25 \end{cases}.$$

2) L'ensemble des points solutions de ce système sont situés dans le domaine hachurée ci-contre.
Déterminer l'aire de ce domaine.



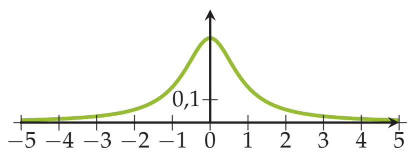
En admettant que la probabilité soit égale au rapport des aires $\dfrac{\text{Aire du domaine}}{\text{Aire totale}}$, en déduire la valeur exacte de la probabilité de la rencontre.

Récréation, énigmes

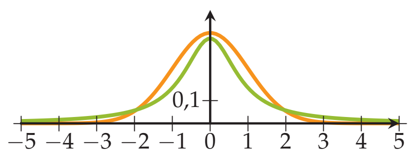
Un marché pas normal !

De nombreux modèles de marchés financiers partent du principe que la variation de la valeur d'une action sur un certain intervalle de temps (par heure, on aurait par exemple, de 8h à 9h : baisse de 0,1 %, de 9h à 10h : hausse de 0,08 %, etc.) peut être modélisée par une loi normale.

Ceci est dû au fait que quand on observe effectivement ces variations en pourcentages sur de nombreux intervalles de temps et qu'on représente graphiquement la série statistique obtenue, on obtient généralement des histogrammes que l'on peut approximer par de belles courbes en cloche comme ci-contre.



Malheureusement cette courbe, bien que lui ressemblant n'est pas du tout celle d'une densité de la loi normale, ajoutons la courbe de densité de la loi $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$ pour en observer les différences.



Au premier abord, ces différences semblent minimes mais considérons deux modèles fictifs (et simplifiés !) :

- le modèle 1 où l'évolution de la valeur d'une action sur une heure, exprimée en %, est modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$ (courbe orange) ;
- le modèle 2 où l'évolution de la valeur d'une action sur une heure, exprimée en %, est modélisée par une variable aléatoire Y dont la fonction de densité est donnée par $f(x) = \dfrac{0{,}85}{\pi(x^2 + 0{,}85^2)}$ (courbe verte).

1) a) Avec une calculatrice, déterminer $P(X \leqslant -5)$.
Dans le modèle 1, c'est la probabilité que la valeur de l'action baisse de plus de 5 %.

b) En déduire que, dans le modèle 1, un tel événement se produit en moyenne environ toutes les 3 483 046 h puis convertir dans une unité de temps plus adaptée.

2) a) Avec une calculatrice ou un logiciel, déterminer $P(Y \leqslant -5)$.

b) Que représente cette probabilité ?

c) En déduire, dans le modèle 2, toutes les combien d'heures un tel événement se produit en moyenne.

3) Commenter.

STATISTIQUES
PROBABILITÉS
3

Échantillonnage et estimation

Connaissances nécessaires à ce chapitre

- Connaître la définition d'un intervalle de fluctuation
- Déterminer un intervalle de fluctuation dans le cadre de la loi binomiale
- Tester une hypothèse à l'aide d'un intervalle de fluctuation
- Savoir utiliser un intervalle de fluctuation

Auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

1 On considère une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale $\mathscr{B}(8\ ;\ 0{,}4)$ et on donne le tableau de probabilités (arrondies au millième) ci-dessous :

k	0	1	2	3	4
$P(X \leqslant k)$	0,017	0,106	0,315	0,594	0,826

k	5	6	7	8
$P(X \leqslant k)$	0,950	0,991	0,999	1

1) Déterminer un intervalle de fluctuation de X au seuil de 95 %.
2) En déduire un intervalle de fluctuation de la fréquence $\frac{X}{8}$ au seuil de 95 %.

2 Une machine produit des clous en série. Le fabricant de la machine affirme que 97 % des clous sont sans défaut. Un client teste ce pourcentage : il décide de compter le nombre X de clous défectueux dans un échantillon de 10 000 clous.

1) Quelle loi suit X sous l'affirmation du fabricant ? Préciser les paramètres.
2) Déterminer un intervalle de fluctuation de X au seuil de 95 %.
3) Le client compte 399 clous défectueux. Peut-il remettre en cause l'affirmation du fabricant ?

3 L'an dernier, Jenny a remarqué que la probabilité qu'il pleuve un jour dans sa ville était $p = 0{,}4$.
Cette année, elle a relevé la météo durant 20 jours pour comparer les deux années. Sous l'hypothèse $p = 0{,}4$, un intervalle de fluctuation de la fréquence des jours pluvieux au seuil de 95 % est $[0{,}2\ ;\ 0{,}6]$.
Elle a remarqué que durant ces 20 jours, la pluie s'est manifestée 5 fois.

1) Peut-elle rejeter l'hypothèse que $p = 0{,}4$ au seuil de 95 % ?
2) Peut-elle affirmer que la probabilité qu'il pleuve est encore de 0,4 cette année ?

4 Lors du second tour d'une élection qui opposait deux candidats A et B, le candidat B a remporté la mise avec 51 % des voix. On s'intéresse à un sondage portant sur 1 000 personnes tirées au sort et réalisé juste avant l'élection.

1) Déterminer un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence des voix pour le candidat B.
2) Le sondage avait donné le candidat B perdant avec 488 opinions favorables parmi les personnes interrogées. Peut-on mettre en cause la réalisation du sondage ?

Voir solutions p. 419

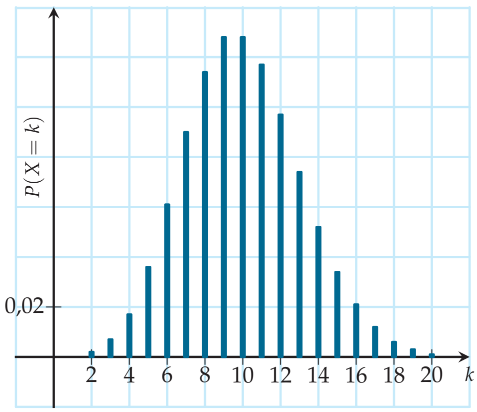
ACTIVITÉ 1 Contrôle de qualité

INFO

Une entreprise fabrique des vis en acier. Elle affirme que 5 % des vis qu'elle produit ont un défaut à la fin de la chaîne de production.
La responsable du **contrôle qualité** prélève un échantillon de n vis (au vu du grand nombre de vis produites, on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise) pour effectuer une analyse.

Partie A : Avec $n = 200$

La contrôleuse prélève un échantillon de 200 vis au hasard.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de vis avec défaut qui suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0{,}05$ sous l'hypothèse de l'énoncé, et $F = \dfrac{X}{200}$ la variable aléatoire donnant la fréquence des vis défectueuses dans l'échantillon.
On donne les éléments ci-dessous obtenus avec un tableur : un graphique représentant en partie cette loi et un tableau de valeurs (les probabilités sont arrondies à 10^{-3}).



k	$P(X \leqslant k)$	k	$P(X \leqslant k)$
2	0,002	11	0,700
3	0,009	12	0,796
4	0,026	13	0,870
5	0,062	14	0,922
6	0,124	15	0,956
7	0,213	16	0,976
8	0,327	17	0,988
9	0,455	18	0,994
10	0,583	19	0,997

1) Peut-on dire que la probabilité qu'elle relève exactement 3 vis avec défaut est élevée ?
2) La probabilité qu'elle relève entre 6 et 10 vis avec défaut est-elle supérieure à 0,6 ?
3) a) Trouver la plus petite valeur de l'entier b tel que $P(4 \leqslant X \leqslant b) \geqslant 0{,}95$.
b) En déduire un intervalle $[f_1 \,;\, f_2]$ tel que $P(f_1 \leqslant F \leqslant f_2) \geqslant 0{,}95$.

On dit que l'intervalle $[0{,}02 \,;\, 0{,}08]$ est un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la variable aléatoire F donnant la fréquence : cela signifie qu'il y a au moins 95 % de chance que la fréquence des vis défectueuses (dans cet échantillon de 200 vis) soit dans cet intervalle.

4) a) Proposer un autre intervalle $[c \,;\, d]$ (avec c et d entiers) tel que $P(c \leqslant X \leqslant d) \geqslant 0{,}95$.
b) En déduire un autre intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la variable aléatoire F.

5)

En Première, pour déterminer un tel intervalle, on appliquait la méthode suivante :
- on cherche le plus petit entier a tel que $P(X \leqslant a) > 0{,}025$;
- on cherche le plus petit entier b tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0{,}975$;
- on calcule l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % donné par $\left[\dfrac{a}{n} \,;\, \dfrac{b}{n}\right]$ où n correspond au paramètre n de la loi binomiale utilisée.

Lequel des deux intervalles trouvés aux questions **3b** et **4b** obtient-on avec cette méthode ?

Partie B : Avec n quelconque et des résultats de Terminale

La contrôleuse prélève un échantillon de n vis au hasard et on note :

- X_n la variable aléatoire donnant le nombre de vis défectueuses, qui suit donc une loi binomiale de paramètres n et $p = 0{,}05$;
- $F_n = \dfrac{X_n}{n}$ la variable aléatoire donnant la fréquence des vis défectueuses dans l'échantillon ;
- $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ la variable aléatoire centrée réduite associée à X_n.

1) En utilisant le théorème de Moivre-Laplace, que peut-on dire de $P(u \leqslant Z_n \leqslant v)$ quand n tend vers $+\infty$?

2) Que peut-on en déduire pour $P(-1{,}96 \leqslant Z_n \leqslant 1{,}96)$ quand n tend vers $+\infty$?

3) En déduire un intervalle $[f_1 \,;\, f_2]$ dépendant de p et n tel que $P(f_1 \leqslant F_n \leqslant f_2) \approx 0{,}95$ quand n tend vers $+\infty$ (on admettra que $P(f_1 \leqslant F_n \leqslant f_2) \geqslant 0{,}95$ quand n tend vers $+\infty$).

> Cet intervalle obtenu grâce à une limite est dit **intervalle de fluctuation asymptotique** de F_n au seuil de 95 %.
> Lorsque l'on réalise n tirages avec remise (ou n tirages assimilables à des tirages avec remise, comme c'est le cas ici), cet intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence des succès est donné par $\left[p - 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \,;\, p + 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$ où p est la probabilité d'un succès.

Partie C : Comparaison des intervalles obtenus

1) a) Calculer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % dans le cas $n = 200$ (arrondir à 10^{-3}).

b) Comparer cet intervalle avec celui obtenu par la méthode de Première de la partie **A** .

2) On donne le tableau ci-dessous regroupant des intervalles de fluctuation au seuil de 95 % obtenus avec la méthode de Première pour $p = 0{,}05$ et différentes valeurs de n :

Pour $n =$	30	500	1000
Intervalle de fluctuation	$[0 \,;\, 0{,}133]$	$[0{,}032 \,;\, 0{,}07]$	$[0{,}037 \,;\, 0{,}064]$
Intervalle de fluctuation asymptotique			

a) Recopier et compléter le tableau en calculant les intervalles de fluctuation asymptotiques au seuil de 95 % correspondant à chaque valeur de n.

b) Que peut-on dire des intervalles présents dans chaque colonne quand n augmente ?

> Cet intervalle de fluctuation asymptotique est plus facile à déterminer que l'intervalle de fluctuation obtenu avec la méthode de Première. On estime qu'il en donne une approximation satisfaisante lorsque $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$.

Partie D : Prise de décision

La contrôleuse a finalement choisi de prélever 400 vis et 26 d'entre elles ont un défaut.
Elle demandera un nouveau réglage des machines si la fréquence observée n'est pas dans l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.
Que va t-elle décider ?

1. Intervalle de fluctuation

DÉFINITION

Soit I un intervalle, s un réel de $]0\,;\,1[$ et X une variable aléatoire.
I est un **intervalle de fluctuation** de X au seuil de s si $P(X \in I) \geqslant s$.

PROPRIÉTÉ

Soit X_n une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;\,p)$ et $\alpha \in]0\,;\,1[$.
Alors, d'après le **théorème de Moivre-Laplace**,

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(\frac{X_n}{n} \in I_n\right) \geqslant 1-\alpha$$

où $I_n = \left[p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\, p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$ avec u_α qui est le nombre tel que $P(-u_\alpha \leqslant Z \leqslant u_\alpha) = 1-\alpha$ lorsque Z suit la loi normale centrée réduite $\mathscr{N}(0\,;\,1)$.

I_n est appelé **intervalle de fluctuation asymptotique** de $\frac{X_n}{n}$ au seuil de $1-\alpha$.

PREUVE

- Soit $\alpha \in]0\,;\,1[$ et Z suivant la loi $\mathscr{N}(0\,;\,1)$: il existe u_α tel que $P(-u_\alpha \leqslant Z \leqslant u_\alpha) = 1-\alpha$.
- D'autre part, comme $E(X_n) = np$ et $\sigma(X_n) = \sqrt{np(1-p)}$, d'après Moivre-Laplace :

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(-u_\alpha \leqslant \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant u_\alpha\right) = P(-u_\alpha \leqslant Z \leqslant u_\alpha) = 1-\alpha, \text{ or}$$

$$\begin{aligned}
-u_\alpha \leqslant \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant u_\alpha \quad &\Leftrightarrow \quad -u_\alpha\sqrt{np(1-p)} \leqslant X_n - np \leqslant u_\alpha\sqrt{np(1-p)} \\
&\Leftrightarrow \quad np - u_\alpha\sqrt{n}\sqrt{p(1-p)} \leqslant X_n \leqslant np + u_\alpha\sqrt{n}\sqrt{p(1-p)} \\
&\Leftrightarrow \quad p - u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{X_n}{n} \leqslant p + u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}
\end{aligned}$$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} P\left(p - u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{X_n}{n} \leqslant p + u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$.

VALEURS PARTICULIÈRES : On obtient comme intervalles de fluctuation asymptotiques :

- $I_n = \left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\, p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$ au seuil de 95 % ;
- $I_n = \left[p - 2{,}58\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\, p + 2{,}58\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$ au seuil de 99 %.

REMARQUE : En pratique, ces deux intervalles permettent des **prises de décisions** au seuil de 95 % ou de 99 % sous les conditions suivantes : $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$.

PROPRIÉTÉ

L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % est inclus dans l'intervalle

$$\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;\, p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right].$$

PREUVE Voir TP 1 page 403.

2. Prise de décision

MÉTHODE 1 Tester une hypothèse en étudiant un échantillon

► Ex. 17 p. 394

On considère une population dans laquelle on souhaite savoir si la proportion d'individus vérifiant une certaine propriété est p : c'est l'hypothèse à tester.
Pour cela, on détermine d'abord sous cette hypothèse un intervalle de fluctuation asymptotique I (à un certain seuil) de la fréquence du caractère dans un échantillon de taille n prélevé dans la population (en admettant que ce prélèvement est assimilable à des tirages avec remise). Puis on observe effectivement cette fréquence f dans un échantillon donné et :

- si $f \notin I$ alors on rejette l'hypothèse que la proportion est p au seuil considéré ;
- si $f \in I$ alors on ne rejette pas l'hypothèse que la proportion est p au seuil considéré.

Exercice d'application

Le pourcentage de personnes du groupe sanguin O dans la population française est de 43 %.
On souhaite déterminer si l'on peut faire la même hypothèse pour d'autres populations, en étudiant des échantillons de 250 personnes dans ces populations (dont on suppose qu'elles sont suffisamment grandes pour assimiler ces prélèvements d'échantillons à des tirages avec remise).
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes du groupe O dans un échantillon de 250 personnes issu d'une population dont 43 % des individus sont du groupe O.

1) a) Quelle loi suit X ?

b) Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique de la fréquence des individus du groupe O au seuil de 95 % dans un tel échantillon. Arrondir à 10^{-3} près.

2) a) On observe pour un échantillon de la population canadienne une proportion de 47 % d'individus du groupe O.
Peut-on rejeter l'hypothèse que 43 % des Canadiens sont du groupe O ?

b) On observe pour un échantillon de Basques : 138 individus du groupe O parmi les 250 personnes de l'échantillon.
Peut-on rejeter l'hypothèse que 43 % des Basques sont du groupe O ?

Correction

1) a) X suit la loi binomiale de paramètres $n = 250$ et $p = 0{,}43$.

b) On a $n = 250 \geqslant 30$, $np = 250 \times 0{,}43 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 250 \times (1-0{,}43) \geqslant 5$: les conditions sont bien vérifiées. On a alors :

- $p - 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0{,}43 - 1{,}96 \times \dfrac{\sqrt{0{,}43 \times (1-0{,}43)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}368$ (arrondi par défaut) ;
- $p + 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0{,}43 + 1{,}96 \times \dfrac{\sqrt{0{,}43 \times (1-0{,}43)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}492$ (arrondi par excès).

L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % est donc $I = [0{,}368\ ;\ 0{,}492]$.

2) a) La fréquence observée est de 0,47 et appartient donc à l'intervalle de fluctuation asymptotique I : au seuil de 95 %, on ne peut pas rejeter l'hypothèse que la proportion de Canadiens du groupe O est de 43 %, mais on ne peut pas affirmer que c'est le cas.

b) La fréquence observée est de $\dfrac{138}{250} = 0{,}552$ et n'appartient donc pas à l'intervalle de fluctuation asymptotique I : au seuil de 95 %, on peut rejeter l'hypothèse que la proposition de Basques du groupe O est de 43 %.

3. Intervalle de confiance

On considère une population dans laquelle on souhaite estimer une proportion p inconnue d'individus vérifiant une certaine propriété. Pour cela, on prélève un échantillon de taille n dans cette population et on appelle f la fréquence des individus vérifiant la propriété dans cet échantillon.

PROPRIÉTÉ

La proportion p inconnue est telle que, pour $n \geqslant 30$, $nf \geqslant 5$ et $n(1-f) \geqslant 5$, on a :

$$P\left(f - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant p \leqslant f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geqslant 0{,}95.$$

PREUVE On admet que sous ces conditions, on a : $P\left(p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant f \leqslant p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geqslant 0{,}95$.

Or $p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant f \leqslant p + \frac{1}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow -f - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant -p \leqslant -f + \frac{1}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow f + \frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant p \geqslant f - \frac{1}{\sqrt{n}}$, on a donc bien $P\left(f - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant p \leqslant f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geqslant 0{,}95$.

DÉFINITION

L'intervalle $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;\, f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ est appelé **intervalle de confiance** de la proportion p au seuil (ou niveau) de confiance de 95 %.

MÉTHODE 2 Déterminer un intervalle de confiance

► Ex. 30 p. 397

Exercice d'application

Dans une école, on cherche à estimer la proportion d'élèves malades durant une épidémie de grippe. Pour cela, on choisit au hasard 50 élèves ; parmi eux 37 sont malades.
Donner un intervalle de confiance de la proportion d'élèves malades dans l'école.

Correction

La fréquence vaut $\frac{37}{50} = 0{,}74$, on a donc bien $n = 50 \geqslant 30$, $nf = 50 \times 0{,}74 = 37 \geqslant 5$ et $n(1-f) = 50 \times (1 - 0{,}74) = 13 \geqslant 5$: les conditions sont bien vérifiées. On a alors :

- $f - \frac{1}{\sqrt{n}} = 0{,}74 - \frac{1}{\sqrt{50}} \approx 0{,}598$ (arrondi par défaut) ;
- $f + \frac{1}{\sqrt{n}} = 0{,}74 + \frac{1}{\sqrt{50}} \approx 0{,}882$ (arrondi par excès).

On en déduit, au seuil de confiance de 95 %, que la proportion d'élèves malades dans l'école est dans l'intervalle $[0{,}598\,;\,0{,}882]$.

REMARQUES :

- Dans les deux méthodes du chapitre, on a arrondi la borne inférieure de l'intervalle par défaut et la borne supérieure de l'intervalle par excès : on procédera toujours de cette manière pour s'assurer que l'on a bien un intervalle au seuil souhaité (que ce soit un intervalle de confiance ou de fluctuation).
- Les propriétés et méthodes du chapitre s'appliquent également dans le cas où f désigne la fréquence de succès lorsque l'on réalise n tirages avec remise (ou assimilables à des tirages avec remise) pour une expérience de Bernoulli de probabilité de succès p.

Activités mentales

1 Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % si $n = 100$ et $p = 0{,}5$.

2 Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 99 % si $n = 10\,000$ et $p = 0{,}2$.

3 Mélanie s'intéresse au nombre de spams reçus dans ses emails. Une de ses connaissances affirme que les spams représentent 10 % des mails échangés, ce dont doute Mélanie.

Elle décide d'étudier un échantillon de 100 mails pour tester cette hypothèse : sous celle-ci, on note X le nombre de spams dans un échantillon de 100 mails.

1) Préciser la loi suivie par X.
2) Calculer de tête $\dfrac{\sqrt{0{,}1 \times 0{,}9}}{\sqrt{100}}$.
3) En déduire l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.
4) Mélanie a compté 6 spams parmi 100 mails reçus. Que penser de l'hypothèse de départ ?

4 Une bûcheronne a compté 3 320 chênes dans un bois parmi les 10 000 arbres rencontrés.

Sans calculatrice, déterminer un intervalle de confiance au seuil de 95 % de la proportion de chênes dans ce bois.

5 Un maire souhaite lancer un sondage pour déterminer si les habitants de sa commune approuvent un projet immobilier au seuil de confiance de 95 %.

1) Combien de personnes doit-il sonder s'il veut avoir une estimation à 1 % près de la proportion de personnes favorables ?
2) Combien de personnes doit-il sonder s'il veut avoir une estimation à 0,1 % près de la proportion de personnes favorables ?

6 On lance n fois une pièce équilibrée.

1) Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique de la fréquence de « face » obtenus au seuil de 95 % pour $n = 100$.
2) Même question pour $n = 10\,000$.
3) Combien de lancers devrait-on effectuer pour avoir l'intervalle de fluctuation asymptotique d'amplitude $1{,}96 \times 10^{-3}$?

Intervalles de fluctuation

Dans les exercices **7** à **9**, on vérifiera que les conditions d'utilisation de l'intervalle de fluctuation asymptotique sont vérifiées et on arrondira les bornes au millième.

7 Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % pour $n = 100$ et $p = 0{,}4$.

8 Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % pour $n = 4\,000$ et $p = \dfrac{1}{3}$.

9 Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 99 % pour $n = 77$ et $p = 0{,}89$.

10 Selon une enquête de la DREES, 70 % des plus de 20 ans de la population française portent des lunettes ou des lentilles de contact.
On considère un échantillon de 400 personnes tirées au sort dans la population française et on admet que la population française est suffisamment grande pour assimiler ce tirage au sort à un tirage avec remise.
On note X le nombre de personnes qui portent des lunettes ou des lentilles dans l'échantillon.

1) Quelle loi suit X ?
2) Contrôler que n et p vérifient bien les conditions $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$.
3) En déduire l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence des porteurs de lunettes ou de lentilles dans cet échantillon.
4) Donner une interprétation concrète du résultat précédent.

11 On lance 50 fois de suite une pièce équilibrée.
On note X le nombre de « pile » obtenus.

1) a) Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique de la fréquence de « pile » obtenus au seuil de 95 %.
   b) En déduire l'intervalle de fluctuation asymptotique de X au seuil de 95 %.
2) Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique de X au seuil de 99 %.

12 **Un algorithme** ALGO

Écrire un algorithme :

- demandant en entrée les valeurs de p et n ;
- donnant en sortie les bornes de l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.

13 Mickaël possède un dé dont il souhaite vérifier l'équilibre.

Il lance ce dé 100 fois, et note le nombre de 6 obtenus.

1) Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique de la fréquence de 6 obtenus au seuil de 95 %.
2) Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique de la fréquence de 6 obtenus au seuil de 99 %.
3) a) Quel intervalle est inclus dans l'autre ?
   b) Pourquoi était-ce prévisible ?

14 Dans une fabrique de chocolat, une machine met en forme les tablettes. Elle fabrique des tablettes imparfaites avec une probabilité 0,025.

Quand une tablette est parfaitement formée, elle est vendue 2 €. Lorsqu'elle est imparfaite, elle est vendue en vrac à 0,75 € dans le magasin d'usine. Chaque jour, l'usine produit 20 000 tablettes de chocolat.

1) Déterminer un intervalle de fluctuation de la fréquence de tablettes imparfaites au seuil de 95 %.
2) On suppose que toute la production est vendue. Déterminer un intervalle de fluctuation du chiffre d'affaires quotidien réalisé au seuil de 95 %.

15 Samuel veut acheter des fusées pour un feu d'artifice qu'il souhaite grandiose.

Le vendeur affirme que 15 % des mèches de fusées s'éteignent, empêchant le départ des fusées. Samuel souhaite qu'au moins 100 fusées soient fonctionnelles ; ne pouvant être sûr de rien, il souhaite avoir au moins 95 % de chance d'avoir 100 fusées opérationnelles.

On note n le nombre de fusées achetées par Samuel. On suppose que le stock de fusées est suffisamment grand pour assimiler le choix des fusées à un tirage au sort avec remise. On note X le nombre de fusées opérationnelles parmi celles achetées par Samuel.

1) Quelle loi suit X ? Préciser ses paramètres.
2) Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique de la fréquence de fusées opérationnelles au seuil de 95 % en fonction de n.
3) En déduire l'intervalle de fluctuation asymptotique du nombre de fusées opérationnelles au seuil de 95 % en fonction de n.
4) Déterminer la quantité de fusées que Samuel doit acheter pour être sûr au seuil de 95 % d'avoir au moins 100 fusées opérationnelles.

Prise de décision

16 On cherche à savoir si un dé cubique est équilibré : pour cela, on le lance 1 000 fois et on s'intéresse au nombre de 1 obtenus.

Dans l'hypothèse où l'on lance 1 000 fois un dé équilibré, un intervalle de fluctuation de la fréquence de 1 obtenus au seuil de 95 % est $[0{,}143\ ;\ 0{,}190]$.

Que peut-on dire du dé si l'on obtient :

1) 200 fois le nombre 1 ? 2) 150 fois le nombre 1 ?

17 ► MÉTHODE 1 p. 391

Un producteur de jus de pomme a constaté que 4 % de sa production n'avait pas pu être commercialisée l'an dernier à cause d'une teneur en sucre trop élevée.

Il décide de tester un échantillon de sa nouvelle production pour savoir si la proportion de bouteilles non commercialisables est différente de celle de l'année dernière.

Il choisit au hasard dans sa production 598 bouteilles, et compte le nombre X de bouteilles non commercialisables (on suppose que le volume de sa production est tel que l'on peut assimiler le choix de cet échantillon à un tirage au sort avec remise).

1) Quelle loi suit X sous l'hypothèse où la proportion de bouteilles non commercialisables n'aurait pas évolué d'une année sur l'autre ?
2) Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique de la fréquence de bouteilles non commercialisables au seuil de 95 % dans cet échantillon.
3) Le producteur trouve finalement 19 bouteilles non commercialisables.
   Peut-il affirmer qu'il a fait mieux que l'an dernier ?

18 D'après une étude de l'INSEE en 2006, la moitié des bébés français sont nés hors mariage.

Sur un échantillon de 1 000 naissances au cours de l'année 2010, on a observé que 556 ont eu lieu hors mariage.

On fait l'hypothèse que la proportion de naissances hors mariage en 2010 est la même qu'en 2006.

1) Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.
2) Que peut-on en déduire concernant l'hypothèse émise ?

19 Une compagnie ferroviaire annonce que 90 % de ses trains arrivent à l'heure. Un usager conteste ce nombre et décide de compter pendant 60 jours le nombre de fois où le train arrive en retard sur son trajet.

1) Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence des trains arrivés à l'heure d'après la compagnie.
2) Cet usager a relevé que son train avait eu 12 fois du retard.
   a) Déterminer la fréquence des trains arrivés à l'heure. Cette fréquence appartient-elle à l'intervalle de fluctuation obtenu à la question **1** ?
   b) Proposer deux hypothèses permettant d'expliquer le résultat de la question précédente.

20 Lors d'une campagne électorale, le maire sortant, élu lors des précédentes élections avec 54 % des voix, est donné vainqueur par un sondage avec 50,5 % d'intention de vote.

Si le maire souhaite ne pas rejeter l'hypothèse que sa côte de popularité est la même que lors de l'élection précédente, doit-il privilégier un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % ou au seuil de 99 % ?

21 **Rejet ou non** ALGO

1. *Liste des variables utilisées*
2.   n : *entier*
3.   a,b,f,p : *réels*
4. *Traitement et affichage*
5.   Demander p
6.   Demander n
7.   Demander f
8.   Donner à a la valeur $p - 1,96 * \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$
9.   Donner à b la valeur $p + 1,96 * \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$
10.   **Si** f<a ou f>b **Alors**
11.   Afficher "On peut rejeter cette hypothèse au seuil de ..."
12.   **Sinon**
13.   Afficher "..."
14.   **Fin Si**

1) Compléter les lignes 11 et 13 de l'algorithme.
2) Que fait-il ?
3) Modifier l'algorithme pour qu'il demande d'abord à l'utilisateur s'il souhaite un seuil de 95 % ou de 99 %.

22 **D'après Bac (Pondichéry – 2014)**
Question ouverte

Une entreprise annonce que le pourcentage de moteurs défectueux dans sa production est égal à 1 %.

Afin de vérifier cette affirmation, 800 moteurs sont prélevés au hasard. On constate que 15 moteurs sont défectueux. Le résultat de ce test remet-il en question l'annonce de l'entreprise ? Justifier.

On pourra s'aider d'un intervalle de fluctuation.

23 **Question ouverte**

Le gérant d'un service de transports urbains annonce fièrement : « Il y a suffisamment de bus en circulation pour que les usagers soient assis 95 % du temps ».

Sébastiana pense que ce n'est pas possible. Elle fait un relevé sur 120 trajets, et note qu'elle n'a pas pu s'asseoir durant 27 trajets.

Que peut-elle penser de l'affirmation du gérant ?

24 **Question ouverte**

Une généticienne souhaite tester une hypothèse sur la transmission d'un caractère chez les drosophiles. Elle s'attend à trouver, après une génération, un quart de la population avec des yeux bruns.

Pour tester son hypothèse, elle observe un échantillon de 2 500 mouches. Elle en compte 633 avec des yeux bruns. Que peut-elle penser de son hypothèse ?

25 Un client d'un supermarché achète une mousse à raser, attiré par l'étiquette qui indique : « 97 % des utilisateurs sont satisfaits de cette mousse à raser. N'hésitez plus ! ».

En rentrant chez lui, il trouve cette mousse assez irritante. Furieux, il décide de vérifier l'affirmation du fabricant de mousse.

Patient, il demande l'avis de clients à la sorte du supermarché. Au bout de quelques heures, 177 clients ayant utilisé cette mousse à raser ont répondu à ses questions, et 166 d'entre eux ont révélé apprécier la mousse.

1) a) Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique de la fréquence des personnes satisfaites au seuil de 99 %.
   b) Que peut penser le client de l'affirmation du fabricant ?
2) Reprendre la question précédente avec l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.

26 Élise reçoit sa copie de philosophie avec la remarque suivante : « Copie bourrée de fautes d'orthographe ! Il y en a une tous les trois mots ! J'espère que vous vous débrouillez mieux en mathématiques ! ».

Élise regarde la première phrase qui contient 30 mots mais seulement 6 fautes.

1) Peut-elle remettre en cause l'affirmation de ce professeur ?
2) Pour une même fréquence de fautes observées, combien de mots doit-elle considérer pour pouvoir le faire ?

27 On donne dans le tableau ci-dessous les intervalles de fluctuation asymptotiques (I.F.A) d'une fréquence F à différents seuils, obtenus avec la formule du cours pour $p = 0{,}2$ et $n = 200$.

Seuil	75 %	90 %
I.F.A	$[0{,}167\ ;\ 0{,}233]$	$[0{,}153\ ;\ 0{,}247]$

Seuil	95 %	99 %
I.F.A	$[0{,}144\ ;\ 0{,}256]$	$[0{,}127\ ;\ 0{,}273]$

1) Indiquer les différentes inclusions d'intervalles.
2) Pour $a \leqslant b$, on souhaite comparer les deux intervalles de fluctuation asymptotiques suivants obtenus avec la formule du cours :
   - l'intervalle I_a, au seuil de a % ;
   - l'intervalle I_b, au seuil de b %.

   a) Traduire les intervalles précédents par des probabilités faisant intervenir F.
   b) Justifier que $I_a \subset I_b$.
3) Discuter de l'intérêt de choisir tel ou tel niveau de confiance dans chacun des cas suivants :
   a) Une usine produit des pièces automobiles. Réparer une pièce défectueuse est très coûteux.
   Un contrôleur qualité de l'usine souhaite montrer que la proportion de pièces défectueuses n'est que de 2 %.
   b) Un chef d'entreprise qui emploie 45 % de femmes souhaite expliquer qu'il ne pratique pas de discrimination à l'embauche.
   c) Un vendeur de dé cabossé souhaite faire passer son dé pour équilibré, alors qu'un client veut le tester. Que va choisir le vendeur ? Et le client ?

28 Matthieu et Hélène observent le comportement de leur nouveau-né Camille.

Ils ont remarqué qu'en moyenne, Camille s'endormait 30 minutes après chaque biberon.

Ils modélisent le temps T (en heure) nécessaire à un endormissement de Camille par une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ.

1) Déterminer la valeur de λ.
2) a) Selon ce modèle, quelle est la probabilité que Camille mette plus d'une heure à s'endormir ? Arrondir au millième.
   b) Hélène et Matthieu doutent un peu du modèle.
   Ils ont remarqué que durant le mois de janvier, après 150 repas, Camille a seulement 10 fois mis plus d'une heure à s'endormir.
   Que peuvent-ils en conclure (on pourra utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique) ?
3) Trouver une bonne raison en défaveur d'une loi exponentielle pour ce type de modélisation.

29 On souhaite mener une étude sur les salariés travaillant dans des fast-foods.

En interrogeant 532 employés, on obtient les résultats suivants :

	Femmes	Hommes	Total
Surpoids	98	82	180
Pas de surpoids	232	120	352
Total	330	202	532

On souhaite tester la représentativité de cet échantillon parmi l'ensemble de la population française.

Dans la population française, on compte :
- 51,3 % de femmes ;
- 32 % de personnes en surpoids.

1) a) Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence des femmes dans un échantillon de 532 personnes tirées au sort dans la population française.
   b) L'échantillon de l'énoncé est-il représentatif de la population française sur ce critère ?
2) Reprendre la question précédente en s'intéressant maintenant aux personnes en surpoids.
3) D'après cette étude, que peut-on dire des salariés qui travaillent en fast-food par rapport à l'ensemble de la population française ?

Intervalles de confiance

30 ► MÉTHODE 2 p. 392

On considère une population de très grand effectif, dont certains individus vérifient une propriété particulière. On observe un échantillon de $n = 400$ individus dans lequel on a relevé que 135 d'entre eux vérifient la propriété.

1) Déterminer la fréquence d'apparition de la propriété dans l'échantillon.
2) Peut-on affirmer que la proportion de la population vérifiant la propriété est 0,337 5 ?
3) Déterminer une estimation de cette proportion à l'aide d'un intervalle de confiance au seuil de 95 %.

31 Quelle taille devrait avoir un échantillon pour obtenir un intervalle de confiance :

1) d'amplitude 0,005 ? 2) de rayon 0,001 ?

32 On souhaite déterminer la proportion p d'oliviers affectés par la bactérie *Xylella fastidiosa* dans une région. Pour cela, on effectue un test de dépistage sur 530 oliviers et on note X le nombre d'arbres infectés.

Après examens, on trouve que 77 arbres sont malades.

1) Déterminer une estimation de la proportion p à l'aide d'un intervalle de confiance au seuil de 95 %.
2) Combien d'arbres devrait-on tester pour avoir un intervalle de taille inférieure ou égale à 0,01 ?
3) Par combien doit-on multiplier la taille de l'échantillon de la question **1** pour avoir une précision dix fois plus grande de l'intervalle de confiance ?

33 Un laboratoire pharmaceutique souhaite tester l'efficacité d'un médicament destiné à soulager les maux de tête.

Il est administré à 579 patients volontaires. Parmi eux, 370 ont noté une amélioration de leur état de santé.

1) Déterminer une estimation du taux d'efficacité de ce médicament sous la forme d'un intervalle de confiance au seuil de 95 %.
2) Que penser de l'efficacité de ce médicament ?
3) On souhaite comparer le médicament avec un placebo. Dans le cas de migraines, l'administration d'un placebo (sans agent actif) soulage les patients dans 60 % des cas. Peut-on affirmer, au seuil de 95 %, que le médicament a une utilité ?
4) Avec le même taux de réussite pour le médicament, combien de patients devraient être testés pour distinguer son effet d'un placebo ?

34 Juste Bienbir, chanteur sur le déclin, a recueilli 43 % d'opinion favorable lors d'un sondage portant sur 10 000 personnes.

1) Déterminer une estimation de sa côte de popularité à l'aide d'un intervalle de confiance.
2) Quelle devrait être la taille de l'échantillon pour qu'avec une même fréquence d'opinion favorable, Juste puisse encore penser être apprécié par une majorité de personnes ?

35 **D'après Bac (Antilles-Guyane – 2013)** ROC

Soient n un entier naturel, p un nombre réel compris entre 0 et 1, et X_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p.

On note $F_n = \dfrac{X_n}{n}$ et f une valeur prise par F_n.

On rappelle que, pour n assez grand, l'intervalle $\left[p - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ p + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contient la fréquence f avec une probabilité au moins égale à 0,95.

En déduire que l'intervalle $\left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contient p avec une probabilité au moins égale à 0,95.

36 **Question ouverte**

Un lycée compte 1 200 élèves. Un élève de Terminale souhaite offrir une rose à chacun des garçons du lycée lors du bal de fin d'année. Il ne peut pas compter tous les élèves du lycée, mais il a remarqué que sa classe est composée de 16 filles et 14 garçons.

Quelle quantité de roses devra-t-il prévoir pour le bal de fin d'année, au niveau de confiance de 95 % ?

37 **Question ouverte**

D'après une réglementation sur les cultures OGM, le seuil acceptable de contamination des cultures biologiques par des cultures OGM pour être qualifiées de « sans OGM » est de 0,9 %.

Après une analyse faite par un laboratoire, Bernard, producteur de produits biologiques, a été informé que sur les 1 000 plants de maïs testés dans son champ, 35 provenaient d'une culture OGM.

Préparer sa défense.

38 **D'après Bac (Métropole - 2013)**

Dans une usine, on utilise une machine pour fabriquer des pièces. On estime que la machine est convenablement réglée si 90 % des pièces qu'elle fabrique sont conformes.

On décide de contrôler cette machine en examinant n pièces choisies au hasard (n entier naturel) dans la production. On assimile ces n tirages à des tirages successifs indépendants et avec remise.

On note X_n le nombre de pièces qui sont conformes dans l'échantillon de n pièces, et $F_n = \frac{X_n}{n}$ la proportion correspondante.

1) Justifier que la variable aléatoire X_n suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.

2) Dans cette question, on prend $n = 150$.
Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique I au seuil de 95 % de la variable aléatoire F_{150}.

3) Un test qualité permet de dénombrer 21 pièces non conformes sur un échantillon de 150 pièces produites.
Cela remet-il en cause le réglage de la machine ?
Justifier la réponse.

39 **D'après Bac (Centres Étrangers - 2015)**

Un fournisseur produit deux sortes de cadenas. Les uns sont *premier prix*, et les autres sont *haut de gamme*. Un magasin de bricolage dispose d'un stock de cadenas provenant de ce fournisseur ; ce stock comprend un grand nombre de cadenas de chaque type.

1) Le fournisseur affirme que, parmi les cadenas *haut de gamme*, il n'y a pas plus de 3 % de cadenas défectueux dans sa production. Le responsable du magasin de bricolage désire vérifier la validité de cette affirmation dans son stock ; à cet effet, il prélève un échantillon aléatoire de 500 cadenas *haut de gamme*, et en trouve 19 qui sont défectueux.
Ce contrôle remet-il en cause le fait que le stock ne comprenne pas plus de 3 % de cadenas défectueux ?
On pourra pour cela utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.

2) Le responsable du magasin souhaite estimer la proportion de cadenas défectueux dans son stock de cadenas *premier prix*. Pour cela il prélève un échantillon aléatoire de 500 cadenas *premier prix*, parmi lesquels 39 se révèlent défectueux.
Donner un intervalle de confiance de cette proportion au niveau de confiance 95 %.

40 **D'après Bac (Amérique du Nord - 2014)**

Une association de consommateurs décide d'estimer la proportion de personnes satisfaites par l'utilisation d'une crème fraîche.

Elle réalise un sondage parmi les personnes utilisant ce produit. Sur 140 personnes interrogées, 99 se déclarent satisfaites.

Estimer, par un intervalle de confiance au seuil de 95 %, la proportion de personnes satisfaites parmi les utilisateurs de la crème.

41 **D'après Bac (Polynésie – 2015) Question ouverte**

En étudiant une maladie dans la population d'un pays, on a constaté que le taux, en nanogrammes par millilitre $\left(\text{ng.ml}^{-1}\right)$, d'une substance gamma présente dans le sang, est plus élevé chez les personnes atteintes de cette maladie que chez les personnes qui ne sont pas touchées. Pour dépister chez une personne la maladie étudiée, on effectue une prise de sang à jeun. Les données montrent que 82 % des patients malades ont un dépistage positif.

Pour améliorer le confort des personnes susceptibles de subir cet examen sanguin, on souhaite vérifier si le fait d'être à jeun est une condition indispensable dans le protocole.

On considère un groupe de 300 personnes malades sur lesquelles la prise de sang n'est pas effectuée à jeun.

Le dépistage se révèle positif pour 74 % d'entre elles.

Ce dépistage peut-il être effectué sur des personnes qui ne sont pas à jeun ?

42 **D'après Bac (Nouvelle-Calédonie - 2014)**

Les trois parties A, B et C sont indépendantes.

Une fabrique de desserts glacés dispose d'une chaîne automatisée pour remplir des cônes de glace.

Partie A

Les cônes de glace sont emballés individuellement puis conditionnés en lots de 2 000 pour la vente en gros.

On considère que la probabilité qu'un cône présente un défaut quelconque avant son conditionnement en gros est égale à 0,003.

On nomme X la variable aléatoire qui, à chaque lot de 2 000 cônes prélevés au hasard dans la production, associe le nombre de cônes défectueux présents dans ce lot.

On suppose que la production est suffisamment importante pour que les tirages puissent être supposés indépendants les uns des autres.

1) Quelle est la loi suivie par X ? Justifier la réponse et préciser les paramètres de cette loi.

2) Si un client reçoit un lot contenant au moins 12 cônes défectueux, l'entreprise procède alors à un échange de celui-ci.
Déterminer la probabilité qu'un lot ne soit pas échangé ; le résultat sera arrondi au millième.

Partie B

Chaque cône est rempli avec de la glace à la vanille. On désigne par Y la variable aléatoire qui, à chaque cône, associe la masse (exprimée en grammes) de crème glacée qu'il contient.

On suppose que Y suit une loi normale $\mathcal{N}\left(110\,;\,\sigma^2\right)$, d'espérance $\mu = 110$ et d'écart-type σ.

Une glace est considérée comme commercialisable lorsque la masse de crème glacée qu'elle contient appartient à l'intervalle $[104\,;\,116]$.

Déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près du paramètre σ telle que la probabilité de l'évènement « la glace est commercialisable » soit égale à 0,98.

Partie C

Une étude réalisée en l'an 2000 a permis de montrer que le pourcentage de Français consommant régulièrement des glaces était de 84 %.

En 2010, sur 900 personnes interrogées, 795 d'entre elles déclarent consommer des glaces.

Peut-on affirmer, au niveau de confiance de 95 % et à partir de l'étude de cet échantillon, que le pourcentage de Français consommant régulièrement des glaces est resté stable entre les années 2000 et 2010 ?

43 D'après Bac (Liban - 2015)

En prévision d'une élection entre deux candidats A et B, un institut de sondage recueille les intentions de vote de futurs électeurs.

Parmi les 1 200 personnes qui ont répondu au sondage, 47 % affirment vouloir voter pour le candidat A et les autres pour le candidat B.

Compte-tenu du profil des candidats, l'institut de sondage estime que 10 % des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat A ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat B, tandis que 20 % des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat B ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat A.

On choisit au hasard une personne ayant répondu au sondage et on note :

- A l'évènement « La personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat A » ;
- B l'évènement « La personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat B » ;
- V l'évènement « La personne interrogée dit la vérité ».

1) Construire un arbre de probabilités traduisant la situation.

2) **a)** Calculer la probabilité que la personne interrogée dise la vérité.
b) Sachant que la personne interrogée dit la vérité, calculer la probabilité qu'elle affirme vouloir voter pour le candidat A.

3) Démontrer que la probabilité que la personne choisie vote effectivement pour le candidat A est 0,529.

4) L'institut de sondage publie alors les résultats suivants :

> 52,9 % des électeurs* voteraient pour le candidat A.
>
> *estimation après redressement, fondée sur un sondage d'un échantillon représentatif de 1 200 personnes.

Au seuil de confiance de 95 %, le candidat A peut-il croire en sa victoire ?

5) Pour effectuer ce sondage, l'institut a réalisé une enquête téléphonique à raison de 10 communications par demi-heure. La probabilité qu'une personne contactée accepte de répondre à cette enquête est 0,4.
L'institut de sondage souhaite obtenir un échantillon de 1 200 réponses.
Quel temps moyen, exprimé en heures, l'institut doit-il prévoir pour parvenir à cet objectif ?

44 Malcolm et Robert jouent aux fléchettes.
Sur 120 lancers, Malcolm a atteint la cible 37 fois, alors que Robert a réussi 320 de ses 1 002 lancers.
Robert fanfaronne : « Je suis à coup sûr un meilleur tireur que toi ! ». Que peut-on en penser ?

45 En 2014, on compte 27 % de femmes élues à l'Assemblée nationale, et 25 % de femmes au Sénat.
On rappelle que l'Assemblée nationale compte 577 députés, alors que le Sénat est constitué de 348 sénateurs.
1) Peut-on penser qu'il y a une discrimination envers les femmes ? Justifier votre réponse.
2) De l'Assemblée nationale et du Sénat, une des deux institutions semble-t-elle moins inégalitaire ?

46 Une scierie produit des planches à partir de troncs d'arbres.
Celles-ci doivent faire entre 2 cm et 3 cm d'épaisseur pour pouvoir être commercialisées et :
- lorsqu'une planche produite a une épaisseur supérieure à 3 cm, un coup de rabot est nécessaire pour la rendre commercialisable ;
- lorsqu'une planche produite a une épaisseur inférieure à 2 cm, elle est inutilisable.

La gérante a relevé que sur un échantillon de 4 000 planches produites, 3 816 étaient directement commercialisables. Elle a aussi remarqué qu'à cause du processus de découpage, il y avait autant de planches dont l'épaisseur dépassait 3 cm que de planches de moins de 2 cm d'épaisseur.
Elle veut commercialiser au moins 100 000 planches.
Déterminer une fourchette du coût de production, au seuil de 95 %, sachant que produire une planche coûte 7 € et qu'un coût de rabot coûte 2 € supplémentaires.

47 **Intervalle de fluctuation unilatéral** ROC
Dans certains cas, en fonction de l'hypothèse à tester, il peut-être plus intéressant de s'intéresser à des intervalles de fluctuation dits unilatéraux, de la forme $[0\,;\,a]$ ou $[a\,;\,1]$.
Le but de cet exercice est de déterminer d'autres types d'intervalles de fluctuation asymptotiques, non centrés sur la valeur p, mais toujours en utilisant le théorème Moivre-Laplace.
Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p et $s\in]0\,;\,1[$.
On cherche à déterminer, à l'aide du théorème de Moivre-Laplace, un intervalle $I=[0\,;\,a]$ tel que $P\left(\dfrac{X}{n}\in I\right)\geqslant s$.

1) Soit Z la variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.
 a) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
 $$f(x)=P(Z\leqslant x).$$
 Montrer que f est une fonction continue, strictement croissante, et déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
 b) En déduire qu'il existe un unique réel u tel que $P(Z\leqslant u)=s$.
 c) Montrer que :
 $$\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leqslant u\Leftrightarrow\frac{X}{n}\leqslant p+u\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}.$$
 d) On sait d'après le théorème de Moivre-Laplace que $\lim\limits_{n\to+\infty}P\left(\dfrac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leqslant u\right)=P(Z\leqslant u)$.
 Conclure en trouvant un intervalle de fluctuation asymptotique (dépendant de u) de la fréquence $\dfrac{X}{n}$ au seuil s.
2) **Application** : Un fabricant d'assiettes « un peu louche » affirme que ses produits présentent très peu de défaut. Il affirme que cela ne concerne que 3 % de sa production.
 On va tester son hypothèse sur un échantillon de 3 000 assiettes.
 a) À l'aide de la question **1d**, déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique de la forme $[0\,;\,a]$ au seuil de 95 %.
 b) On a trouvé 267 assiettes fêlées dans l'échantillon. Que peut-on en conclure ?
3) Comment trouver un intervalle de fluctuation asymptotique de $\dfrac{X}{n}$ de la forme $[a\,;\,1]$ au seuil de 95 % ?
4) Dans chacun des cas suivants, préciser s'il vaut mieux privilégier un intervalle de fluctuation asymptotique « classique » ou un intervalle de fluctuation unilatéral asymptotique (à préciser).
 - On cherche à tester la côte de popularité d'un homme politique.
 - On cherche à tester la proportion de tickets gagnants dans une tombola.
 - On cherche à tester le taux de guérison en une semaine pour un médicament par rapport à celui, connu, d'un placebo.

À la fin de ce chapitre, je dois être capable de :

- Déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique
- Savoir rejeter ou non une hypothèse à l'aide d'un intervalle de fluctuation asymptotique
- Faire preuve d'esprit critique lors d'un test d'hypothèse
- Déterminer une estimation d'un paramètre à l'aide d'un intervalle de confiance
- Déterminer la taille d'un échantillon pour obtenir un intervalle de confiance d'amplitude ou de rayon donné

QCM d'auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur **manuel.sesamath.net** @

Pour chaque question, plusieurs réponses sont proposées. Déterminer celles qui sont correctes.

48 Pour pouvoir utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique, il faut que les paramètres n et p vérifient :

(a) $p \geqslant 5$ (b) $(1-p)n \geqslant 5$ (c) $np < 5$ (d) $np \geqslant 30$

49 Pour $n = 45$ et $p = 0{,}01$, l'intervalle de fluctuation asymptotique est :

(a) inutilisable (b) utilisable

50 Un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % :

(a) est aussi un intervalle de fluctuation au seuil de 90 %
(b) est aussi un intervalle de fluctuation au seuil de 99 %

Dans une usine, une machine fabrique des tiges métalliques. L'ingénieur chargé du réglage affirme que les tiges fabriquées présentent un défaut dans 0,8 % des cas.
On s'intéresse à un échantillon de 800 tiges prélevées au hasard dans le stock. On suppose que le stock est suffisamment grand pour assimiler cela à un tirage au sort avec remise. On note X le nombre de tiges sans défaut.

51 X suit une loi binomiale de paramètres :

(a) $n = 800$ et $p = 0{,}8$ (b) $n = 640$ et $p = 0{,}008$ (c) $n = 800$ et $p = 0{,}008$ (d) $n = 800$ et $p = 0{,}992$

52 À 10^{-3} près, un intervalle de fluctuation asymptotique de la fréquence des tiges sans défaut au seuil de 95 % est :

(a) $[0{,}985 ; 0{,}999]$ (b) $[0{,}983 ; 1]$ (c) $[0 ; 0{,}95]$

53 Un ouvrier trouve 13 tiges défectueuses dans l'échantillon. Il peut en conclure que :

(a) Au seuil de 95 %, l'hypothèse de l'ingénieur est à rejeter
(b) Au seuil de 95 %, on ne peut pas rejeter l'hypothèse de l'ingénieur
(c) Il faut recommencer l'expérience

Florient affirme que 15 % des êtres humains sont gauchers.
Marjolaine trouve ce pourcentage très important ; elle souhaite tester cette hypothèse sur un échantillon de 79 personnes.

54 À 10^{-3} près, un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 99 % est :

(a) $[0\ ;\ 0{,}99]$ (b) $[0{,}071\ ;\ 0{,}229]$ (c) $[0{,}99\ ;\ 1]$ (d) $[0{,}046\ ;\ 0{,}254]$

55 Elle trouve finalement 19 gauchers parmi les 79 personnes étudiées.

(a) Au seuil de 99 %, l'hypothèse est à rejeter
(b) Au seuil de 99 %, on ne peut pas rejeter l'hypothèse
(c) Il faut recommencer l'expérience

56 Elle cherche ensuite à tester l'hypothèse au seuil de 95 %.

(a) Au seuil de 95 %, l'hypothèse est à rejeter
(b) Au seuil de 95 %, on ne peut pas rejeter l'hypothèse
(c) Il faut recommencer l'expérience

Dans un club de sport, 65 % des inscrits sont des hommes.

57 Lors d'une réunion de 55 personnes de cette association :

(a) il y a 35,75 hommes
(b) il y a entre 28 et 43 hommes
(c) il peut y avoir moins de 15 hommes

Un client désœuvré à la terrasse d'un café décide de compter le nombre de voitures rouges qui roulent dans la ville.

58 Sur 504 voitures, il en a compté 63 rouges. La proportion de voitures rouges roulant dans la ville est :

(a) Exactement 0,125
(b) Comprise entre 0,08 et 0,17 avec une probabilité supérieure à 0,95
(c) Comprise entre 0,05 et 0,2 avec une probabilité supérieure à 0,95
(d) Comprise entre 0,13 et 0,17 avec une probabilité supérieure à 0,95

59 Pour avoir un intervalle de confiance d'amplitude 0,02 au seuil de 95 %, le client aurait dû compter :

(a) 50 voitures (b) 100 voitures (c) 250 voitures (d) 10 000 voitures

60 Pour avoir un intervalle de confiance de rayon 0,05 au seuil de 95 %, le client aurait dû compter :

(a) 100 voitures (b) 400 voitures (c) 1 000 voitures (d) 4 000 voitures

TP 1 Comparaison avec un intervalle étudié en Seconde

INFO

On considère une population dans laquelle la proportion d'individus vérifiant une certaine propriété est p et dans laquelle on prélève un échantillon de taille n.

Le but de ce TP est d'étudier le lien entre :

- l'intervalle de fluctuation de la fréquence de la propriété dans l'échantillon au seuil de 95 % vu en Seconde (pour $0{,}2 \leqslant p \leqslant 0{,}8$ et $n \geqslant 25$) :
$$\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} \,;\, p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$
- l'intervalle de fluctuation asymptotique de cette même fréquence au seuil de 95 % (pour $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$) :
$$\left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \,;\, p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

A Quelques cas particuliers, avec un tableur

1) a) Dans un tableur, créer la feuille de calcul ci-dessous :

	A	B	C	D	E	F
1					n	100
2					p	0,3
3		Borne inférieure	Borne supérieure			
4	Intervalle de fluctuation de Seconde					
5	Intervalle de fluctuation asymptotique					

b) Saisir des formules dans les cellules B4, C4, B5 et C5 permettant d'obtenir les bornes inférieure et supérieure des intervalles de fluctuation pour les valeurs de n et p écrites respectivement dans les cellules F1 et F2.

2) À l'aide du tableur, déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % vu en Seconde et l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % vu en Terminale dans les cas suivants :

a) pour $n = 100$ et $p = 0{,}3$
b) pour $n = 500$ et $p = 0{,}8$
c) pour $n = 1\,000$ et $p = 0{,}3$
d) pour $n = 10\,000$ et $p = 0{,}25$

3) Dans chacun des cas précédents, que peut-on dire en termes d'inclusion de ces deux intervalles de fluctuation ?

4) Quelle conjecture peut-on émettre ? La mettre à l'épreuve avec d'autres valeurs de n et p.

B Démonstration de la conjecture

On souhaite maintenant démontrer la conjecture émise à la question **4** de la partie **A**.

1) a) Étudier les variations de $p \mapsto \sqrt{p(1-p)}$ sur $[0\,;\,1]$.

b) En déduire que $1{,}96\sqrt{p(1-p)} \leqslant 1$ sur $[0\,;\,1]$.

2) Conclure.

TP 2 Le bon seuil

ALGO

A Trouver u_α

1) On considère l'algorithme ci-dessous écrit avec le logiciel AlgoBox où :

- a désigne un nombre réel dans l'intervalle $]0\,;\,1[$;
- u désigne le nombre réel vérifiant $P(-u \leqslant X \leqslant u) = a$ où X suit la loi normale centrée réduite et a est le nombre défini au point précédent ;
- la commande `ALGOBOX_INVERSE_LOI_NORMALE_CR(p)` donne le nombre x tel que $P(X \leqslant x) = p$ où X suit la loi normale centrée réduite.

```
1.  VARIABLES
2.     a EST_DU_TYPE NOMBRE
3.     u EST_DU_TYPE NOMBRE
4.  DEBUT_ALGORITHME
5.     LIRE a
6.     u PREND_LA_VALEUR ALGOBOX_INVERSE_LOI_NORMALE_CR(......)
7.     AFFICHER u
8.  FIN_ALGORITHME
```

Compléter la ligne 6 pour que l'algorithme affiche le nombre u souhaité.

2) Sans utiliser l'algorithme ou une calculatrice, donner la valeur affichée par l'algorithme (à 10^{-2} près) si l'utilisateur rentre $a = 0{,}95$.

B Intervalle de fluctuation asymptotique

En s'appuyant sur l'algorithme précédent, en écrire un nouveau qui :

- demande à l'utilisateur la proportion p d'individus vérifiant une certaine propriété dans une population, la taille n d'un échantillon et un seuil a (sous forme décimale) ;
- affiche les bornes inférieure et supérieure de l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil a de la fréquence d'individus vérifiant la propriété dans un échantillon de taille n.

C Application

Une confiserie a lancé une nouvelle gamme de bonbons, les « chanceux ».

Quand on ouvre le papier autour d'un chanceux, soit le bonbon est rose et il ne se passe rien, soit il est vert et l'on obtient gratuitement un autre bonbon.

La confiserie l'affirme dans une publicité :

15 % des bonbons sont gagnants !

1) On admet que les services de la répression des fraudes mènent leurs études sur des échantillons de taille 50 et au seuil de 90 %.
Déterminer alors, en utilisant un intervalle de fluctuation asymptotique, dans quel intervalle doit se trouver le nombre de bonbons gagnants pour que l'on n'accuse pas la confiserie de publicité mensongère.

2) En réalité, cette confiserie « triche » et ne produit que 14,5 % de bonbons gagnants.
Risque-t-elle plus de se faire accuser de publicité mensongère que si elle ne trichait pas ?

TP 3 Sondages

INFO

A Avant le premier tour

Pour le premier tour d'une élection, on compte un candidat et deux candidates, que l'on note 1, 2 et 3.

Un journal commande à un institut un sondage, de taille « habituelle », soit sur un échantillon de 1 000 personnes dites représentatives.

Les résultats du sondage sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Vote	Candidat 1	Candidate 2	Candidate 3	Abstention	Blanc ou nul
Effectif	191	219	176	249	165

La candidate 2 pavoise, certaine d'être en tête au premier tour.

1) Déterminer un intervalle de confiance au seuil de 95 % des résultats pour chacun des candidates et candidat.

2) Que peut-on en conclure ?

3) Combien de personnes faudrait-il interroger pour pouvoir classer les candidates et candidat au seuil de 95 % en gardant les mêmes pourcentages d'intentions de vote ?

B Après le premier tour

Le soir du premier tour, les résultats sont publiés :

Vote	Candidat 1	Candidate 2	Candidate 3	Abstention ou Blanc ou nul
Pourcentage	21 %	19 %	18 %	42 %

On souhaite simuler différents sondages sur 1 000 personnes.

1) Réaliser la feuille de calcul ci-dessous :

	A	B	C	D	E	F
1	Vote				Nombre de votes	Pourcentage
2				Candidat 1		
3				Candidate 2		
4				Candidate 3		
5				Autre		

2) Dans la cellule A2, entrer la formule `=ALEA()` pour simuler un nombre entre 0 et 1.

3) Dans la cellule B2, entrer la formule `=SI(A2<0,21;1;SI(A2<0,4;2;SI(A2<0,58;3;4)))`.

4) Recopier ces formules vers le bas jusqu'à la ligne 1 001 pour simuler les choix des sondés.

5) Dans la cellule E2, entrer la formule `=NB.SI(B2:B1001;1)` pour compter le nombre d'intentions de vote pour le candidat 1.

6) Compléter de même les cellules de la colonne E puis la colonne F.

7) Relancer l'expérience avec la touche F9 ou CTRL+MAJ+F9.
Le candidat 1 est-il toujours donné gagnant ?

8) Recommencer l'expérience avec un sondage portant sur 10 000 personnes.
Qu'observe-t-on ?

9) **a)** Pour les trois candidats précédents, déterminer les intervalles de fluctuation asymptotiques au seuil de 95 % pour $n = 1\,000$ puis pour $n = 10\,000$.

b) Commenter les réponses aux questions **7** et **8** à l'aide de la question **9a**.

TP 4 Surréservation

CALC

A Intervalle de fluctuation

Une compagnie aérienne gère des avions pouvant accueillir 300 personnes.
Pour chaque vol, elle vend un nombre n de billets qui excède le nombre de places disponibles, comptant sur le fait que des voyageurs ne se présenteront pas pour prendre l'avion.
La probabilité qu'une personne se présente bien pour prendre son vol est p.
On suppose que les actes des passagers sont indépendants les uns des autres et on note X le nombre de personnes qui se présentent à l'embarquement.

1) Quelle loi suit X ?

2) Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique de la fréquence correspondante au seuil de 95 % en fonction de n et p.

3) La compagnie aérienne veut limiter les risques : elle souhaite que la probabilité que tous les passagers se présentant à l'aéroport aient une place soit supérieure à 0,95.
Expliquer pourquoi cela sera vérifié si :

$$p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} - \frac{300}{n} \leqslant 0$$

B Avec le tableur

À l'aide d'une feuille de calcul ou d'une calculatrice, conjecturer la valeur maximale de n qui est solution de l'inéquation précédente dans chacun des cas suivants :

a) $p = 0{,}9$ b) $p = 0{,}95$ c) $p = 0{,}98$

C Pour aller plus loin

Pour $p = 0{,}95$, résoudre l'inéquation (d'inconnue n) de la partie A en posant $x = \sqrt{n}$ et retrouver l'un des résultats obtenus à la partie B.

Récréation, énigmes

Trop beau pour être vrai !

Lucas affirme : « j'ai lancé 1000 fois cette pièce . Elle est parfaitement équilibrée, la preuve, j'ai obtenu 500 fois “face” ».
Lucie n'y croit pas. Comment peut-elle se convaincre que Lucas a truqué ses résultats ?

Partie A : Des intervalles contre les trucages

Les intervalles de fluctuation asymptotiques vus dans ce chapitre sont des intervalles bilatéraux : les valeurs refusées sont celles soit trop grandes, soit trop petites. Parfois, pour tester une hypothèse, on peut vouloir refuser des valeurs de fréquences trop « parfaites », qui seraient le résultat de trucages embellissant la théorie.

1) En vous appuyant sur le théorème de Moivre-Laplace, déterminer ainsi un bon intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 5 %, c'est-à-dire tel que la probabilité d'être en dehors soit proche de 95 %.

2) Discuter les résultats de Lucas.

Partie B : Un exemple célèbre

Pour appuyer une théorie, les résultats des expériences doivent-ils être parfaits ?
Chercher des informations concernant le moine Gregor Mendel, le fondateur de la génétique, et ses expériences sur les petits pois.

Fiche 1 Utiliser un tableur

Dans cette fiche, les méthodes ne spécifiant pas le logiciel utilisé sont similaires pour les différents types de tableurs (Libre Office ou Open Office Calc et Excel). Dans ce cas, les captures d'écrans sont issues du logiciel Calc.

1 Adresse et cellule

Une feuille de calcul est un tableau dont chacune des cases, appelées **cellules**, est repérée horizontalement par un nombre entier strictement positif et verticalement par une lettre, ce qui permet de donner l'**adresse** de la cellule.

2 Calcul avec le tableur

Dans une cellule, on peut écrire un calcul précédé du signe = en utilisant les commandes usuelles +, -, *, / ou ^.
Le tableur écrira alors le résultat du calcul dans la cellule.
Exemple : Si l'on écrit `=5+3^2` dans la cellule A1 et que l'on valide avec la touche Entrée, le tableur écrira 14 dans A1.
Attention, dans le tableur, un calcul commence toujours par le symbole =.

3 Formule et adressage

Dans une feuille de calcul, on peut faire des calculs en faisant référence à une cellule donnée.
Exemple :

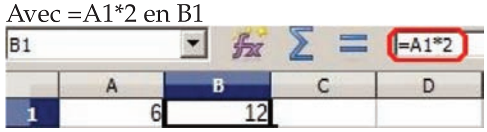
- Si l'on saisit une valeur dans la cellule A1 et que l'on veut afficher son double dans la cellule B1, on sélectionne B1, on y écrit la **formule** `=A1*2`. On valide avec la touche Entrée :

donne


- L'avantage d'écrire la formule `=A1*2` et non pas `=8*2` dans la cellule B1 est que la formule s'adapte si l'on change la valeur en A1, par exemple si l'on y écrit 6 :

Avec =8*2 en B1


La valeur en B1 ne s'adapte pas, cela reste 16.

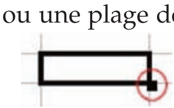
Avec =A1*2 en B1


La valeur en B1 s'adapte, cela donne 12.

Remarques :

- Quand on sélectionne une cellule, la formule inscrite dedans est affichée dans la **barre de saisie** (voir encadré rouge sur les captures d'écrans précédentes).
- On peut modifier la formule inscrite dans une cellule en sélectionnant cette cellule et en modifiant directement la formule dans la barre de saisie.

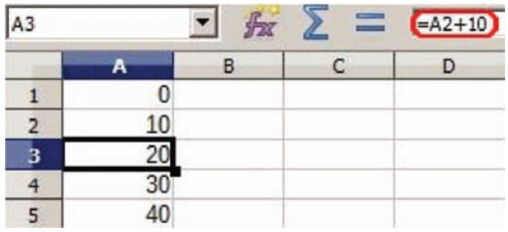
4 Poignée de recopie

Lorsque l'on sélectionne une cellule ou une plage de cellules, un petit carré apparaît en bas à droite : c'est la **poignée de recopie** : 
Elle permet d'automatiser les calculs.

Exemple :

Si l'on veut écrire 0, 10, 20, 30, . . . , 100 dans la colonne A :

- on écrit `0` dans la cellule A1 ;
- on écrit `=A1+10` dans la cellule A2, on obtient bien 10 ;
- on sélectionne la poignée de recopie, on maintient appuyé et on recopie vers le bas jusqu'à obtenir 100.



Remarques :

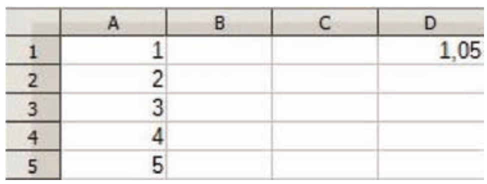
- Lorsque l'on recopie vers le bas, dans les adresses des cellules, les 1 deviennent 2, les 2 deviennent 3, etc.
- Dans l'exemple précédent, on observe que les formules se sont bien adaptées dans chaque cellule. Par exemple, en A3, il est inscrit `=A2+10` (voir capture ci-dessus).
- On peut aussi recopier vers la droite (les A deviennent B, les B deviennent C, etc.), la gauche ou le haut.

5 Utilisation du dollar

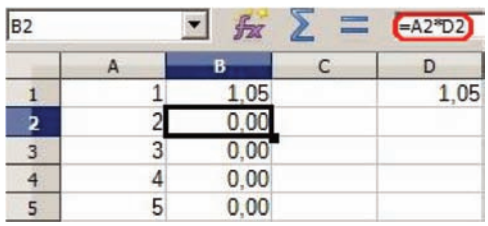
Le symbole `$` permet de **bloquer** la lettre ou le nombre d'une adresse dans une formule.

Exemple :

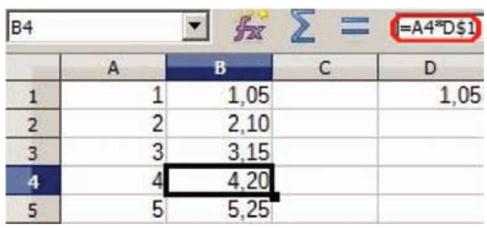
- Dans la feuille de calcul ci-contre, on souhaite multiplier tous les nombres de la colonne A par le nombre présent dans la cellule D1.



- Si l'on saisit la formule `=A1*D1` dans la cellule B1 et que l'on recopie vers le bas, on obtiendra `=A2*D2` dans la cellule B2.



- Cela ne convient pas (il faudrait `=A2*D1` en B2) : il faut donc bloquer le « 1 » de D1.
  Cela se fait à l'aide du symbole `$` qui bloque la lettre ou le nombre qui le suit directement dans l'adresse d'une cellule. On saisit donc la formule `=A1*D$1` en B1.



Quand on recopie vers le bas, on constate que le 1 de D1 est bien bloqué dans les cellules recopiées. Par exemple en B4, on a bien `=A4*D$1`.

Remarque :

On aurait aussi pu saisir la formule `=A1*$D$1` en B1 mais ce n'est pas utile car le D n'a pas besoin d'être bloqué puisque l'on ne recopie pas la formule vers la droite.

6 Quelques fonctions usuelles

Le tableur dispose de certaines **fonctions** auxquelles on a accès dans l'onglet Insertion>Fonction ou directement grâce au raccourci :  sous Calc  sous Excel

`ALEA()`	Donne un nombre décimal au hasard entre 0 et 1
`ALEA.ENTRE.BORNES(a;b)`	Donne un nombre entier au hasard entre a et b inclus
`ECARTYPEP(plage)`	Donne l'écart-type des valeurs de la plage
`LOI.BINOMIALE(k;n;p;0)` sous Calc `LOI.BINOMIALE.N(k;n;p;0)` sous Excel	Donne $P(X = k)$ où X suit la loi binomiale de paramètres n et p
`LOI.BINOMIALE(k;n;p;1)` sous Calc `LOI.BINOMIALE.N(k;n;p;1)` sous Excel	Donne $P(X \leqslant k)$ où X suit la loi binomiale de paramètres n et p
`MAX(plage)`	Donne le plus grand nombre des valeurs de la plage
`MIN(plage)`	Donne le plus petit nombre des valeurs de la plage
`MOYENNE(plage)`	Donne la moyenne des valeurs de la plage
`NB.SI(plage;a)`	Donne le nombre de fois où la valeur a apparaît dans la plage
`QUARTILE(plage;numéro du quartile)`	Donne le quartile (spécifié par le numéro du quartile : 1 correspond à Q_1, 2 à la médiane et 3 à Q_3) des valeurs de la plage
`SOMME(plage)`	Donne la somme des valeurs de la plage

Remarques :

- Quand on utilise ces fonctions, il faut nécessairement commencer la formule par le symbole =.
- Pour les fonctions `ALEA` et `ALEA.ENTRE.BORNES`, on peut relancer une simulation en appuyant sur `CTRL+SHIFT+F9` (sous Calc) ou `F9` (sous Excel).

7 Graphiques

Sous Libre Office ou Open Office Calc

On accède à l'assistant de diagramme dans l'onglet Insertion>Diagramme ou grâce au raccourci

Sous Excel

Dans l'onglet Insertion, on choisit directement le type de graphique voulu parmi ceux proposés :

■ Courbe d'une fonction

La 1^re^ colonne correspond aux abscisses des points et la 2^e^ colonne aux ordonnées.

Sous Libre Office ou Open Office Calc

- On sélectionne les deux colonnes (avec éventuellement les en-têtes en 1^re^ ligne).
- On appelle l'assistant de diagramme.
- On choisit XY(dispersion) puis le style souhaité (points seuls, points et lignes, etc.).
- Si l'on veut donner des titres, on peut le faire à l'étape 4 : Eléments du diagramme.

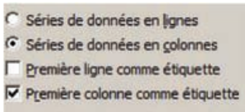
Sous Excel

- On sélectionne la 2^e^ colonne (sans en-tête).
- On choisit l'onglet Insertion puis le graphique Ligne  puis on choisit le style.
- On appuie sur le bouton  puis sur le bouton  (sous « Étiquettes de l'axe horizontal (abscisse) ») et on sélectionne la première colonne (sans en-tête) et on valide.
- Si l'on veut donner des titres, on choisit un modèle parmi ceux proposés ici.

Diagramme en bâtons

La 1re colonne correspond aux valeurs et la 2e colonne aux effectifs ou aux fréquences d'une série statistique.

Sous Libre Office ou Open Office Calc

- On sélectionne les deux colonnes (sans les en-têtes).
- On appelle l'assistant de diagramme.
- On choisit Colonne et le premier style  puis Suivant>>.
- On règle ce menu ainsi : 

- On va à l'étape 4 : Eléments du diagramme et on décoche Afficher la légende (on peut aussi donner des titres aux axes).

Sous Excel

- On sélectionne la 2e colonne (sans en-tête).
- On choisit l'onglet Insertion puis le graphique Colonne  puis le premier style.
- On appuie sur le bouton  puis sur le bouton  (sous « Étiquettes de l'axe horizontal (abscisse) ») et on sélectionne la plage des valeurs (sans en-tête) et on valide.
- Si l'on veut donner des titres, on choisit un modèle parmi ceux proposés ici.

Remarque :

L'axe des abscisses n'est pas régulièrement gradué si les effectifs ne sont pas régulièrement espacés, ce n'est donc pas un « vrai » diagramme en bâtons.

Diagramme circulaire (ou camembert)

La 1re colonne correspond aux différentes modalités et la 2e colonne aux effectifs ou aux fréquences d'une série statistique.

Sous Libre Office ou Open Office Calc

- On sélectionne la plage de données (sans les en-têtes).
- On appelle l'assistant de diagramme.
- On choisit Secteur et le premier style puis Terminer.

Sous Excel

- On sélectionne les deux colonnes (sans les en-têtes).
- On choisit l'onglet Insertion puis le graphique Secteurs  puis le premier style et on valide.

Fiche 2 Mode Examen des calculatrices Casio et TI

1 Mise en « Mode Examen »

Calculatrice Casio Graph35+E

La calculatrice éteinte, presser simultanément les 3 touches : COS 7 AC/ON. La calculatrice s'allume avec le message : « Réinitialisation ? Accès au mode Examen ». Presser F1.

Sur l'écran apparaît : « Attention sortir du Mode Examen nécessitera une 2nde machine/PC ». Presser F2. La calculatrice indique : « Accès au Mode Examen ». Presser EXIT.

La diode rouge, située en haut de la calculatrice, clignote et un témoin « R » apparaît à droite à l'écran.

Calculatrice TI-82 Advanced et TI-83 Premium CE

La calculatrice éteinte, presser simultanément les 3 touches : annul enter on. La diode jaune clignote, vous êtes en mode d'examen. Les données personnelles sont effacées et seules les applications TI restent accessibles.

2 Sortie du « Mode Examen »

Calculatrice Casio Graph35+E

Connecter votre calculatrice avec une autre calculatrice du même modèle qui n'est pas en « Mode Examen ». Les deux calculatrices communiquent via un câble 3 broches. Dans le sous-menu [Link] et sur les deux calculatrices, presser F4 (CABL) et choisir F2 (câble 3 broches). Sur la calculatrice qui n'est pas en « Mode Examen », dans le sous-menu Link, presser F3 (EXAM) puis OED (Déverrouiller Mode Examen). La calculatrice affiche alors le message « Réinitialisation ? » Déverrouiller le « Mode Examen ». Presser F1.

Le « Mode Examen » peut aussi s'annuler avec un ordinateur ayant le logiciel « FA-124 ». La calculatrice en « Mode Examen » est connectée à l'ordinateur via un câble USB. Dans le sous-menu Link, presser F4 (CABL) et choisir F1 (câble USB). Sur l'ordinateur, lancer le logiciel CASIO FA-124USB. Un écran s'affiche sur la calculatrice, presser F1 (transfDon). L'écran affiche le message « Réception en cours... ». Sur l'ordinateur, cliquer sur l'icône Connect. La calculatrice qui était en « Mode Examen » affiche le message « Quitter le Mode Examen ». Redémarrer et restaurer mémo », presser EXIT. Après une seconde, la calculatrice redémarre en mode normal.

Calculatrice TI

Vous devez connecter deux calculatrices du même modèle avec un câble mini-USB. La calculatrice en mode examen est placée en « Mode Réception » à l'aide de la séquence de touche 2nde échanger. La seconde calculatrice est placée en « Mode Envoi » avec les mêmes touches. Vous procédez à l'envoi de n'importe quel type de fichier : liste, image, programme, etc. Vous terminez l'opération en acceptant la réception du fichier ; la calculatrice sort ainsi du mode examen.

Le « Mode Examen » peut aussi s'annuler avec un ordinateur ayant le logiciel « TI-Connect CE (version minimum 5.0) ». La calculatrice est connectée à l'ordinateur via un câble mini-USB. Par un simple glisser/déposer depuis l'ordinateur d'un fichier compatible (liste, Image.jpg, programme,. . .) la calculatrice sort du mode examen.

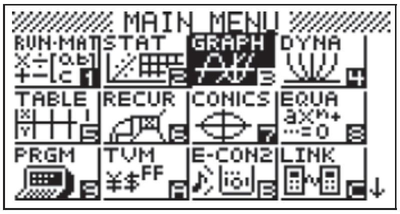
Fiche 3 Utiliser une calculatrice Casio

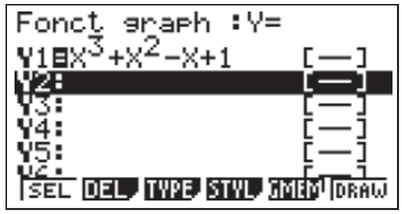
1 Travailler avec les fonctions

On veut obtenir un tableau de valeurs avec un pas de 0,5 et représenter graphiquement la fonction $x \mapsto x^3 + x^2 - x + 1$ sur l'intervalle $[-3\ ;\ 2]$.

Définir une fonction

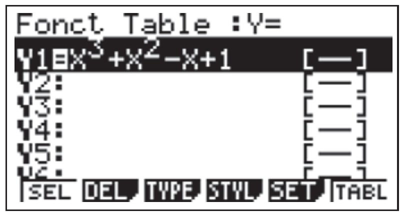
Depuis le menu principal menu, sélectionner le sous-menu GRAPH puis saisir l'expression de la fonction.



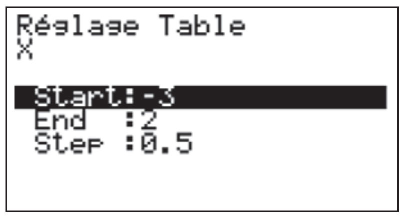


Obtenir un tableau de valeurs

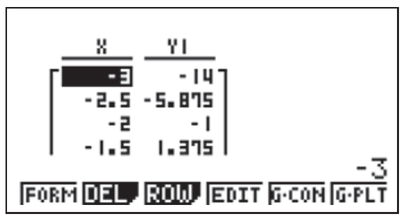
Depuis le menu principal menu, sélectionner le sous-menu TABLE. On y retrouve la (ou les) fonction(s) déjà saisie(s).



F5 (SET) pour accéder aux paramètres. On précise le début 2 et la fin de l'intervalle −3, ainsi que le pas 0,5 (c'est-à-dire de combien en combien vont les valeurs de x).

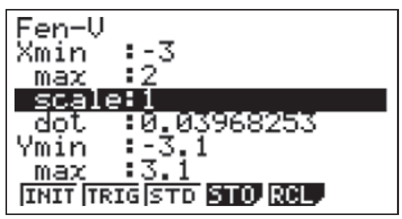


EXE pour valider les paramètres puis F6 (TABL) pour afficher le tableau de valeurs.

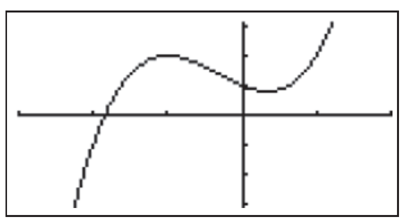


Tracer une courbe

Depuis le sous-menu GRAPH, SHIFT V-WINDOW pour accéder aux paramètres de la fenêtre graphique.



EXE pour valider la fonction puis F6 (DRAW) pour afficher la courbe sur l'intervalle $[-3\ ;\ 2]$.



2 Écrire un algorithme

■ Créer un programme

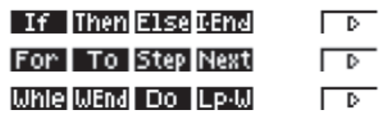
Depuis le menu principal menu, sélectionner le sous-menu PRGM.

F3 (NEW) pour créer un nouveau programme.
Taper le nom du programme puis EXE pour valider.

■ Éditer un programme

La liste des commandes principales s'obtient depuis SHIFT PRGM.

(SHIFT PRGM) F1 (COM) permet d'accéder aux commandes de tests conditionnels et de boucles.



La liste des tests de relations s'obtient depuis (SHIFT PRGRM) F6 (>) REL

■ Lancer un programme

Depuis le sous-menu affichant la liste des programmes, la touche F1 (EXE) permet d'exécuter le programme surligné.

■ Modifier un programme

Depuis le sous-menu affichant la liste des programmes, la touche F2 (EDIT) permet de modifier le programme surligné.

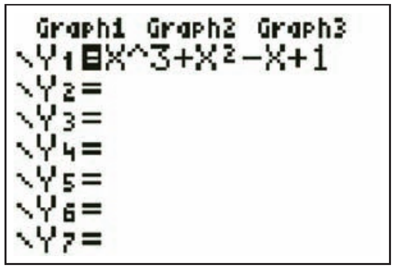
Fiche 4 Utiliser une calculatrice TI

1 Travailler avec les fonctions

On veut obtenir un tableau de valeurs avec un pas de 0,5 et représenter graphiquement la fonction $x \mapsto x^3 + x^2 - x + 1$ sur l'intervalle $[-3\,;\,2]$.

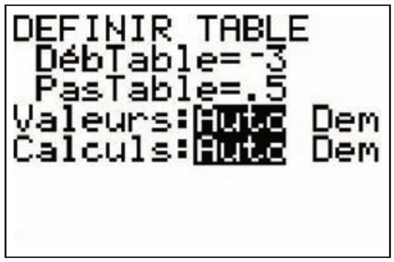
Définir une fonction

Depuis le menu f(x), saisir l'expression de la fonction.

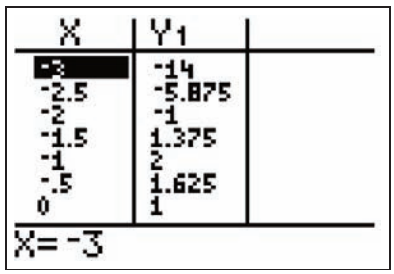


Obtenir un tableau de valeurs

Depuis le menu déf table (2nde puis fenêtre), on précise le premier terme -3 et le pas du tableau de valeurs $0,5$ (c'est-à-dire de combien en combien vont les valeurs de x).

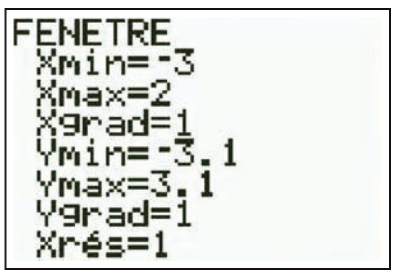


Enfin, on obtient le tableau de valeurs dans le menu table (2nde puis graphe).

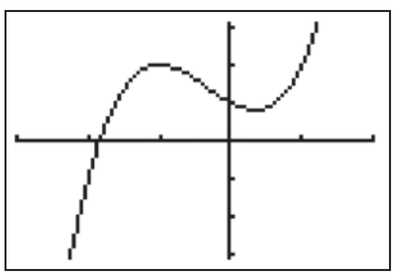


Tracer une courbe

On règle les paramètres de la fenêtre graphique dans le menu fenêtre.



On affiche la courbe avec la touche graphe.



2 Écrire un algorithme

Sélectionner le menu PRGM. On a accès aux différents sous-menus.

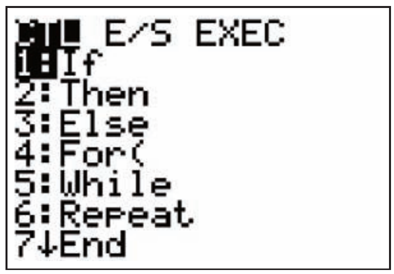
Créer un programme

Sélectionner le sous-menu NOUV pour créer un nouveau programme.
Taper le nom du programme puis entrer pour valider.

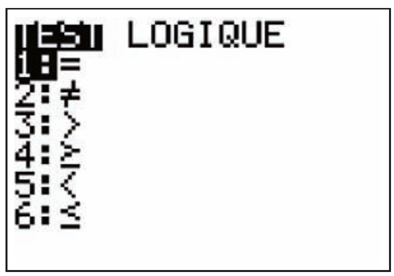
Éditer un programme

Lorsqu'un programme est en cours d'écriture, on a accès :

- aux différentes commandes avec la touche PRGM puis dans les menus CTL ou E/S ;

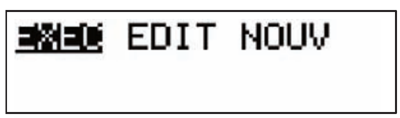


- aux symboles $>$, $<$, $=$ $\leqslant$, $\geqslant$ dans le menu tests, obtenu avec les touches 2nde puis MATH.



Lancer un programme

Sélectionner le sous-menu EXEC pour exécuter un programme.



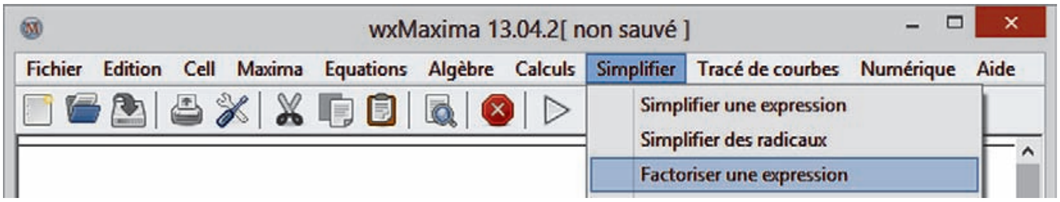
Modifier un programme

Sélectionner le sous-menu EDIT pour modifier un programme déjà existant.

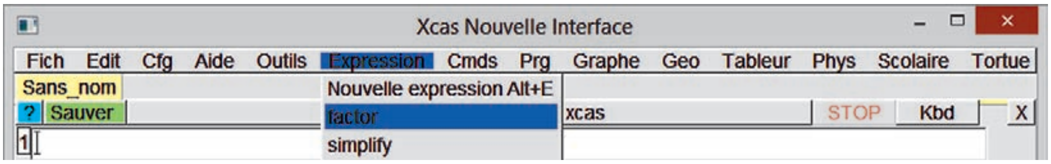
Fiche 5 Utiliser un logiciel de calcul formel

1 Découvrir l'interface logicielle

Maxima, avec l'interface wxMaxima



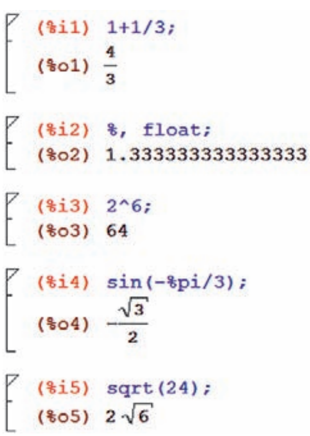
Xcas



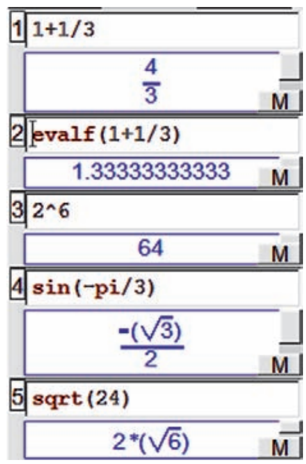
2 Effectuer un calcul, écrire une expression algébrique

Exemples :

Maxima



Xcas



Remarques :

- Les symboles +, -, /, *, ^ sont utilisés pour toutes les opérations classiques.
- On utilise **sqrt** pour la racine carrée.
- On utilise **cos**, **sin** et **tan** pour les fonctions trigonométriques.
- Pour obtenir une valeur approchée, on utilise **float** sous Maxima et **evalf** sous Xcas.
- Sous Maxima, « % » désigne le dernier calcul effectué et π s'écrit « %pi ».

3 Transformer des expressions, résoudre des équations

Développer, factoriser, simplifier

Exemples :

Maxima

```
(%i1) (x+2)*(2*x-9), expand;
(%o1) 2 x^2-5 x-18

(%i2) x^3-1, factor;
(%o2) (x-1)(x^2+x+1)

(%i3) 1/(x-1)+1/x, ratsimp;
(%o3) (2 x-1)/(x^2-x)

(%i4) %, factor;
(%o4) (2 x-1)/((x-1) x)
```

Xcas

```
1 developper((x+2)*(2x-9))
  2*x^2-5*x-18
2 factoriser(x^3-1)
  (x-1)*(x^2+x+1)
3 simplifier(1/(x-1)+1/x)
  (2*x-1)/(x^2-x)
4 factoriser(1/(x-1)+1/x)
  (2*x-1)/(x*(x-1))
```

Résoudre des équations

Exemples :

Maxima

```
(%i1) solve(x^2+5*x-3);
(%o1) [x=-(sqrt(37)+5)/2, x=(sqrt(37)-5)/2]

(%i2) linsolve([y=2*x-2, y=5*x+5], [x,y]);
(%o2) [x=-7/3, y=-20/3]
```

Xcas

```
1 resoudre(x^2+5x-3=0)
  [(-(sqrt(37))-5)/2, (sqrt(37)-5)/2]
2 linsolve([y=2x-2,y=5x+5],[x,y])
  [-7/3, -20/3]
```

Remarques :

- Si l'on ne précise pas le membre de droite d'une l'équation, celui-ci est supposé nul.
- On doit indiquer le nom des inconnues lorsqu'il y en a plusieurs ou bien ambiguïté.

4 Travailler avec des fonctions et des suites

Travailler avec des fonctions

Exemples :

Maxima

```
(%i1) f(x):=-x^4+x^2;
(%o1) f(x):=-x^4+x^2

(%i2) f(1/2);
(%o2) 3/16

(%i3) subst(1/2,x,f(x));
(%o3) 3/16

(%i4) diff(f(x),x,1);
(%o4) 2 x-4 x^3

(%i5) %, factor;
(%o5) -2 x(2 x^2-1)

(%i6) diff(f(x),x,2);
(%o6) 2-12 x^2
```

Xcas

```
1 f(x):=-x^4+x^2
  x ->-x^4+x^2
2 f(1/2)
  3/16
3 substituer(f(x),x=1/2)
  3/16
4 deriver(f(x),x,1)
  (-4)*x^3+2*x
5 factoriser(deriver(f(x),x,1))
  (-2)*x*(x+sqrt(2)/2)*(2*x-(sqrt(2)))
6 deriver(f(x),x,2)
  (-12)*x^2+2
```

Remarque :
Lors d'un calcul de dérivée, le premier argument est la fonction à dériver, le deuxième est la variable par rapport à laquelle on dérive et le troisième représente le nombre de fois que l'on dérive.

■ Déterminer, si elle existe, la formule explicite d'une suite définie par récurrence

Exemple :
On considère la suite (u_n), définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 0$: $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 1}$. On souhaite déterminer, si elle existe, l'expression de u_n en fonction de n.

Maxima

```
(%i1) load(solve_rec);... (0 Lignes cachées)
(%i2) solve_rec(u(n+1)=u(n)/(u(n)+1),u(n),u(0)=1);
```
(%o2) $u(n)=\dfrac{n+2}{n+1}-1$
```
(%i3) %, ratsimp;
```
(%o3) $u(n)=\dfrac{1}{n+1}$

Xcas

```
1 rsolve(u(n+1)=u(n)/(u(n)+1),u(n),u(0)=1)
```
$\left[\dfrac{1}{n+1}\right]$

Remarque :
Avec Maxima, on doit charger le package « solve_rec ».

■ Calculer une somme de termes d'une suite

Exemple :
On souhaite calculer la somme des 2 016, et plus généralement, des n premiers nombres impairs.
Un nombre impair s'écrit $2k+1$. Le premier est pour $k = 0$ donc le 2 016ᵉ est pour $k = 2\,015$.

Maxima

```
(%i1) sum(2*k+1, k, 0, 2015), simpsum;
(%o1) 4064256
(%i2) sum(2*k+1, k, 0, n-1), simpsum;
```
(%o2) $2\,n+(n-1)^2-1$
```
(%i3) %, factor;
```
(%o3) n^2

Xcas

```
1 sum(2k+1,k,0,2015)
```
4064256
```
2 sum(2k+1,k,0,n-1)
```
n^2-n+n
```
3 simplifier(sum(2k+1,k,0,n-1))
```
n^2
```
4
```

Xcas et **Maxima** sont des logiciels libres. On peut les télécharger gratuitement aux adresses :
`http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/giac_fr.html`
`http://maxima.sourceforge.net/`
Il existe des versions en ligne, ne nécessitant pas d'installation, aux adresses :
`http://www.xcasenligne.fr/giac_online/demoGiacPhp.php`
`http://maxima-online.org/index.html`

SOLUTIONS

Chapitre A1
Récurrence et suites

Auto-évaluation

1 **1)**

- $u_1 = 2u_0 + 3 = 2 \times 2 + 3 = 7$
- $u_2 = 2u_1 + 3 = 2 \times 7 + 3 = 17$
- $u_3 = 2u_2 + 3 = 2 \times 17 + 3 = 37$

2) $u_{n+1} = 2u_{n+1-1} + 3 = 2u_n + 3$

2 **1)**

- $v_1 = v_0 + 3 \times 0 + 4 = 3 + 3 \times 0 + 4 = 7$
- $v_2 = v_1 + 3 \times 1 + 4 = 7 + 3 \times 1 + 4 = 14$
- $v_3 = v_2 + 3 \times 2 + 4 = 14 + 3 \times 2 + 4 = 24$

2) $v_n = v_{n-1} + 3 \times (n-1) + 4 = v_{n-1} + 3n + 1$

3 **1)** $x_n = x_0 + n \times r = 4 - 2n$

2) $y_n = y_1 \times q^{n-1} = 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

4 **1) a)** $u_n = 3 + \frac{1}{4}n$ donc $u_{96} = 3 + \frac{1}{4} \times 96 = 27$

b) $u_n > 100 \Leftrightarrow 3 + \frac{1}{4}n > 100 \Leftrightarrow \frac{1}{4}n > 97$

$\Leftrightarrow n > 388$ donc à partir du rang 389.

2) a) $v_n = v_0 + n \times r$ donc $v_3 = v_0 + 3r = 6$ et $v_8 = v_0 + 8r = -5$.

Par soustraction, on a $5r = -11$ donc $r = -2{,}2$.

b) On en déduit que $v_0 = 6 - 3r = 6 - 3(-2{,}2) = 12{,}6$ puis $v_{1000} = 12{,}6 + 1000 \times (-2{,}2) = -2\,187{,}4$.

5 **1)** $u_0 = 4$, $u_1 = 5$ et $u_2 = 7$ donc $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_1}{u_0}$: la suite n'est pas géométrique.

2) $u_{n+1} = 5 \times 4^{n+1} = 4 \times (5 \times 4^n) = 4u_n$ donc la suite est géométrique de raison 4.

3) $u_{n+1} = 3^{n-1} = 3 \times (3^{n-2}) = 3u_n$ donc la suite est géométrique de raison 3.

4) $u_0 = 1$, $u_1 = 8$ et $u_2 = 57$ donc $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_1}{u_0}$: la suite n'est pas géométrique.

6 **1)** $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 149 + 150 = \frac{150 \times 151}{2}$
$= 11\,325$

2) $1 + 3 + 9 + 27 + \cdots + 3^{10} = \sum_{k=0}^{10} 3^k$
$= \frac{1 - 3^{10+1}}{1 - 3} = 88\,573$

3) $\sum_{k=0}^{n} 5^k = \frac{1 - 5^{n+1}}{1 - 5} = \frac{5^{n+1} - 1}{4}$

4) $\sum_{k=0}^{n} (7k + 2) = 7\left(\sum_{k=0}^{n} k\right) + 2(n+1)$
$= 7\frac{n(n+1)}{2} + 2n + 2$

7 **1)** $u_{n+1} - u_n = 5 - 4^{n+1} - (5 - 4^n)$
$= 5 - 4^{n+1} - 5 + 4^n = 4^n(-4 + 1) = -3 \times 4^n < 0$
pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc (u_n) est décroissante.

2) $u_{n+1} - u_n = 5(n+1)^2 + 4 - \left(5n^2 + 4\right)$
$= 5(n^2 + 2n + 1) + 4 - 5n^2 - 4 = 10n + 5 > 0$
pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc (u_n) est croissante.

3) $u_{n+1} - u_n = n + 1 > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc (u_n) est croissante.

4) $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et
$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3 \times 2^{(n+1)+1}}{3 \times 2^{n+1}} = \frac{2^{n+2}}{2^{n+1}} = 2 > 1$ donc (u_n) est croissante.

5) $u_0 = 0$, $u_1 = -1$ et $u_2 = 2$ donc $u_2 - u_1 > 0$ et $u_1 - u_0 < 0$: la suite (u_n) n'est ni croissante ni décroissante.

8 **1)**

- $u_{n+1} = 5(n+1) - 3 = 5n + 2$
- $u_{n-1} = 5(n-1) - 3 = 5n - 8$

2)

- $u_{n+1} = \frac{1 - 3^{n+1}}{(n+1) + 1} = \frac{1 - 3^{n+1}}{n + 2}$
- $u_{n-1} = \frac{1 - 3^{n-1}}{(n-1) + 1} = \frac{1 - 3^{n-1}}{n}$

3)

- $u_{n+1} = 9^{(n+1)+3} = 9^{n+4}$
- $u_{n-1} = 9^{(n-1)+3} = 9^{n+2}$

S'entraîner

1 La propriété au rang $n + 1$:
« $u_{n+1} = 8^{(n+1)+1} + 3$ » soit « $u_{n+1} = 8^{n+2} + 3$ »

2 La propriété au rang $n + 1$: « $u_{n+1} = 2$ »

3 **1)** Pour $n = 2$, l'algorithme affiche -7.
2) Pour $n = 8$, l'algorithme ne fournit pas de résultat (car la boucle « tant que » ne s'arrête pas).
3) L'algorithme ne fournit pas de résultat dès qu'il rentre dans la boucle (puisque $a > 0 \Rightarrow a + 2 > 0$) c'est-à-dire dès que $-11 + 2n > 0$ autrement dit pour n entier supérieur ou égal à 6.

4 **1)** La propriété n'est pas initialisée car $u_0 < 0$.
2) La propriété est héréditaire car $u_n \geqslant 0 \Rightarrow 2u_n \geqslant 0$ c'est-à-dire $u_{n+1} \geqslant 0$.
3) La propriété n'est pas vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ puisqu'elle n'est pas vraie au rang 0 (en réalité, elle n'est même vraie pour aucun entier).

5 **1)** La propriété est initialisée au rang 1 car $5^1 - 2 = 3$ est un multiple de 3.
2) La propriété n'est pas vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ car elle n'est pas vraie au rang 2 ($u_2 = 23$ n'est pas un multiple de 3).
3) La propriété n'est pas héréditaire car si elle l'était, comme elle est initialisée, elle serait vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui n'est pas le cas.

6 $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1 \Rightarrow -3 \leqslant 3(-1)^n \leqslant 3$
$\Rightarrow 2 \leqslant 5 + 3(-1)^n \leqslant 8$ donc $2 \leqslant u_n \leqslant 8$.

7 **1)** De manière évidente, $u_n = \dfrac{4n+5}{n+2} > 0$ car $4n + 5 > 0$ et $n + 2 > 0$ pour $n \in \mathbb{N}$ donc (u_n) est minorée par 0.
2) De manière évidente, $-\dfrac{3}{n+2} < 0$ car $-3 < 0$ et $n + 2 > 0$ pour $n \in \mathbb{N}$ donc $u_n = 4 - \dfrac{3}{n+2} < 4$: (u_n) est majorée par 4.

8 La suite (u_n) définie par $u_n = 5 - n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est majorée par 5.

9 Toutes ces suites sont croissantes, il s'agit donc de trouver le premier rang à partir duquel $u_n > A$.
1) À partir du rang 101.
2) À partir du rang 178.
3) À partir du rang 101.
4) À partir du rang 3.

10 $-1 < q < 1$ donc la limite de cette suite est 0.

11 **1)** Indéterminée mais on peut lever l'indétermination.
2) C'est un forme indéterminée.
3) Ce n'est pas une forme indéterminée.
4) Ce n'est pas une forme indéterminée.
5) Indéterminée mais on peut lever l'indétermination.

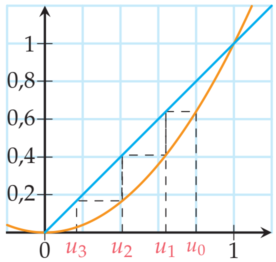
12 **1)** (u_n) est divergente.
2) (u_n) est convergente vers 3.
3) (u_n) est divergente vers $-\infty$.
4) (u_n) est divergente vers $+\infty$.
5) (u_n) est convergente vers 0.
6) (u_n) est divergente vers $+\infty$.
7) (u_n) est convergente vers 1.

13 **1)** $7\sqrt{n} - 1 \leqslant u_n$ **3)** $u_n \leqslant 1 - n$
2) $-\dfrac{5}{n} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{5}{n}$ **4)** $n + 2 \leqslant u_n$

14 **1)** On ne peut rien dire.
2) (u_n) est convergente (minorée et décroissante).
3) (u_n) est divergente vers $-\infty$ (suite décroissante non minorée).
4) (u_n) est convergente (majorée à partir d'un certain rang et croissante).
5) On ne peut rien dire.
6) (u_n) est convergente (majorée et croissante).

16 • On considère la propriété : « $2 \leqslant u_n \leqslant 5$ ».
• Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 5$. Donc $2 \leqslant u_0 \leqslant 5$: la propriété est vraie pour $n = 0$.
• Hérédité : si la propriété est vraie à un certain rang $n \geqslant 0$ alors elle est vraie au rang $n + 1$.
Supposons donc que $2 \leqslant u_n \leqslant 5$, on a alors :
$$2 \leqslant u_n \leqslant 5$$
$$1 \leqslant \frac{1}{2}u_n \leqslant 2{,}5$$
$$2 \leqslant \frac{1}{2}u_n + 1 \leqslant 3{,}5.$$
On en déduit que $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant 5$, c'est-à-dire que la propriété est vraie au rang $n + 1$.
• La propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire ; par récurrence elle est vraie pour tout $n \geqslant 0$ c'est-à-dire que $2 \leqslant u_n \leqslant 5$ pour tout $n \geqslant 0$.

27 **1)** On constate ci-dessous que la suite semble décroissante :



2) Montrons que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout $n \geqslant 0$.

• On considère la propriété : « $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ ».

• Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 0{,}8$ et $u_1 = 0{,}64$. On a $0 \leqslant u_1 \leqslant u_0$: la propriété est vraie pour $n = 0$.

• Hérédité : On va montrer que si la propriété est vraie à un certain rang $n \geqslant 0$ alors elle est vraie au rang $n+1$.

Supposons donc que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$, on a alors :

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant u_{n+1} \leqslant u_n & \\ 0^2 &\leqslant u_{n+1}^2 \leqslant u_n^2 & \text{car la fonction carrée} \\ 0 &\leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} & \text{est croissante sur } \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

On en déduit que $0 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$, c'est-à-dire que la propriété est vraie au rang $n+1$.

• Conclusion : La propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire ; donc par récurrence elle est vraie pour tout $n \geqslant 0$ c'est-à-dire que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout $n \geqslant 0$. Comme $u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite est décroissante.

34 **1)** **a)** La fonction $f : x \mapsto x^2 - 4x + 6$ est minorée par l'ordonnée du sommet de sa parabole soit $f\left(-\dfrac{-4}{2}\right) = f(2) = 2$ donc la suite de terme général $n^2 - 4n + 6$ est minorée par 2.

b) De même, la suite de terme général $-3n^2 + 9n - 4$ est majorée par 2,75.

c) Par inégalités successives, on a

$\dfrac{n^2-1}{n+1} \leqslant \dfrac{n^2+\cos(n)}{n+1}$

$\Leftrightarrow \dfrac{(n-1)(n+1)}{n+1} \leqslant \dfrac{n^2+\cos(n)}{n+1}$

$\Leftrightarrow n-1 \leqslant \dfrac{n^2+\cos(n)}{n+1}$. Or $-1 \leqslant n-1$ pour $n \in \mathbb{N}$ donc $-1 \leqslant \dfrac{n^2+\cos(n)}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc la suite est minorée par -1.

d)

• Pour $n \in \mathbb{N}$, $8n+1 > 0$ et $n+5 > 0$ donc $\dfrac{8n+1}{n+5} > 0$: la suite est minorée par 0.

• $\dfrac{8n+1}{n+5} - 8 = \dfrac{-39}{n+5} < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On en déduit que $\dfrac{8n+1}{n+5} < 8$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ autrement dit, que la suite est majorée par 8.

e)

• $\dfrac{-n^2-2n+1}{n^2+3n+2} - (-1) = \dfrac{n+3}{n^2+3n+2} > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $\dfrac{-n^2-2n+1}{n^2+3n+2} > -1$: la suite est minorée par -1.

• $\dfrac{-n^2-2n+1}{n^2+3n+2} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{-3n^2-7n}{2(n^2+3n+2)} < 0$

$\dfrac{-n^2-2n+1}{n^2+3n+2} < \dfrac{1}{2}$: la suite est majorée par $\dfrac{1}{2}$.

2) Montrons que $2 \leqslant u_n \leqslant 5$ pour tout $n \geqslant 0$.

• On considère la propriété : « $2 \leqslant u_n \leqslant 5$ ».

• Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 5$.

$2 \leqslant u_0 \leqslant 5$: la propriété est vraie pour $n = 0$.

• Hérédité :

Supposons que $2 \leqslant u_n \leqslant 5$:

$$\begin{aligned} 2 \leqslant u_n \leqslant 5 \qquad & 1 \leqslant u_n - 1 \leqslant 4 \\ 1 \leqslant \sqrt{u_n - 1} \leqslant 2 \qquad & 2 \leqslant 2\sqrt{u_n - 1} \leqslant 4 \end{aligned}$$

On en déduit que $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant 5$, c'est-à-dire que la propriété est vraie au rang $n+1$.

• Conclusion : La propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire ; donc par récurrence elle est vraie pour tout $n \geqslant 0$ c'est-à-dire que $2 \leqslant u_n \leqslant 5$ pour tout $n \geqslant 0$.

47 1) $\lim\limits_{n\to+\infty} 11^n = +\infty$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} -2(1{,}1)^n = -\infty$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n + 8 = 8$

4) $\lim\limits_{n\to+\infty} 3\times 0{,}99^{n+1} = 0$

5) $\lim\limits_{n\to+\infty} 6n^8 + 3n = +\infty$

6) $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n^6 + 3n^4 - 5 = +\infty$

7) $\lim\limits_{n\to+\infty} (6n^8 + 3n)(2n^6 + 3n^4 - 5) = +\infty$

8) $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^3\sqrt{n} = -\infty$

9) $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n + 8 = +\infty$

10) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{0{,}5^n}{n} = 0$

11) $\lim\limits_{n\to+\infty} -2^n - 5n^2 = -\infty$

12) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{5}^{2n-1} = +\infty$

13) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{8-\pi^n}{4+\dfrac{3}{n}} = -\infty$

49 1) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 - 2n = \lim\limits_{n\to+\infty} n^2\left(1-\dfrac{2}{n}\right) = +\infty$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} -3n^3 + 5n^2 + 6n - 1 = -\infty$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 - 3n^4 + 2n^2 - 5n + 2 = -\infty$

4) $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^2 - 7n + 2)(n^3 - 8n + 1) = +\infty$

5) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{6n^2+3n+5}{-2n^2+5n-1} =$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\left(6+\dfrac{3n}{n^2}+\dfrac{5}{n^2}\right)}{n^2\left(-2+\dfrac{5n}{n^2}-\dfrac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{6+\dfrac{3}{n}+\dfrac{5}{n^2}}{-2+\dfrac{5}{n}-\dfrac{1}{n^2}}$$

donc

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{6n^2+3n+5}{-2n^2+5n-1} = -3.$

6) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{9n^7-5n^4+n}{n^2+1} = +\infty$

7) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{6n^2+4n-2}{8n^3+7n^2-4n+7} = 0$

62 1) Par encadrements successifs, on a

$-\dfrac{1}{n^2} \leqslant \dfrac{\cos(n)}{n^2} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.

De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{n^2} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$ donc

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cos(n)}{n^2} = 0$ par le théorème des gendarmes.

2) Par inégalités successives, on a

$n^3 - 3 \leqslant n^3 + 3\sin(n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 - 3 = +\infty$ donc

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 + 3\sin(n) = +\infty$ par comparaison.

3) Par inégalités successives, on a

$-5n^4 + 2n^4\sin\left(\sqrt{n}\right) \leqslant -5n^4 + 2n^4 = -3n^4$ et

$\lim\limits_{n\to+\infty} -3n^4 = -\infty$ donc

$\lim\limits_{n\to+\infty} -5n^4 + 2n^4\sin\left(\sqrt{n}\right) = -\infty$ par comparaison.

4) De même, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^4 - n^3\cos\left(n^5\right) = +\infty$ par comparaison.

5) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$ par le théorème des gendarmes (idem question 1).

6) Par inégalités successives, on a

$n^2 - 2n \leqslant n^2 + \left(\sin\left(n^3\right) + \cos\left(n^2\right)\right) n$ et

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 - 2n = +\infty$ donc

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 + \left(\sin\left(n^3\right) + \cos\left(n^2\right)\right) n = +\infty$ par comparaison.

7) Par encadrements successifs, on a

$2\times 0{,}7^n \leqslant (3+(-1)^n)\,0{,}7^n \leqslant 4\times 0{,}7^n$.

De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\times 0{,}7^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 4\times 0{,}7^n = 0$ car $-1 < 0{,}7 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (3+(-1)^n)\,0{,}7^n = 0$ par le théorème des gendarmes.

71 **1)** On veut montrer que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout $n \geqslant 0$.

• On considère la propriété : « $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ ».

• Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 5$ et $u_1 = 3{,}6$.
On a $0 \leqslant u_1 \leqslant u_0$: la propriété est vraie pour $n = 0$.

• Hérédité : si la propriété est vraie à un certain rang $n \geqslant 0$ alors elle est vraie au rang $n+1$.
Supposons donc que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$, on a alors :

$$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$$
$$1 \leqslant u_{n+1} + 1 \leqslant u_n + 1$$
$$1^2 \leqslant (u_{n+1}+1)^2 \leqslant (u_n+1)^2$$
$$\frac{1}{10} \leqslant \frac{1}{10}(u_{n+1}+1)^2 \leqslant \frac{1}{10}(u_n+1)^2$$

car la fonction carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$.
On en déduit que $0 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$, c'est-à-dire que la propriété est vraie au rang $n+1$.

• La propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire ; donc par récurrence elle est vraie pour tout $n \geqslant 0$ c'est-à-dire que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout $n \geqslant 0$.

2) • Comme $u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite est décroissante.

• De plus, $0 \leqslant u_n$, c'est-à-dire que la suite est minorée par 0.
La suite (u_n) est décroissante et minorée : elle est convergente.

3) $\ell = \frac{1}{10}(\ell+1)^2 \Leftrightarrow 10\ell = \ell^2 + 2\ell + 1$
$\Leftrightarrow \ell^2 - 8\ell + 1 = 0$.
Cette équation résolue, on trouve deux solutions :
$\ell_1 = 4 - \sqrt{15} \approx 0{,}13$ et $\ell_1 = 4 + \sqrt{15} \approx 7{,}87$.
Comme on admet d'après l'énoncé que $\ell \leqslant 5$, on en déduit que la limite de la suite est $4 - \sqrt{15}$.

Auto-évaluation QCM

106 a b c	**107** b c	**108** b
109 a b c d	**110** a c	**111** a d
112 b	**113** b	**114** b
115 b	**116** b	**117** a
118 a	**119** a	**120** a b c
121 b f		

Chapitre A2
Limites et continuité

Auto-évaluation

1 **1)** 0 **2)** $-\infty$ **3)** $+\infty$ **4)** $+\infty$ **5)** 0 **6)** sans

2 **1)** $\lim u_n = +\infty$

2) $\dfrac{n+2}{n+1} = \dfrac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}$ donc $\lim u_n = 1$.

3) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} =$
$$\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$
donc $\lim u_n = 0$.

3 **1)** $q > 1$ et $v_0 = 3$ donc $\lim v_n = +\infty$.
2) $-1 < q < 1$ donc $\lim v_n = 0$.
3) $q = 1$ et $v_0 = -1$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -1$.
4) $q < 0$ donc (v_n) n'a pas de limite.

4 **1)** • Si $0 < a < 1$, alors $\lim a^n = +\infty$ et $\lim \dfrac{1-a^n}{1+a^n} = 1$.
• Si $a > 1$, alors $\lim a^n = +\infty$ et $\lim a^{-n} = 0$.
Ainsi, $\lim \dfrac{1-a^n}{1+a^n} = \lim \dfrac{a^{-n}-1}{a^{-n}+1} = -1$.
2) Si $a < 1$, $\lim a^n = 0$; si $a = 1$, $\lim a^n = 1$ et si $a > 1$, $\lim a^n = +\infty$ (résultats similaires pour b).
Si on pose $u_n = a_n - b_n$, on a, par différence :
• Si $a = 1$ et $b = 1$, $\lim u_n = 0$
• Si $a < 1$ et $b < 1$, $\lim u_n = 0$
• Si $a = 1$ et $b < 1$, $\lim u_n = 1$
• Si $a < 1$ et $b = 1$, $\lim u_n = -1$
• Si $a > 1$ et $b \leqslant 1$, $\lim u_n = +\infty$
• Si $a \leqslant 1$ et $b > 1$, $\lim u_n = -\infty$
Le cas $a > 1$ et $b > 1$ est indéterminé. Mais, $a^n - b^n = b^n\left(1 - \left(\frac{a}{b}\right)^n\right)$. Ainsi :
• Si $1 < a < b$, $\lim \left(\frac{a}{b}\right)^n = 0$ et $\lim u_n = +\infty$
• Si $1 < b < a$, $\lim \left(\frac{a}{b}\right)^n = +\infty$ et $\lim u_n = +\infty$

5 **1)** Pour n pair, $\cos n\pi = 1$ et pour n impair, $\cos n\pi = -1$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$n - 1 \leqslant u_n \leqslant n + 1$.
2) $\lim(n-1) = +\infty$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n - 1 \leqslant u_n$. Donc, par comparaison, $\lim u_n = +\infty$.

6 **1)** Les n termes de S_n sont dans l'ordre décroissant donc chacun d'eux est supérieur au dernier et inférieur au premier. Ainsi :
$n \times \dfrac{n}{n^2+n} \leqslant S_n \leqslant n \times \dfrac{n}{n^2+1}$ d'où
$\dfrac{n}{n+1} \leqslant S_n \leqslant \dfrac{n^2}{n+1}$
2) $\lim \dfrac{n}{n+1} = \lim \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$
$\lim \dfrac{n^2}{n^2+1} = \lim \dfrac{1}{1+\frac{1}{n^2}} = 1$
D'après le théorème des gendarmes, $\lim S_n = 1$.

7 **1) a)** $\dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \dfrac{\sqrt{h+1}-1}{h} =$
$\dfrac{h+1-1}{h(\sqrt{h+1}+1)} = \dfrac{1}{\sqrt{h+1}+1}$.
b) $\lim\limits_{h\to 0}(\sqrt{h+1}+1) = 2$.
c) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \dfrac{1}{2}$ donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = \dfrac{1}{2}$.
2) $\dfrac{f(h-1)-f(-1)}{h} = \dfrac{\sqrt{h-1+1}-\sqrt{0}}{h} =$
$\dfrac{\sqrt{h}}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{h}}$.
Or, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$ donc f n'est pas dérivable en -1.

8 **1)** f est une fraction rationnelle définie sur $\mathbb{R}$ donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
$f'(x) = \dfrac{1\times(x^2+1) - x\times 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$.
$f'(x)$ est du signe de $1-x^2$ qui est un polynôme de degré 2, positif entre ses racines qui sont -1 et 1.
On en déduit les variations du tableau. De plus, $f(-1) = -\dfrac{1}{2}$ et $f(1) = \dfrac{1}{2}$.
2) Il semble que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.
3) $f(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Donc, l'équation $f(x) = 0$ n'a que 0 comme solution dans $\mathbb{R}$.

S'entraîner

1 **1)** 5
2) 2
3) $+\infty$
4) $+\infty$
5) $+\infty$
6) $-\infty$
7) 1
8) $+\infty$

2 **1)** $+\infty \mid +\infty$
2) $+\infty \mid -\infty$
3) $+\infty \mid +\infty$
4) $+\infty \mid -\infty$
5) $0 \mid 0$
6) $+\infty \mid -\infty$
7) $-\infty \mid -\infty$
8) $+\infty \mid +\infty$
9) $1 \mid 1$
10) $-1 \mid -1$
11) $0 \mid 0$
12) $+\infty \mid -\infty$

3 **1)** $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = +\infty$
2) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = 1$
3) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = +\infty$
4) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \lfloor x \rfloor = 0 > 0$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{1}{\lfloor x \rfloor} = +\infty$ et
$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \lfloor x \rfloor = 1$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{1}{\lfloor x \rfloor} = 1$.

4 **1)** Pour $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$, on a
$\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-g(x)) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x^2-x) =$
$\lim\limits_{x\to+\infty} x(x-1) = +\infty$.
2) Pour $f(x) = 2x$ et $g(x) = x$, on a
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{x} = 2$.
3) Pour $f(x) = x$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$, on a
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} = 1$.

5 **1)** Vrai. Pour $x > 0$, $f(x) \geqslant x^2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
2) Fausse. Contre-exemple : pour $x > 0$, on a $f(x) = -x \leqslant \dfrac{1}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
3) Vrai. Pour $x > 0$, on a $1 \leqslant f(x) \leqslant x+1 \Rightarrow$
$\dfrac{1}{x^2} \leqslant \dfrac{f(x)}{x^2} \leqslant \dfrac{x+1}{x^2} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x^2} = 0$ par le théorème des gendarmes.

6 **1)** Pas d'asymptote.
2) Pas d'asymptote.
3) Pas d'asymptote.
4) L'axe des abscisses est asymptote horizontale au graphe en $-\infty$.
5) L'axe des ordonnées est asymptote verticale au graphe.
6) La droite d'équation $y = -10^{99}$ est asymptote horizontale au graphe en $-\infty$.

7 **1)** Pour tracer $\mathscr{C}$, on doit lever le crayon pour faire le point de coordonnées $(1\ ;\ \alpha)$ donc f n'est pas continue en 1.
2) $f(1) = \alpha$; $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \sqrt{2} - 1$.
3) f est continue si $\alpha = \sqrt{2} - 1$.

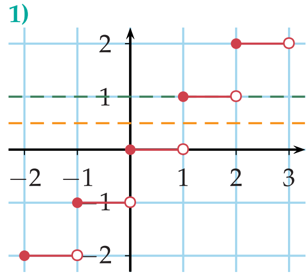
8 **1)** $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$.

2)

x	$-\infty$		$+\infty$
f	$-\infty$	↗	$+\infty$

3) a) f est continue et strictement croissante sur $[1{,}5\ ;\ 1{,}6]$. De plus, $f(1{,}5) = 1{,}5^3 = 3{,}375 < 4$ et $f(1{,}6) = 1{,}6^3 = 4{,}096 > 4$. Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel dans $[1{,}5\ ;\ 1{,}6]$ tel que $f(x) = 4$.
b) f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$. Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel tel que $f(x) = -3$.

9 **1)**



2) a) $\lfloor x \rfloor$ est toujours un entier donc l'équation $\lfloor x \rfloor = \dfrac{1}{2}$ n'a pas de solution.
b) $\lfloor x \rfloor = 1 \Leftrightarrow 1 \leqslant x < 2$ donc l'ensemble des solutions de l'équation $\lfloor x \rfloor = 1$ est $[1\ ;\ 2[$.

10 **1)** On peut tracer entièrement $\mathscr{C}$ sur $I = [-5\ ;\ 7]$ sans lever le crayon donc f est continue sur I.

2)

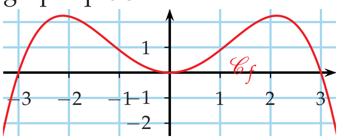
x	-5		-3		1		5		7
f	3	↘	-2	↗	2	↘	-2	↗	3

3) a) f est continue et strictement croissante sur $[1\ ;\ 5]$. De plus, $f(1) = 2 > 0$ et $f(5) = -2 < 0$. Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ a une seule solution dans $[1\ ;\ 5]$.
b) Sur $[-1\ ;\ 1]$, f a pour minimum 1 en -1. L'équation $f(x) = 0$ n'a donc pas de solution dans $[-1\ ;\ 1]$.
c) On peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires (cas strictement monotone) aux intervalles $[-5\ ;\ -3]$, $[-3\ ;\ 1]$, $[1\ ;\ 5]$ et $[5\ ;\ 7]$. L'équation $f(x) = 0$ a quatre solutions dans I.

11 **1)** Il semblerait que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$.

2) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1-\dfrac{x^2}{9}\right) = -\infty$.
Donc, par produit, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$.

3) La fenêtre graphique était mal dimensionnée. En faisant un zoom arrière, on aurait pu conjecturer correctement comme le montre le graphique suivant.



16 **1)** $f(x) = x^3+3x^2-6 = x^3\left(1+\dfrac{3}{x}-\dfrac{6}{x^2}\right)$. Or,
$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}-\dfrac{6}{x^2}\right) = 1$. Donc, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+2) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2) = +\infty$;
$\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}}(x+2) = 0 < 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}}(x+2) = 0 > 0$.
Donc, par inverse, on a : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$;
$\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x) = +\infty$.

3) Pour $\dfrac{1}{x-1}$, on procède comme précédemment.
On a : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x-1} = 0$; $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\dfrac{1}{x-1} = -\infty$ et
$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\dfrac{1}{x-1} = +\infty$.
Ensuite, par opposé et somme avec 1, on a :
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$; $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = +\infty$ et
$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = -\infty$.

4) En développant le dénominateur et en divisant numérateur et dénominateur par x^2, on a :
$f(x) = \dfrac{\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}}{1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}}$. Or, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}\right) = 0$ et
$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{4}{x^2}\right) = 1$. Donc, par quotient, on a : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} = 0$.
Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to2}(1-2x) = -3$ et
$\lim\limits_{x\to2}(x-2)^2 = 0 > 0$. Donc, par quotient, on a
$\lim\limits_{x\to2} = -\infty$.

40 **1)** a $]-1\,;\,3[$ b $[-1\,;\,1[$ et $]1\,;\,3[$ c $[-1\,;\,0[$ et $[1\,;\,3]$ d $[-1\,;\,1]$ et $]1\,;\,3[$

2) a $f(1) = 0$; $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = 0$. b
$f(1) = 0$; $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = 1$. c $f(1) = 0$;
$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)$ n'existe pas et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = 0$. d
$f(1) = 1$; $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = 2$.

45 **1)** f est une fonction polynôme de degré 3 donc f est continue sur $[-4\,;\,1]$.

2) f est continue et strictement croissante sur $[-4\,;\,-3]$. De plus, $f(-4) = -1 < 2$ et $f(-3) = 3 > 2$. Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution dans $[-4\,;\,-3]$.
Le théorème s'applique aussi sur les intervalles $[-3\,;\,-1]$ et $[-1\,;\,1]$. On en déduit que l'équation $f(x) = 2$ admet trois solutions dans I.

3) a) f est continue et strictement croissante sur $[-1\,;\,1]$. De plus, $f(-1) = -1 < 4$ et $f(1) = 19 > 4$. Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 4$ admet une unique solution dans $[-1\,;\,1]$. Le maximum de f sur $[-4\,;\,-1]$ est $3 < 4$ donc il n'y a pas d'autre solution sur I.

b) On sait déjà que $-1 \leqslant \alpha \leqslant 1$.
On calcule $f(0) = 3 < 4$ donc $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Auto-évaluation QCM

90 c	**91** d	**92** b
93 a c	**94** a b c	**95** a b
96 b c	**97** a	**98** a b d
99 b c	**100** c	**101** d
102 a b c	**103** d	**104** b c d

Chapitre A3
Dérivation. Fonctions cosinus et sinus

Auto-évaluation

1 **1)** $\mathbb{R}$; $f'(x) = 12x^3 - 14x$.

2) $\mathbb{R}$; $f'(x) = 5x^4 + 6x^2 + 6x$.

3) $\mathbb{R} \setminus \{\frac{7}{5}\}$; $f'(x) = \dfrac{1}{(5x-7)^2}$.

4) $\mathbb{R}$; $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ d'où
$f'(x) = 3x^2 + 6x + 3$
$= 3\left(x^2 + 2x + 1\right) = 3\,(x+1)^2$.

5) $]0\,;\,+\infty[$; $f'(x) = \sqrt{x}$.

6) $]0\,;\,1[\cup]1\,;\,+\infty[$;
$f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x}-1)^2}$.

2 **1) a)** $f'(x) = -3x^2 + 4x - \dfrac{1}{x^2}$
$= -\dfrac{3x^4 - 4x^3 + 1}{x^2}$.
Mais, le développement de $(x-1)^2(3x^2+2x+1)$ donne $3x^4 - 4x^3 + 1$.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) \geqslant 0$ et f' ne s'annule qu'en 1 donc f est strictement croissante sur $]-\infty\,;\,0[$ et sur $]0\,;\,+\infty[$.

2) f' s'annule mais ne change pas de signe en 1 donc f n'a pas d'extremum local en 1.

3) $y = -8x - 6$ et $y = 2$.

3 • Un maximum local : $\frac{1}{8}$.

x	$-\infty$		$\frac{5}{4}$		$+\infty$
f	$-\infty$	↗	$\frac{1}{8}$	↘	$-\infty$

• Pas d'extremum local.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
g	2	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	2

• Pas d'extremum local.

x	$\frac{3}{2}$		$+\infty$
h	0	↗	$+\infty$

• $m = -2$ minimum local ;
$M = -\dfrac{50}{27}$ maximum local.

x	0		$\frac{1}{9}$		1		$+\infty$
A	-2	↗	M	↘	m	↗	$+\infty$

4 **1)** Avec les mesures principales : $P(-\frac{5\pi}{6})$
$Q(-\frac{3\pi}{4})$ $R(-\frac{2\pi}{3})$ $J'(-\frac{\pi}{2})$ $S(-\frac{\pi}{3})$ $T(-\frac{\pi}{4})$
$U(-\frac{\pi}{6})$ $I(0)$ $A(\frac{\pi}{6})$ $B(\frac{\pi}{4})$ $C(\frac{\pi}{3})$ $J(\frac{\pi}{2})$ $D(\frac{2\pi}{3})$
$E(\frac{3\pi}{4})$ $F(\frac{5\pi}{6})$ $I'(\pi)$.

2) a) $\sin\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos\dfrac{5\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\sin\dfrac{11\pi}{2} = -1$

d) $\cos\dfrac{7\pi}{6} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

3) a) $\{\frac{\pi}{3}\,;\,\frac{5\pi}{3}\}$

b) $\{\frac{\pi}{3}\,;\,\frac{2\pi}{3}\}$

c) $\{\frac{3\pi}{4}\,;\,\frac{5\pi}{4}\}$

5 **1)** En posant $X = \sin x$, l'équation devient $2X^2 + 5X + 2 = 0$ dont les racines sont $-\frac{1}{2}$ et -2.
Ainsi, on résout l'équation
$(2\sin x + 1)(\sin x + 2) = 0$.
Ceci équivaut à $\sin x = -\frac{1}{2}$.
D'où les solutions $-\frac{5\pi}{6}$ et $-\frac{\pi}{6}$.
2) L'équation équivaut à :
$\cos x(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}) - 3(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}) = 0$ soit
$(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2})(\cos x - 3) = 0$.
Il faut donc que $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
D'où les solutions : $-\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$.

S'entraîner

1 **1)** $\mathscr{D}' = \mathbb{R}_+^* \,;\, f'(x) = 3x^2 + \dfrac{3}{2\sqrt{x}}$

2) $\mathscr{D}' = \mathbb{R} \,;\, f'(x) = \left(48x^2 + 8\right)\left(4x^3 + 2x - 1\right)^3$

3) $\mathscr{D}' =]-1\,;\,1[\,;\, f'(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

4) $\mathscr{D}' = \mathbb{R}^* \,;\, f'(x) = \dfrac{3}{x^2}\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^2$

5) $\mathscr{D}' = \mathbb{R} \,;\, f'(x) = -5\sin(5x - 2)$

6) $\mathscr{D}' = \mathbb{R} \,;\, f'(x) = 10\cos 5x \sin 5x$

2 **1)** $f(x_0) = 6\,;\, f'(x_0) = -3\,;$
$y = -3x + 9$.
2) $f(x_0) = -1\,;\, f'(x_0) = 22\,;$
$y = 22x - 1$.
3) $f(x_0) = 0\,;\, f'(x_0) = 9\,;$
$y = 9x + 9$.
4) $f(x_0) = 1\,;\, f'(x_0) = -1\,;$
$y = -x + 3$.
5) $f(x_0) = 0\,;\, f'(x_0) = -2\,;$
$y = -2x + \frac{\pi}{2}$.

3 **1)** $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$
2)

x	$\cos x$	$\sin x$	$\tan x$
$\frac{3\pi}{2}$	0	-1	⋇
π	-1	0	0
$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$-\frac{7\pi}{2}$	0	1	⋇

4 Supposons que $\mathscr{C}_1$ représente $h = H'$. Vu qu'elle est au-dessus de l'axe des abscisses sur $[0\,;\,3]$, cela signifierait que H est croissante. Or, d'après $\mathscr{C}_2$, ce n'est clairement pas le cas. Donc $\mathscr{C}_1$ représente H et $\mathscr{C}_2$ représente h.

5 **1)** u est une fonction affine strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
2) $\left(u^3\right)' = 3u'u^2$ donc u^3 varie comme u.
3) $\sqrt{u}$ est dérivable sur $]-\infty\,;\,\pi[$ et $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ donc $\sqrt{u}$ varie comme u mais seulement sur $]-\infty\,;\,\pi]$.
4) $\cos u = -\cos x$ donc $\cos u$ est strictement croissante sur $[0\,;\,\pi]$ et on généralise en tenant compte que $\cos u$ est paire et 2π-périodique.

6 **1)** $f(x+0,2)$
$= \sin(10\pi(x+0,2))$
$= \sin(10\pi x + 2\pi) = f(x)$
2) $f(x+\dfrac{\pi}{2})$
$= \cos(4(x+\dfrac{\pi}{2})+\dfrac{\pi}{3})$
$= \cos(4x+2\pi+\dfrac{\pi}{3}) = f(x)$
3) $f(x+\dfrac{3\pi}{5})$
$= \sin\left(\dfrac{10(x+\frac{3\pi}{5})-1}{3}\right)$
$= \sin(\dfrac{10x+6\pi-1}{3})$
$= \sin(\dfrac{10x-1}{3}+2\pi) = f(x)$
4) $f(x+\dfrac{2}{3})$
$= \dfrac{2}{5}\cos(3\pi(x+\dfrac{2}{3}))$
$= \dfrac{2}{5}\cos(3\pi x+2\pi) = f(x)$

7 $f(0)=2$ et $g(0)=1$ donc $\mathscr{C}$ représente g et $\mathscr{C}'$ représente f.

8 **1)** $\{-\dfrac{\pi}{6}\,;\,\dfrac{\pi}{6}\}$
2) $\{\dfrac{\pi}{3}\,;\,\dfrac{2\pi}{3}\}$
3) $\{\dfrac{5\pi}{4}\,;\,\dfrac{7\pi}{4}\}$

9 $\mathscr{C} : y = \frac{1}{2}\sin x$.
$\mathscr{C}' : y = 2\sin\frac{1}{4}x$.

10 **1)** Fausse. $f'(x) = -2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$
2) Vraie. $f(x)=0$
$\Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$
$\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$
$\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$
3) Vraie. $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$
$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < x-\frac{\pi}{4} < 0$
$\Leftrightarrow -1 < \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) < 0$.
Ainsi : $0 < f'(x) < 2$. De plus, f ne s'annule qu'en $-\frac{\pi}{4}$.
Donc, f est strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{4}\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$.
4) Fausse. $f(0)=\sqrt{2}$. Or,
$0 \notin \left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi \text{ avec } k\in\mathbb{Z}\right\}$.

11 **1)** $\mathscr{D}' =]\dfrac{7}{3}\,;\,+\infty[$;
$f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{3x-7}}$.
2) $\mathscr{D}' = \mathbb{R}$;
$g'(x) = 30x^2(5x^3-3)$.
3) $\mathscr{D}' = \mathbb{R}\setminus\{-6\}$;
$h'(x) = -\dfrac{3}{(x+6)^4}$.
4) $\mathscr{D}' =]0\,;\,+\infty[$;
$a'(x) = \dfrac{2\left(2\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}}$.
5) $\mathscr{D}' =]-\infty\,;\,-1[\cup]1\,;\,+\infty[$;
$b'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.
6) $\mathscr{D}' =]-\infty\,;\,10[$;
$c'(x) = \dfrac{1}{2\left(\sqrt{10-x}\right)^3}$

13 **1)** $f'(x) = 2x-\sin x$
2) $f'(x) = 2\cos 2x$
3) $f'(x) = -\sin^2 x+\cos^2 x$
$= \cos 2x$
4) $f'(x) = 2\cos x\sin x$
$= \sin 2x$
5) $f'(x) = 2x\cos x - x^2\sin x$
$= x(2\cos x - x\sin x)$
6) $f'(x) = -2\sin x\cos x$
$= -2\sin 2x$
7) $f'(x) = \cos x - \sin x$
8) $f'(x) = \frac{12\sin x}{(2\cos x-3)^2}$

57 **1)** $f(-x) = 2(-x)+\sin(-2x)$
$= -2x-\sin 2x = -f(x)$.
Donc, f est impaire et sa représentation graphique dans un repère est symétrique par rapport à l'origine du repère.
2) a) $f'(x) = 2+2\cos 2x = 2(1+\cos 2x)$.
b) Pour tout $x\in[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}[$, $\cos 2x > -1$ donc $f'(x) > 0$ et $f(\dfrac{\pi}{2}) = 0$. Ainsi, f est strictement croissante sur $[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}]$.
3)

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
f	$-\pi$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	π

Auto-évaluation QCM

102 b d	**103** a	**104** b
105 b	**106** c	**107** c
108 c	**109** c	**110** d
111 b	**112** b c d	**113** a b d
114 a	**115** d	**116** b c
117 a	**118** b	

Chapitre A4
Fonction exponentielle

Auto-évaluation

1 1) a^0 2) a^n 3) a^1 4) a^{-1} 5) a^{n+p} 6) a^{-n} 7) a^{np} 8) a^{n-p}

2 1) a) $2^{14} \times 3^2$
b) $2^{32} \times 3^{27}$
2) a) $14^3 \times 15^2$
b) $\left(\frac{3}{2}\right)^2 \left(\frac{5}{7}\right)^3$

3 1) $5\,000 \times (1{,}025)^{10} \approx 6\,400$ €.
$5\,000 \times (1{,}025)^n$.
2) $5\,000 \times (1{,}025)^{28} \approx 9\,982$ € ;
$5\,000 \times (1{,}025)^{29} \approx 10\,232$.
Il double au bout de 29 ans.

4 $f : x \mapsto -4$ est constante.

5 $\frac{x^n}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} \times x^{n-1}$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^n}{\sqrt{x}} = +\infty$.

6 $\frac{(a+h)^3 - a^3}{h} = 3a^2 + 3ah + h^2$.
$\lim\limits_{h \to 0} \frac{(a+h)^3 - a^3}{h} = 3a^2$.
$y = 3a^2 x - 2a^3$.

7 1) $h \neq 0$, $f(h) = \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}$.
- Si $a > 0$, $\lim\limits_{h \to 0} f(h) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$.
- Si $a = 0$, $\lim\limits_{h \to 0} f(h) = +\infty$.

2) La fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

8 $f'(x) = 10x(x+1)(2x-3)^2$.
$f'(0) = f'(-1) = f'\left(\frac{3}{2}\right) = 0$ donc $\mathscr{C}_f$ a trois tangentes horizontales aux points d'abscisses -1, 0 et $\frac{2}{3}$.

9 1) $f'(x) = \frac{1}{4x^2} > 0$.
$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{4x+3}} > 0$.
f et g strictement croissantes.
2) On vérifie que $f\left(-\frac{1}{2}\right) = g\left(-\frac{1}{2}\right)$ et $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = g'\left(-\frac{1}{2}\right)$, et que $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont de part et d'autre de la tangente.

10 1) Soit $f(x)$ le 1er membre.
$f'(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{1}{2} > 0$.
f strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$;
$f(-3) = -2$ et $f(0) = 1$. Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel unique α tel que $f(\alpha) = 0$.
2) $\alpha \approx -1{,}596$.

S'entraîner

1 1) Fausse 2) Fausse 3) Vraie 4) Fausse 5) Vraie 6) Fausse 7) Vraie 8) Fausse

2 1) Vraie 2) Fausse 3) Vraie 4) Fausse

3 1) Fausse 2) Vraie 3) Vraie 4) Fausse

4 1) Vraie 2) Vraie 3) Fausse 4) Fausse

5 La seule fonction vérifiant ces deux conditions est la fonction exponentielle. Les deux courbes ne représentent pas la fonction exponentielle puisque $\mathscr{C}'$ est décroissante sur un intervalle et $\mathscr{C}$ ne passe pas par le point de coordonnées $(2\,;\,e^2)$.

6 c

7 b

13 1) $\{1\}$ 2) $\{0\}$ 3) $\{1\}$ 4) $\{-1;0\}$ 5) $\{0\}$ 6) $\{1\}$ 7) $\varnothing$ 8) $\{2/5\}$ 9) $\{0\}$ 10) $\{2\}$

19 1) Posons $X = -x$ et
$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^{X} = +\infty$.

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{x}}{x} = 0$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x}}{x} = +\infty$ donc par inverse de limites, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^{x}} = 0$

4) Posons $X = -x+1$ et
$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x+1} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^{X} = 0$

5) Posons $X = 2x+1$ et
$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x+1} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^{X} = 0$

6) Posons $X = -x^2+1$ et
$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x^2+1} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^{X} = 0$

7) Posons $X = \dfrac{1}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{X\to0} e^{X} = 1$

8) Posons $X = \dfrac{1}{x}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^{X} = 0$

9) Posons $X = \dfrac{1}{x}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} e^{-\frac{1}{x}} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^{X} = +\infty$

Auto-évaluation QCM

93 d — **94** b — **95** a d

96 a b — **97** a c d — **98** b

99 d — **100** c d — **101** c

102 a b — **103** a c — **104** a b c

105 d — **106** a b — **107** d

108 a c d — **109** a b

Chapitre A5
Logarithme népérien

Auto-évaluation

1 1) e^7
2) $\dfrac{1}{e}$
3) $\dfrac{1}{e^3}$
4) e^2

2 1) $S = \{4\}$
2) $S = \{3\}$
3) $S = \{0\}$

3 1) $f'(x) = 3e^{3x-7}$
2) $f'(x) = -xe^{-x}$
3) $f'(x) = \dfrac{-2e^{x}}{(e^{x}-1)^2}$

4 1) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-2x} = +\infty$
2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x}}{x+1} = +\infty$
3) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{2x}+1}{e^{x}} = +\infty$

5 Posons $f(x) = e^{3x}$. f est dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3e^{3x}$ donc $f'(x) > 0$. De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
$6 \in]-\infty\,;+\infty[$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 6$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$. Par des tabulations successives avec la calculatrice, on obtient :
$0,59 < \alpha < 0,60$.

6 $y = x+1$ et $y = ex$

7 1) $S =]-\infty\,;0[$
2) $S =]-\infty\,;-1[$
3) $S = \left[\dfrac{1}{3}\,;+\infty\right[$
4) $S =]-\infty\,;2]$

8 1)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
e^{-x}		$+$		$+$	
$1-e^{x}$		$+$	0	$-$	
$A(x)$		$+$	0	$-$	

2)

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$e^{x}-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$B(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

3) $e^{x} - e^{-x} > 0 \iff e^{x} > e^{-x} \iff x > -x \iff x > 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$C(x)$		$-$	0	$+$	

S'entraîner

1 1) $x \in]0\,;+\infty[$
2) $x \in]-\infty\,;3[$
3) $x \in]-2\,;+\infty[$
4) $x \in \mathbb{R}^*$

2 1) 3
2) $\frac{1}{5}$
3) $\frac{1}{3}$
4) 5
5) 1
6) -2

3 1) $A = \ln 56$
2) $B = \ln 5$
3) $C = \ln 7$
4) $D = \ln 8$
5) $E = \ln\left(\frac{1}{16}\right)$

4 1) $A = \ln 10$ et $B = \ln 9$ donc $A > B$
2) $A = \ln 4$ et $B = \ln 3$ donc $A > B$
3) $A = \ln 8$ et $B = \ln 9$ donc $A < B$
4) $A = B$

5 1) $S = \{\ln 2\}$
2) $S = \varnothing$
3) $S = \{-\ln 4\}$

6 1) $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$
2) $S = \left\{\sqrt{5}\right\}$
3) $S = \left\{\frac{1}{9}\right\}$

7 1) $S = \left\{\frac{1}{e}\,;e^2\right\}$
2) $S = \{\ln 3\}$
3) $S = \left\{1\,;e^2\right\}$

8 1) $S = [e\,;+\infty[$
2) $S = \left]e^{-2}\,;+\infty\right[$
3) $S = \left]0\,;\sqrt{e}\right]$
4) $S = \left]0\,;e^3\right[$

20 1) $S = \left\{e^2\right\}$
2) $S = \left\{\frac{1}{e}\right\}$
3) $S = \left\{e^3\right\}$

27 1) $S = \left]-\infty\,;\frac{1}{3}\right]$
2) $S =]1-e\,;1[$
3) $S =]0\,;1[$

33 1) $n = 13$
2) $n = 48$
3) $n = 15$
4) $n = 27$

35 1) Pour tout $x > 0$,
$\left((\ln x)^2 - \ln x\right) = \ln x(\ln x - 1)$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x - 1) = +\infty$ donc
par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x(\ln x - 1) = +\infty$

2) Pour tout $x > 0$, $\ln x - 2x = x\left(\frac{\ln x}{x} - 2\right)$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x - 2x) = -\infty$

3) Pour tout $x > 0$, $(\ln x - x^2) = x\left(\frac{\ln x}{x} - x\right)$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (\frac{\ln x}{x} - x) = -\infty$,
donc par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\ln x - x^2\right) = -\infty$

52 1) $f'(x) = \frac{5}{5x-1}$
2) $f'(x) = \frac{-2x}{9-x^2}$
3) $f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$

54 1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to3} f(x) = -\infty$
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
3) $\lim\limits_{x\to0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Auto-évaluation QCM

104 b c
105 a b d
106 a d
107 b d
108 a
109 b
110 b
111 a c
112 d
113 a d
114 c
115 b
116 b
117 b c
118 b

119 ⓒ **120** ⓒ **121** ⓑ

Chapitre A6
Intégration

Auto-évaluation

1 **1)** 11 petits carreaux

2) a) 5,5 u.a.

b) $\mathcal{A} = \dfrac{0,5\times 2}{2} + 0,5\times 3 + \dfrac{3+4}{2}\times 1 = 5,5$ u.a.

3) 2,75 cm²

2 **1)** $f'(x) = 2(5x^4 - x)\left(x^5 - \dfrac{1}{2}x^2\right)$, $I = \mathbb{R}$

2) $g'(x) = \mathrm{e}^x(x+1)$, $I = \mathbb{R}$

3) $h'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$, $I = \mathbb{R}$

4) $i'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$, $I =]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$

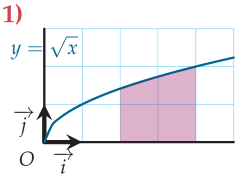
5) $j'(x) = -\dfrac{2}{(x-2)^2}$, $I = \mathbb{R}\setminus\{2\}$

6) $\dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$, $I =]0\,;+\infty[$

7) $l'(x) = -6\sin(6x-1)$, $I = \mathbb{R}$

8) $m'(x) = -2\cos(1-2x)$, $I = \mathbb{R}$

3 **1)**



2) a) Il s'agit du domaine délimité par la courbe de la fonction logarithme népérien, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 4$.

b) Il s'agit du domaine délimité par les courbes des fonctions exponentielles et $x \mapsto \dfrac{x}{2}$ et les droites d'équation $x = -2$ et $x = 1$.

S'entraîner

1 6 cm²

2 8 u.a.

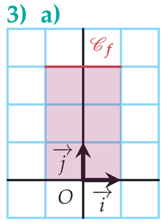
3 **1)** $f(x) = 1,5$. $\mathscr{A} = \displaystyle\int_{-2}^{1} 1,5\,\mathrm{d}x = 4,5$ u.a.

2) $f(x) = x+1$. $\mathscr{A} = \displaystyle\int_{-1}^{2} (x+1)\,\mathrm{d}x = 4,5$ u.a.

3) $f(x) = \dfrac{x+1}{2}$. $\mathscr{A} = \displaystyle\int_{-1}^{2} \dfrac{x+1}{2}\,\mathrm{d}x = 2,25$ u.a.

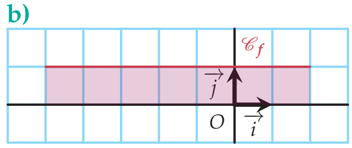
4) $f(x) = |x|$. $\mathscr{A} = \displaystyle\int_{-2}^{1,5} |x|\,\mathrm{d}x = 3,125$ u.a.

4 **3) a)**



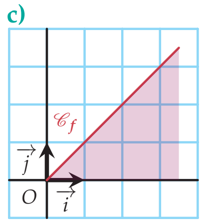
$\mathscr{D}$ est le domaine compris entre l'axe des abscisses, la droite d'équation $y = 3$ et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$. $\mathscr{A}_{\mathscr{D}} = 6$ u.a.

b)



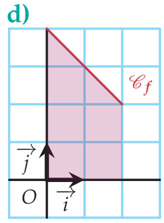
$\mathscr{D}$ est le domaine compris entre l'axe des abscisses, la droite d'équation $y = 1$ et les droites d'équations $x = -5$ et $x = 2$. $\mathscr{A}_{\mathscr{D}} = 7$ u.a.

c)



$\mathscr{D}$ est le domaine compris entre l'axe des abscisses, la droite d'équation $y = x$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 3,5$. $\mathscr{A}_{\mathscr{D}} = 6,125$ u.a.

d)



$\mathscr{D}$ est le domaine compris entre l'axe des abscisses, la droite d'équation $y = 4 - x$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$. $\mathscr{A}_{\mathscr{D}} = 6$ u.a.

5 **1)** $1,5$ u.a.
2) $2,25$ u.a.
3) $3,75$ u.a.

6 **1)** $F'(x) = f(x)$.
2) F est croissante sur $[a; b]$.

7 **1)** $t \mapsto 1 - t$ est positive sur $]-\infty; 1]$ donc $I = [0\,;\,1]$.
2) **a)** $F'(x) = 1 - x$.
b) $t \mapsto t^2 + t - 2$ est positive sur $]-\infty\,;\,-2] \cup [1\,;\,+\infty[$ donc $I = [2\,;\,+\infty[$.
$F'(x) = x^2 + x - 2$.
c) $I = [-5\,;\,-2]$. $F'(x) = x^2 + x - 2$.
d) $t \mapsto |1 - t|$ est positive sur $\mathbb{R}$ donc $I = [2\,;\,+\infty[$. $F'(x) = |1 - x|$, c'est-à-dire $F'(x) = x - 1$.
e) $t \mapsto \ln|t|$ est positive sur $]-\infty\,;\,-1] \cup [1\,;\,+\infty[$ donc $I = [-2\,;\,-1]$. $F'(x) = \ln|x| = \ln(-x)$.

8 **1)** $F(x) = \dfrac{x^4}{4} - x$
2) $F(x) = 2\ln(x)$
3) $F(x) = -\dfrac{1}{x}$
4) $F(x) = \cos(x)$
5) $F(x) = -\dfrac{1}{5x^5}$
6) $F(x) = 8\sqrt{x}$

9 **1)** $F(x) = \dfrac{1}{3}(x^2 + 1)^3$
2) $F(x) = -\dfrac{1}{x^2 + 1}$
3) $F(x) = \ln(x^2 + 1)$
4) $F(x) = -\sqrt{1 - x^2}$
5) $F(x) = -\dfrac{1}{2}e^{1-2x}$
6) $F(x) = \ln(e^x - 1)$

10 **1)** 6
2) 1
3) -1
4) 6
5) 2
6) -2

11 **1)** $4\sqrt{3} - 2\sqrt{6}$
2) $\ln\left(\dfrac{21}{13}\right)$
3) $\dfrac{1}{8}$
4) $\dfrac{1}{6}$

12 **1)** 1
2) -2
3) 4
4) 2
5) 9
6) 0

13 **1)** $\displaystyle\int_0^2 e^{x^2}\,dx$
2) $\displaystyle\int_3^6 \frac{1}{\ln(x)}\,dx$
3) $\displaystyle\int_{-2}^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$
4) $\displaystyle\int_0^\pi \cos(t^2)\,dt$
5) $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{1+e^x}\,dx$
6) $\displaystyle\int_1^{101} \frac{1}{x}\,dx$

14 **1)** $\displaystyle\int_0^3 (g - f)(x)\,dx$
2) $\displaystyle\int_{-2}^0 (f - g)(x)\,dx + \int_0^1 (g - f)(x)\,dx$
3) $\displaystyle\int_{-1}^0 (g - f)(x)\,dx + \int_0^1 (f - g)(x)\,dx$
4) $\displaystyle\int_{-0,5}^{0,5} (-f)(x)\,dx + \int_{0,5}^1 f(x)\,dx$

15 **1)** $\displaystyle\mathscr{A}_{\mathscr{D}_1} = \int_0^1 x\,dx - \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ u.a.
2) Le domaine $\mathscr{D}_2$ est symétrique du domaine $\mathscr{D}_1$ par rapport à la droite d'équation $y = x$ donc $\mathscr{A}_{\mathscr{D}_2} = \mathscr{A}_{\mathscr{D}_1}$.
Enfin, l'aire totale du domaine est $2 \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{3}$ u.a.
3) $\mathscr{A}_{\mathscr{D}} = \dfrac{4}{3}$ cm^2.

20 **1)** **a)** $f : t \mapsto t^2 e^t$ est positive et continue sur $\mathbb{R}^+$ donc φ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et on a $\varphi' = f$.
De plus, pour tout $x \geqslant 0$, on a $\psi'(x) = x^2 e^x$.
b) Pour tout $x \geqslant 0$, $\varphi(x) = \psi(x) + k$, $k \in \mathbb{R}$. En particulier, pour $x = 0$, on obtient $0 = 2 + k \Longleftrightarrow k = -2$ donc $\varphi = \psi - 2$.
2) **a)** Par définition, φ convient.
b) Les primitives de f sur $\mathbb{R}^+$ sont de la forme $F(x) = \psi(x) + k$, $k \in \mathbb{R}$. $F(1) = 0$ donne $k = -e$ donc $F(x) = (x^2 - 2x + 1)e^x$.

26 **1)** $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^4}{4} + k, k \in \mathbb{R}$

2) $F(x) = \ln(x) + x + k, k \in \mathbb{R}$

3) $F(x) = -\dfrac{1}{x} - 2\sqrt{x} + k, k \in \mathbb{R}$

4) $F(x) = -\cos(x) - \sin(x) + k, k \in \mathbb{R}$

29 **1)** $F(x) = \dfrac{1}{4}(x^2+1)^4 + k, k \in \mathbb{R}$

2) $F(x) = \dfrac{1}{3}\ln(x^3+1) + k, k \in \mathbb{R}$

3) $F(x) = -\dfrac{1}{2(x^2+1)} + k, k \in \mathbb{R}$

4) $F(x) = -\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + k, k \in \mathbb{R}$

53 **1)** $I + J = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}x = 1.$

$I - J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 2}\,\mathrm{d}x$

$= \left[\ln(\mathrm{e}^x + 2)\right]_0^1$

$= \ln(\mathrm{e} + 2) - \ln(3).$

2) $I = \dfrac{\ln(\mathrm{e}+2) - \ln(3)) + 1}{2}.$

$J = \dfrac{-\ln(\mathrm{e}+2) + \ln(3)) + 1}{2}.$

60 **1)** **a)** $N(2) = 2^3 + 2 \times 2^2 - 16 = 0$. Ainsi $N(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b-2a)x^2 + (c-2b)x - 2c$. Par identification, on trouve $a = 1$, $c = 8$ et donc $b = 4$. On a donc $N(x) = (x-2)(x^2+4x+8)$.

b) $f(x) - g(x) = \dfrac{N(x)}{2(x+2)}$. On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$0 \qquad 2 \qquad +\infty$
$x - 2$	$- \quad 0 \quad +$
$x^2 + 4x + 8$	$+ \qquad +$
$2(x+2)$	$+ \qquad +$
$(f-g)(x)$	$- \quad 0 \quad +$

Sur $[0;2]$, $f(x) \leqslant g(x)$ et sur $[2;+\infty[$, $g(x) \leqslant f(x)$.

2) **a)** $\mathscr{A}_{\mathscr{D}} = \displaystyle\int_0^a \left(\frac{8}{x+2} - \frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x = 8\ln\left(\frac{a+2}{2}\right) - \frac{a^3}{6}.$

b) $\mathscr{A}_{\mathscr{D}} = \displaystyle\int_0^2 \left(\frac{8}{x+2} - \frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x + \int_2^a \left(\frac{x^2}{2} - \frac{8}{x+2}\right)\mathrm{d}x = 8\ln(2) - \frac{4}{3} + \frac{a^3 - 8}{6} - 8\ln\left(\frac{a+2}{4}\right).$

65 **1)** $1 \leqslant \sqrt{1 + \cos^2(x)} \leqslant \sqrt{2}.$

2) $\pi \leqslant I \leqslant \pi\sqrt{2}$

Auto-évaluation QCM

92 b **93** b **94** c

95 a **96** d **97** b

98 c **99** b c **100** d

101 c **102** a **103** d

104 d **105** b d **106** c

107 b **108** a b **109** a b

Chapitre G1
Nombres complexes

Auto-évaluation

1 **1)** $A(x) = (2-x)(2+x)$ $B(x) = (2x-4)(2x+4)$
$C(x)$ est la somme de deux carrés, l'expression ne peut pas être factorisée à l'aide des nombres réels.

2) Pour $F(x)$ le discriminant vaut $\Delta = 25 - 24 = 1$. Il y a donc deux racines $x_1 = 2$ et $x_2 = 3$. On a donc la factorisation :
$F(x) = (x-2)(x-3)$
Pour $G(x)$ le discriminant vaut $\Delta = -3$. Il n'y a pas de racines. L'expression du second degré ne peut pas être factorisée.

2 **1)** **a)** $\overrightarrow{AB}(1;-6)$

b) $(2;-8)$

c) $(0;-4)$

d) $(5;-18)$

3 **1)** Les valeurs sont successivement : $0, \pi/6$

2) Oui.

3) Non, car $f(3) = 4$.

4 **1)** $x = \dfrac{\pi}{3}$

2) $x = -\dfrac{\pi}{3}$

S'entraîner

1 1) Réel, $\text{Re}(z_1) = 2$, $\text{Im}(z_1) = 0$ et $\bar{(z_1)} = 2$
2) Complexe quelconque, $\text{Re}(z_2) = 1$, $\text{Im}(z_2) = 0$
3) Réel, $\text{Re}(z_3) = \sqrt{3}$, $\text{Im}(z_3) = 0$
4) Complexe quelconque, $\text{Re}(z_4) = -3$, $\text{Im}(z_4) = \sqrt{2}$
5) Imaginaire pur, $\text{Re}(z_5) = 0$, $\text{Im}(z_5) = \dfrac{3}{4}$
6) Complexe quelconque, $\text{Re}(z_6) = -5$, $\text{Im}(z_6) = -\dfrac{2}{3}$
7) Complexe quelconque, $\text{Re}(z_7) = \dfrac{1}{7}$, $\text{Im}(z_7) = -1$
8) Nombre réel. $\text{Re}(z_8) = -3$

2 1) $4 + \text{i}$
2) $6 - 3\text{i}$
3) -2
4) $2 + \dfrac{1}{2}\text{i}$

3 1) $z_1 = -2 + \text{i}$
2) $z_2 = 3$
3) $z_3 = 20 - 4\text{i}$
4) $z_4 = 2\text{i}$

4 1) $z_A = 4 + 4\text{i}$
2) $z_B = -2 - 2\text{i}$
3) $z_C = 4\text{i}$
4) $z_D = -3\text{i}$
5) $z_E = -4 + 2\text{i}$
6) $z_F = 163\text{i}$
7) $z_G = 3 - 4\text{i}$
8) $z_H = -4\text{i}$
9) $z_I = 2$

6 1) z_1 est sous forme trigonométrique et on a $|z_1| = 5$ et $\arg(z_1) = \dfrac{\pi}{3}$.
2) z_2 n'est pas sous forme trigonométrique.
3) z_3 est sous forme trigonométrique et on a $|z_3| = \sqrt{2}$ et $\arg(z_3) = \dfrac{3\pi}{2}$.
4) z_4 est sous forme trigonométrique et on a $|z_4| = 1$ et $\arg(z_4) = \dfrac{\pi}{5}$.
5) z_5 n'est pas sous forme trigonométrique.
6) z_6 n'est pas sous forme trigonométrique.
7) z_7 est sous forme trigonométrique comme $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ et on a $|z_7| = 3$ et $\arg(z_7) = \dfrac{\pi}{2}$.
8) z_8 est sous forme trigonométrique et on a $|z_8| = \dfrac{3}{2}$ et $\arg(z_8) = \dfrac{\pi}{3}$.

7 1) $e^{5\text{i}\frac{\pi}{6}}$
2) $e^{-\text{i}\frac{\pi}{7}}$
3) $e^{-3\text{i}\frac{\pi}{5}}$
4) $e^{4\text{i}\frac{\pi}{9}}$
5) $e^{\text{i}\pi}$
6) $e^{\frac{\pi}{6}}$

11 1) $2(1+2\text{i}) = 2 + 4\text{i}$
2) $\text{i}(3+\text{i}) = -1 + 3\text{i}$
3) $2\text{i}(3 - 2\text{i}) = 4 + 6\text{i}$
4) $(1 + 2\text{i})(-2 - 2\text{i}) = 2 - 6\text{i}$

17 1) $z_D = -3 + 3\text{i}$
2) $z_I = -\dfrac{1}{2}$

45 Dans chaque cas, on isole l'inconnue z et on met le quotient complexe sous forme algébrique.
1) $z = \dfrac{1-\text{i}}{1+\text{i}} = \dfrac{(1-\text{i})^2}{2} = -\text{i}$.
2) $\dfrac{-1+\text{i}}{2}$ ou 3i
3) $\dfrac{3-4\text{i}}{5}$
4) $-1 + 3\text{i}$

51 1) $z^2 - 3z = 0 \iff z(z-3) = 0 \iff z = 0$ ou $z = 3$
2) On a $\Delta = -64$ et deux solutions complexes : $\dfrac{1-2\text{i}}{2}$ ou $\dfrac{1+2\text{i}}{2}$
3) On a $\Delta = -3$ et deux solutions complexes : $\dfrac{-1-\text{i}\sqrt{3}}{2}$ ou $\dfrac{-1+\text{i}\sqrt{3}}{2}$
4) On a $\Delta = 76 = 2\sqrt{19}$ et deux solutions réelles : $\dfrac{3-\sqrt{19}}{2}$ ou $\dfrac{3+\sqrt{19}}{2}$

60 1) C'est la demi-droite issue de l'origine (exclue) et formant un angle de $\dfrac{\pi}{3}$ avec l'axe des abscisses.
2) C'est le cercle de centre l'origine et de rayon 5.
3) Ce sont les deux points du cercle de centre l'origine et de rayon 3 qui sont situés sur l'axe des abscisses.
4) C'est la partie de l'axe des réel avec une partie réelle négative (sauf l'origine).

61 **1)** $|z_1| = 7$ et $\arg(z_1) = 0$.

2) $|z_2| = 2$ et $\arg(z_2) = \dfrac{\pi}{2}$

3) $|z_3| = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$ et $\arg(z_3) = \dfrac{3\pi}{4}$

4) $|z_4| = 2\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ et $\arg(z_3) = \dfrac{\pi}{6}$

64 **1)** $\arg(z-1) = \widehat{\vec{u}\,;\,\overrightarrow{AM}}$ avec A d'affixe 1. L'ensemble de points demandé est donc la droite passant par A perpendiculaire à l'axe des réels ; sauf le point A.

2) $|z-3| = 2$ signifie que $BM = 2$ avec B d'affixe 3. C'est donc le cercle de centre B et de rayon 2.

3) $|z-\mathrm{i}| = 5$. C'est le cercle de centrer J d'affixe i et de rayon 5.

4) $2\arg(z) = 0 \iff arg(z) = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Les points M sont donc ceux de l'axe de réels sauf l'origine.

72 **1)** Voir preuve dans le cours.

2) a) $\dfrac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = \dfrac{1-\frac{3}{2}\mathrm{i}}{-3-2\mathrm{i}} = \dfrac{\left(1-\frac{3}{2}\mathrm{i}\right)(-3+2\mathrm{i})}{13} = \dfrac{\frac{13}{2}\mathrm{i}}{13} = \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$. Donc l'argument du quotient précédent vaut $\dfrac{\pi}{2}$. L'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}}\right)$ est droit et le triangle est donc rectangle en B.

b) $\dfrac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = \dfrac{3-\mathrm{i}}{-1-3\mathrm{i}} = \dfrac{(3-\mathrm{i})(-1+3\mathrm{i})}{10} = \dfrac{10\mathrm{i}}{10} = \mathrm{i}$. Donc le triangle est rectangle en B.

c) $\dfrac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = \dfrac{-6+4\mathrm{i}}{2+3\mathrm{i}} = \dfrac{(-6+4\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})}{13} = 2\mathrm{i}$.
Donc le triangle ABC est rectangle en B.

3) Dans le cas a) on a
$AB = |z_B - z_A| = \dfrac{1}{2}|z_B - z_C| = \dfrac{1}{2}BC$ par les règles sur les quotients de module. Donc le triangle n'est pas isocèle en B. Même raisonnement pour le cas c).
Par contre dans le cas c) on a bien $|z_B - z_A| = |z_B - z_C|$ donc $BA = BC$ et le triangle est isocèle en B.

80 **1)** On a $|z| = \dfrac{|\sqrt{6}-\mathrm{i}\sqrt{2}|}{2} = \dfrac{\sqrt{8}}{2} = \sqrt{2}$. On en déduit que
$z = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} - \mathrm{i}\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)$. Ce qui donne l'écriture trigonométrique de z. On en déduit $|z| = \sqrt{2}$ et $\arg(z) = -\dfrac{\pi}{6}$.
De même $|z'| = \sqrt{2}$ et $\arg(z') = -\dfrac{\pi}{4}$.
Par les règles sur les modules et les arguments :
$\left|\dfrac{z}{z'}\right| = 1$ et $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \dfrac{\pi}{12}$.

2) $\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \dfrac{\sqrt{6}-\mathrm{i}\sqrt{2}}{2(1-i)} = \dfrac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})+\mathrm{i}(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}$.

3) On a donc $\dfrac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})+\mathrm{i}(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4} = \cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$. Cela donne le résulat demandé par égalité des parties réelles et imaginaires.

86 **1)** $\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \dfrac{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i}$

2) $\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^3 = (\mathrm{i})^3 = -\mathrm{i}$

3) $(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^2 = \left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)^2 = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$

4) $(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^3 = \left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)^3 = 8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -8$

Auto-évaluation QCM

119 d	**120** d	**121** b
122 a	**123** a	**124** b
125 d	**126** c	**127** d
128 b	**129** c	**130** a
131 c	**132** a	**133** c

Chapitre G2
Espace : droites, plans et vecteurs

Auto-évaluation

1 **1)** $EB = \sqrt{2}a$

2) FBC est un triangle rectangle isocèle en B.

3) $EB = BG = GE = \sqrt{2}a$ donc EBG est équilatéral.

2 1) $V = a^3$

2) $V_{ABDE} = \dfrac{a^3}{6}$

3) $V_{BCGFEHD} = V - V_{ABDE} = \dfrac{5a^3}{6}$

3 1) $\overrightarrow{AB}(-3\,;\,-5)$ et $\overrightarrow{AC}(-2\,;\,-3{,}3)$.
$-3 \times (-3{,}3) \neq (-2) \times (-5)$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc A, B et C ne sont pas alignés.

2) $M \in \mathscr{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{EM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, d'où le résultat.

3) $\overrightarrow{BE}(3\,;\,2)$ donc $2\overrightarrow{BE}(6\,;\,4)$ et $-3\overrightarrow{AB}(9\,;\,15)$ donc $\overrightarrow{AF}(15\,;\,19)$.
D'où $F(16\,;\,23)$.

4 1) $(1\,;\,1)$ est le couple solution.

2) $(3\,;\,9)$ est le couple solution.

3) $(\dfrac{-16}{9}\,;\,\dfrac{-43}{9})$ est le couple solution.

S'entraîner

1 1) (DB) et (EF) non coplanaires ;

2) (IJ) et (AF) parallèles ;

3) (IC) et (AB) non coplanaires ;

4) (JF) et (EH) sécantes.

2 1) (DCG) et (AEF) parallèles ;

2) (IJA) et (HDC) sécants selon (IJ) ;

3) (IJE) et (CKL) parallèles.

3 1) (IJ) parallèle à (ABF) ;

2) (IJ) et (BCG) sécants ;

3) (KE) est incluse dans (ABF).

4 1) un rectangle

2) un triangle isocèle en I

5 1) (IF) et (FG) sont orthogonales.

2) (IF) et (FH) ne sont pas orthogonales

3) (BF) et (EH) sont orthogonales.

4) (BF) et (AC) sont orthogonales.

6 1) $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{FG}$;

2) $\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{BE}$;

3) $\overrightarrow{FD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{0}$.

7 1) $\overrightarrow{FI} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE}$.

2) $\overrightarrow{AO} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.

8 1) $\overrightarrow{AB}(2;-1;-4)$; $\overrightarrow{AC}(5;-5;1)$ et $\overrightarrow{BC}(3;-4;5)$.

2) $\vec{u}\,(-1;3;-9)$ et $\vec{v}\,(14;-17;16)$.

9 1) $C(4;4;3)$;

2) $\overrightarrow{AB}(-2;-2;5)$ et $D(2;2;8)$;

3) $K(2;3,5;3,5)$.

10 1) Représentation paramétrique de la droite Δ :

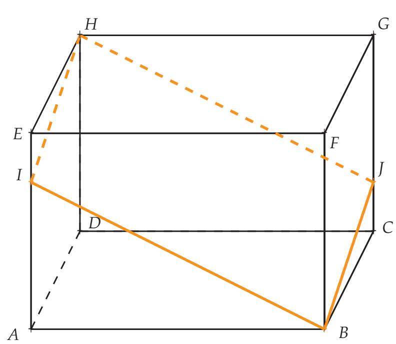
$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 5 - t \\ z = -1 + 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

2) Le point B n'appartient pas à Δ.

11 $\vec{u}\,(4\,;\,0\,;\,-1)$ dirige Δ et $A(-3\,;\,2\,;\,0)$ appartient à Δ.

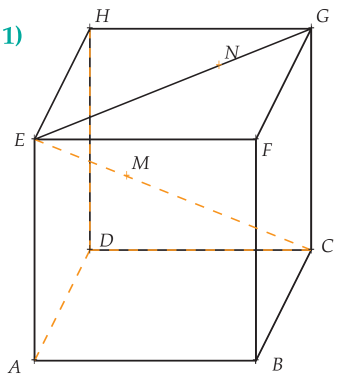
23 1) L'intersection du plan (BIJ) avec la face $EABF$ est le segment $[BI]$.

2) L'intersection du plan (BIJ) avec la face $DCGH$ est la parallèle à (IB) passant par J. C'est le segment $[JH]$.



34 **1)** Les droites (BC) et (BF) sont deux droites sécantes du plan (BCG) et, par propriété du cube, $(AB) \perp (BC)$ et $(AB) \perp (BF)$.
Donc (AB) est orthogonale au plan (BCG).
2) (AB) est orthogonale au plan (BCG), donc (AB) est orthogonale à toute droite du plan(BCG), et en particulier, (AB) et (CF) sont orthogonales.

41 **1)**



2) $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} =$
$-\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} =$
$-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$ et
$\overrightarrow{CE} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CM}$.
Donc $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CM}$ sont colinéaires et les points C, E et M sont alignés.
3) $\overrightarrow{EN} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{FB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \frac{2}{3}\overrightarrow{FG} =$
$\frac{2}{3}\overrightarrow{EG}$. Donc $N \in (EFG)$ et les points E, F, H et N sont coplanaires.

45 **1)** $\overrightarrow{AD}(-2\,;\,-3\,;\,-5)$. D'autre part :
$\overrightarrow{AB}(5\,;\,3\,;\,-1)$ donc $2\overrightarrow{AB}(10\,;\,6\,;\,-2)$ et
$\overrightarrow{AC}(4\,;\,3\,;\,1)$ donc $-3\overrightarrow{AC}(-12\,;\,-9\,;\,-3)$.
Ainsi $2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}(-2\,;\,-3\,;\,-5)$. Donc
$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$
2) On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires, et que les points A, B, C et D sont coplanaires.

58 Δ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}(-1\,;\,3\,;\,1)$
1) d a pour vecteur directeur $\overrightarrow{v}(-1\,;\,2\,;\,-1)$ qui n'est pas colinéaire avec $\overrightarrow{u}$. Δ et d sont donc soit sécantes, soit non coplanaires.

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + 3t \\ z = -1 + t \\ x = -k \\ y = 3 + 2k \\ z = 4 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -k = 1 - t \\ 3 + 2k = -2 + 3t \\ 4 - k = -1 + t \\ x = -k \\ y = 3 + 2k \\ z = 4 - k \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} k = t - 1 \\ -2 + 3t = 1 + 2t \\ 4 - t + 1 = -1 + t \\ x = -k \\ y = 3 + 2k \\ z = 4 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ t = 3 \\ t = 3 \\ x = -2 \\ y = 7 \\ z = 2 \end{cases}$$

Les droites d et Δ sont donc sécantes en $A(-2\,;\,7\,;\,2)$.
2) d a pour vecteur directeur $\overrightarrow{v}(1\,;\,-2\,;\,-1)$ qui n'est pas colinéaire avec $\overrightarrow{u}$. Δ et d sont donc soit sécantes, soit non coplanaires.

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + 3t \\ z = -1 + t \\ x = 1 + k \\ y = -2k \\ z = 3 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + k = 1 - t \\ -2k = -2 + 3t \\ 3 - k = -1 + t \\ x = 1 + k \\ y = -2k \\ z = 3 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -t \\ t = 2 \\ 3 = -1!!! \\ x = 1 + k \\ y = -2k \\ z = 3 - k \end{cases}$$

Le système n'admet pas de solution et les droites d et Δ sont donc non coplanaires.
3) d a pour vecteur directeur $\overrightarrow{v}(1\,;\,-3\,;\,-1)$ qui est pas colinéaire avec $\overrightarrow{u}$. Δ et d sont donc parallèles. $B(1\,;\,-2\,;\,-1) \in \Delta$. Vérifions si $B \in d$ pour savoir si elles sont confondues :

$$\begin{cases} 1 = 1 + k \\ -2 = -2k \\ -1 = 3 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k = 1 \\ k = 4 \end{cases}.$$

Il n'existe pas de réel k tel que les coordonnées de B vérifient le système, donc B n'appartient pas à d et les droites d et Δ sont strictement parallèles.

Auto-évaluation QCM

80 a — **81** b et c — **82** c
83 a — **84** b et c — **85** a b c
86 b et c — **87** a et c — **88** a
89 a — **90** c

Chapitre G3
Produit scalaire dans l'espace et applications

Auto-évaluation

1 1) 16 — 2) 4 — 3) -2.25 — 4) $1,75$

2 1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2\right.$
$\left.-\left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2\right)=\frac{1}{2}\left(5^2-4^2-2^2\right)=\frac{5}{2}$
2) a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=AB\times AD\times\cos\widehat{BAD}=$
$8\cos\widehat{BAD}$ donc $\cos\widehat{BAD}=\frac{5}{16}$ d'où
$\widehat{BAD}\approx 71,8°$.
b) $\overrightarrow{BD}^2=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD})^2=$
$BA^2+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AD}+AD^2=16-5+4=15$ d'où le résultat.

3 1)
a) $(1;1;1)$ — b) $(0;0;1)$ — c) $(0;0;1)$ — d) $(0;1;0)$
2)
a) $(1;0;0)$ — b) $(1;0;0)$ — c) $(1;1;1)$ — d) $(1;0;0)$
3)
a) $\left(\frac{1}{2};1;\frac{1}{2}\right)$ — b) $\left(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ — c) $\left(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ — d) $\left(\frac{1}{2};1;\frac{1}{2}\right)$

S'entraîner

1 1) $\|\vec{u}\|=2$ — 2) $\|\vec{v}\|=3$ — 3) $\vec{u}\cdot\vec{v}=3$ — 4) $\theta=60°$

2 1) 10 — 2) 31 — 3) -7 — 4) -17

3 1) a^2 — 2) $-a^2$ — 3) 0 — 4) a^2 — 5) a^2 — 6) 0

4 1) $\frac{a^2}{2}$ — 2) $\frac{a^2}{2}$ — 3) $-\frac{a^2}{2}$ — 4) 0

5 1) 0 — 2) 0 — 3) a^2 — 4) $\frac{a^2}{2}$

6 1) $\vec{u}\cdot\vec{v}=-6$ donc non.
2) $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ donc oui.
3) $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ donc oui.
4) $\vec{u}\cdot\vec{v}=2\sqrt{3}$ donc non.

7 1) $\overrightarrow{EF}$ car il est orthogonal à $\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{FB}$
2) $\overrightarrow{GD}$ car il est orthogonal à $\overrightarrow{CH}$ et $\overrightarrow{BC}$

8 1) $(ABCD)$ car $\overrightarrow{BF}$ est orthogonal à $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA}$
2) $(BDHF)$ car $\overrightarrow{AC}$ est orthogonal à $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BF}$

9 1) $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-6\\2\end{pmatrix}$ — 2) $\vec{n}\begin{pmatrix}-2/3\\1\\1/3\end{pmatrix}$ — 3) $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-8\\10\end{pmatrix}$ — 4) $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1/2\\3\end{pmatrix}$

10 1) $2x-3y+z+1=0$
2) $5x-y+2z+7=0$
3) $-7x+2y-4z-3=0$
4) $4x-2y+z=0$

16 On se place dans le repère orthonormé $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$. Dans ce repère, $B(1;0;0)$, $C(1;1;0)$ et $H(0;1;1)$. Ainsi, O, milieu de $[BH]$ a pour coordonnées $O\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}0,5\\-0,5\\-0,5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}0,5\\0,5\\-0,5\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=0,25$. De plus, $OB=0,5\sqrt{3}$ donc $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=0,25\times 3\times\cos(\alpha)$ et ainsi, $\cos(\alpha)=\frac{1}{3}$ donc $\alpha\approx 71°$.

28 **1)** $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IG} + \overrightarrow{GJ} = \overrightarrow{IG} + \overrightarrow{IA}$ donc J appartient au plan engendré par I, $\overrightarrow{IG}$ et $\overrightarrow{IA}$.

2) a) $\overrightarrow{FK} \cdot \overrightarrow{IJ} = (\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GK}) \cdot \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{GK} \cdot \overrightarrow{HC}$. D'une part, $\overrightarrow{FG}$ est un vecteur normal au plan $(CDGH)$ donc est orthogonal à $\overrightarrow{HC}$. D'autre part, (GK) et (HC) sont les diagonales d'un carré, donc orthogonales. Ainsi, $\overrightarrow{FK} \cdot \overrightarrow{IJ} = 0$.

b) $\overrightarrow{FK} \cdot \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{FK} \cdot \overrightarrow{JG} = \overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{JG} + \overrightarrow{GK} \cdot \overrightarrow{JG} = 1 \times \frac{1}{2} + \overrightarrow{GK} \cdot \overrightarrow{JH} + \overrightarrow{GK} \cdot \overrightarrow{HG} = \frac{1}{2} + \overrightarrow{GK} \cdot \overrightarrow{JH} - \frac{1}{2}$.
Or, $\overrightarrow{JH}$ est un vecteur normal au plan $(CDGH)$ donc orthogonal à $\overrightarrow{GK}$. Ainsi, $\overrightarrow{FK} \cdot \overrightarrow{AI} = 0$.

c) (FK) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (AIG), donc orthogonale à ce plan.

37 $(\mathscr{P}) : x + 2y - 3z + d = 0$, $d \in \mathbb{R}$. $A \in (\mathscr{P})$ donc $-1 + 4 + 3 + d = 0 \Leftrightarrow d = -6$ et donc $(\mathscr{P}) : x + 2y - 3z - 6 = 0$.

46 $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ qui ne sont pas colinéaires donc (ABC) existe. On pose $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et on obtient

$$\begin{cases} 2a + 3b - 2c &= 0 \\ a + 2b &= 0 \end{cases}$$

Donc $a = -2b$ et $c = -\frac{b}{2}$ d'où, en prenant $b = -2$, $\vec{n}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc $(ABC) : 4x - 2y + z + d = 0$ et avec A, on obtient $d = 1$.

52 (d) est dirigé par $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et un vecteur normal à $(\mathscr{P})$ est $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\vec{u} \cdot \vec{n} = -9$ donc (d) et $(\mathscr{P})$ se coupent en un point $P(x\,;y\,;z)$ tel que :

$$\begin{cases} x &= -7 + t \\ y &= 4 + 2t \\ z &= -5 - t \\ 0 &= -2x - 3y + z - 6 \end{cases}$$

Ainsi, $t = -1$ et donc $x = -8$, $y = 2$ et $z = -4$. Le point d'intersection a pour coordonnées $(-8\,;2\,;-4)$.

66 $\vec{n}_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}_2\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ se coupent selon une droite (d). On résout :

$$\begin{cases} x + y + 2z - 3 &= 0 \\ -x + 4y - 5z + 6 &= 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z - 3 &= 0 \\ 5y - 3z + 3 &= 0 \end{cases}$$

Ainsi, $z = 1 + \frac{5}{3}y$ et $x = 1 - \frac{13}{3}y$ et donc (d) :

$$\begin{cases} x &= 1 - \frac{13}{3}t \\ y &= t \\ z &= 1 + \frac{5}{3}t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Auto-évaluation QCM

87 a	**88** c	**89** c
90 a b	**91** c	**92** a
93 c	**94** b	**95** b
96 c	**97** a b c	**98** a b c
99 c	**100** a	**101** c
102 d	**103** b	**104** a
105 a b	**106** a b	**107** b
108 c	**109** a	**110** b

Chapitre SP1
Probabilités conditionnelles et indépendance

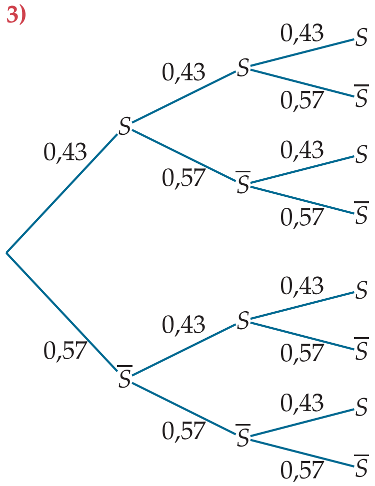
Auto-évaluation

1 **1)** On obtient :

	A	B	O	AB
$R+$	39,15 %	7,02 %	36,98 %	2,01 %
$R-$	5,85 %	1,98 %	6,02 %	0,99 %

2) L'évènement $AB \cup R-$ est « la personne est du groupe AB ou a un rhésus négatif ».
On a donc $P(AB \cup R-) =$
$\frac{2,01}{100} + \frac{0,99}{100} + \frac{5,85}{100} + \frac{1,98}{100} + \frac{6,02}{100} = 0,168\,5$
d'après le tableau.

3)



2 **1)** On obtient :

x_i	1	2	15
$P(X = x_i)$	0,48	0,09	0,43

2) $P(X < 5) = P(X = 1) + P(X = 2)$
$= 0,48 + 0,09 = 0,57.$

3) $E(X) = 0,48 \times 1 + 0,09 \times 2 + 0,43 \times 15 = 7,11$ et
$\sigma(X) = \sqrt{0,48 \times (1 - 7,11)^2 + \ldots + 0,43 \times (15 - 7,11)^2}$
$= \sqrt{47,0379} \approx 6,86.$

3 **1)** Y donne le nombre de succès (c'est-à-dire le nombre de personnes du groupe A) quand on réalise 100 tirages à deux issues, succès ou échec, assimilables à des tirages avec remise (car la population française est très grande) donc identiques et indépendants.
Y suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,45$ (probabilité d'un succès).

2) $E(Y) = n \times p = 100 \times 0,45 = 45$ et
$\sigma(Y) = \sqrt{n \times p \times (1 - p)} = \sqrt{100 \times 0,45 \times 0,55}$
$= \sqrt{24,75} \approx 4,97.$

3) **a)** On utilise la calculatrice : $P(Y = 42) \approx 0,067$

b) $P(Y = E(Y)) = P(Y = 45) \approx 0,08$

c) $P(Y \leqslant 55) \approx 0,982$

d) $P(Y < 47) = P(Y \leqslant 46) \approx 0,62$

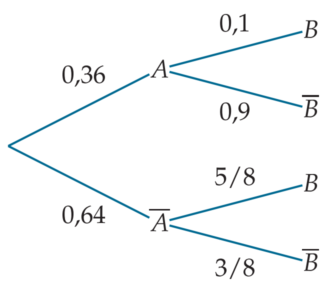
e) $P(Y > 43) = 1 - P(X \leqslant 43) \approx 0,617$

f) $P(Y \geqslant 40) = 1 - P(X \leqslant 39) \approx 0,866$

S'entraîner

1
- $0,2 = P(A)$
- $0,8 = P\left(\overline{A}\right)$
- $0,35 = P_A(B)$
- $0,65 = P_A\left(\overline{B}\right)$
- $0,58 = P_{\overline{A}}(B)$
- $0,42 = P_{\overline{A}}\left(\overline{B}\right)$

2



$P(B) = 0,36 \times 0,1 + 0,64 \times \frac{5}{8} = 0,436$

3 **1)** Par soustractions, on obtient :

	Studio	Pas studio	Total
Seule	8	7	15
Plusieurs	2	5	7
Total	10	12	22

2) a)

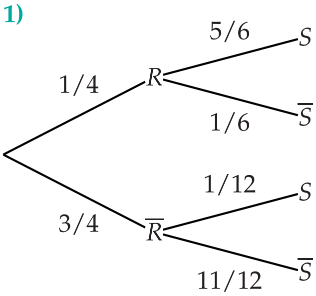
- $P(S) = \dfrac{10}{22} = \dfrac{5}{11}$
- $P_{PL}(S) = \dfrac{2}{7}$
- $P_{\overline{S}}(PL) = \dfrac{5}{12}$

b) $P(S) \neq P_{PL}(S)$ donc S et PL ne sont pas indépendants.

4 A et B sont indépendants si, et seulement si, $P(A) \times P(B) = P(A \cap B)$

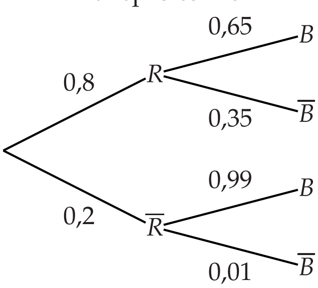
$\Leftrightarrow P(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{5}} = \dfrac{1}{5} \times \dfrac{5}{3} = \dfrac{1}{3}$.

6 **1)**

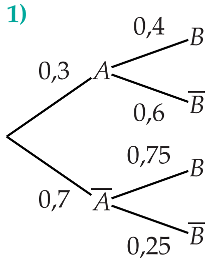


2) On considère les évènements :

- R : « Tao a de quoi se préparer à manger dans son réfrigérateur »
- B : « Le repas est bon »



21 **1)**



2) $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0{,}3 \times 0{,}4 = 0{,}12$

3) $P(B) = P(A) \times P_A(B) + P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}(B)$

$= 0{,}3 \times 0{,}4 + 0{,}7 \times 0{,}75 = 0{,}645$.

4) $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0{,}12}{0{,}645} \approx 0{,}186$.

5) $P_{\overline{B}}(A) = \dfrac{P\left(A \cap \overline{B}\right)}{P\left(\overline{B}\right)} = \dfrac{0{,}3 \times 0{,}6}{1 - 0{,}645} \approx 0{,}507$.

6) $P_B(A) < P_{\overline{B}}(A)$, il est donc plus probable qu'elle ait une amande si elle choisit une dragée rose : elle doit donc plutôt choisir une dragée rose.

Auto-évaluation QCM

50 b **51** e **52** f

53 d **54** a d **55** b

56 b **57** a **58** c d

59 f **60** c **61** a

Chapitre SP2
Lois à densité

Auto-évaluation

1

- $\displaystyle\int_0^3 2\,\mathrm{d}x = [2x]_0^3 = 2 \times 3 - 2 \times 0 = 6$
- $\displaystyle\int_0^4 2\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t = [-\mathrm{e}^{-2t}]_0^4 = -\mathrm{e}^{-2\times 4} - \left(-\mathrm{e}^{-2\times 0}\right)$

$= -\mathrm{e}^{-8} + 1$.

2 La calculatrice donne environ 0,775.

3 La calculatrice donne :

1) $P(X = 7) \approx 0,174$

2) $P(X < 5) = P(X \leqslant 4) \approx 0,004$

3) $P(X \leqslant 4) \approx 0,004$

4) $\sigma(X) = \sqrt{10 \times 0{,}82 \times 0{,}18} \approx 1{,}215$

4 **1)**

- $E(G) = 0{,}63 \times 1\,000 + \ldots + 0{,}04 \times 10\,000 = 2\,050$
- $\sigma(G) =$

$\sqrt{0{,}63\,(1\,000 - 2\,050)^2 + \ldots + 0{,}04\,(10\,000 - 2\,050)^2}$
$= \sqrt{4\,267\,500} \approx 2\,065{,}793$

2) Cela veut dire que sur un grand nombre de parties de ce jeu, en moyenne, le gain est de 2 050 €.

3) Plus l'écart-type est grand, plus les gains sont hétérogènes donc ils le sont plus dans le deuxième jeu.

5 Graphiquement :

- $P(X = 3) \approx 0{,}03$
- $P(\geqslant 10) \approx 0{,}15$

6 **1)** L'espérance augmente de 1 et est donc -1 et la variance est la même.

2) Y prend les valeurs -6 ; 14 et 100.

- $E(Y) = E(2X) = 2E(X) = -4$
- $V(Y) = V(2X) = 2^2 V(X) = 124$

S'entraîner

1 **1)** $\dfrac{20-0}{100-0} = 0{,}2$

2) $\dfrac{0+100}{2} = 50$

2 **1)** La loi $\mathscr{U}([0\,;\,60[)$. On considère que les calculs pour la loi $\mathscr{U}([0;60[)$ sont les mêmes que ceux pour la loi $\mathscr{U}([0;60])$.

2) $\dfrac{60-45}{60-0} = 0{,}25$

3 **1)** $x \mapsto \dfrac{1}{1-(-1)} = \dfrac{1}{2}$ sur $[-1\,;\,1]$

2) $x \mapsto \dfrac{1}{120-0} = \dfrac{1}{120}$ sur $[0\,;\,120]$

3) $x \mapsto \dfrac{1}{20-(-10)} = \dfrac{1}{30}$ sur $[-10\,;\,20]$

4) $x \mapsto \dfrac{1}{0{,}3-(-0{,}1)} = 2{,}5$ sur $[-0{,}1\,;\,0{,}3]$

4 **1)** $1 - e^{-0{,}001\times 1\,500} = 1 - e^{-1{,}5}$

2) $e^{-0{,}001\times 400} - e^{-0{,}001\times 2\,000} = e^{-0{,}4} - e^{-2}$

3) $e^{-0{,}001\times 1\,000} = e^{-1}$

4) $P_{Y>1\,000}(Y > 2\,000)$
$= P_{Y>1\,000}(Y > 1\,000 + 1\,000)$
$= P(Y > 1\,000) = e^{-1}$

5 **1)** $\lambda = f(0) = 0{,}5$

2) $E(X) = \dfrac{1}{0{,}5} = 2$

6 **1)** $e^{-3\lambda} = e^{-0{,}9}$ donc $\lambda = 0{,}3$.

2) $1 - e^{-0{,}3\times 2} = 1 - e^{-0{,}6}$

7 **1)** $E(X) = \dfrac{1}{\lambda} = 3$ donc $\lambda = \dfrac{1}{3}$

2) $P(X < 3) = 1 - e^{-\frac{1}{3}\times 3} = 1 - e^{-1}$

8 **1)** 0,25

2) 0,25

3) $0{,}5 + 0{,}25 = 0{,}75$

4) $P_{(X>7)}(X \leqslant 8) = \dfrac{P(7 < X \leqslant 8)}{P(X > 7)}$
$= \dfrac{0{,}25}{0{,}75} = \dfrac{1}{3}$

9 **1)** 0,09

2) $0{,}5 - 0{,}09 = 0{,}41$

3) $1 - 0{,}09 = 0{,}91$

4) $P_{(Y>9)}(Y \leqslant 13) = \dfrac{P(9 < Y \leqslant 13)}{P(Y > 9)}$
$= \dfrac{0{,}82}{0{,}91}$

10 $\mu = 20$ et $2\sigma \approx 5$ donc $\sigma \approx 2{,}5$

11 **1)** $3\sigma \approx 17 - 5 = 12$ donc $\sigma \approx 4$

2) a) C'est approximativement $P(\mu - \sigma \leqslant X < \mu + \sigma) = 0{,}68$

b) C'est approximativement $P(\mu < X < \mu + \sigma) = \dfrac{0{,}68}{2} = 0{,}34$

12 **1)** 0,1

2) 0,4

3) $\dfrac{P(1 \leqslant X < 5)}{P(X < 5)} = \dfrac{0{,}2}{0{,}6} = \dfrac{1}{3}$

13 **1)** Comme $P(\mu - 3\sigma \leqslant X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}997$, on déduit $P(X > \mu + 3\sigma) = \dfrac{1 - 0{,}997}{2} \approx 0{,}001\,5$ donc $11 \approx \mu + 3 \times 2$ c'est-à-dire $\mu \approx 5$.

2) 0,5

22 **1) a)** $\dfrac{5{,}5 - 1}{7 - 0} = \dfrac{4{,}5}{7} = \dfrac{9}{14}$

b) $\dfrac{6 - 2{,}7}{7 - 0} = \dfrac{3{,}3}{7} = \dfrac{33}{70}$

2) $E(X) = \dfrac{0 + 7}{2} = 3{,}5$

30 **1)** $P(0 \leqslant X \leqslant 2) = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}3 \times 2} = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}6} \approx 0{,}451$

2) $P(X \geqslant 1) = \mathrm{e}^{-0{,}3 \times 1} = \mathrm{e}^{-0{,}3} \approx 0{,}741$

3) $\mathrm{e}^{-0{,}3 \times 5} - \mathrm{e}^{-0{,}3 \times 10} = \mathrm{e}^{-1{,}5} - \mathrm{e}^{-3} \approx 0{,}173$

4) $P(5 \leqslant X \leqslant 10) = \mathrm{e}^{-1{,}5} - \mathrm{e}^{-3} \approx 0{,}173$

32 **1)** $P(Y > 30) = 0{,}2 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\lambda \times 30} = 0{,}2$

$\Leftrightarrow \lambda = \dfrac{\ln(0{,}2)}{-30} \approx 0{,}054$

2) a) $\mathrm{e}^{-0{,}05 \times 15} = \mathrm{e}^{-0{,}75} \approx 0{,}472$

b) $\mathrm{e}^{-0{,}05 \times 5} = \mathrm{e}^{-0{,}25} \approx 0{,}779$

c) $\dfrac{P(Y \geqslant 20)}{P(Y \geqslant 15)} = \dfrac{\mathrm{e}^{-0{,}05 \times 20}}{\mathrm{e}^{-0{,}05 \times 15}} = \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{\mathrm{e}^{-0{,}75}} = \mathrm{e}^{-0{,}25}$

$\approx 0{,}779$

d) $E(Y) = \dfrac{1}{0{,}05} = 20$

41 **1) a)** 0,191

b) 0,691

c) 0,691

d) 0,533

e) 0,159

f) 0,023

2) a) $t \approx 0{,}842$

b) $P(X > t) = 0{,}9 \Leftrightarrow P(X \leqslant t) = 0{,}1$ donc $t \approx -1{,}282$

c) $P(0 \leqslant X \leqslant t) = 0{,}15 \Leftrightarrow P(X \leqslant t) = 0{,}65$ donc $t \approx 0{,}385$

d) $P(-t < X < t) = 0{,}4 \Leftrightarrow P(X \leqslant t) = 0{,}5 + \dfrac{0{,}4}{2} = 0{,}7$ donc $t \approx 0{,}524$

47 **1) a)** 0,378

b) 0,5

c) 0,748

d) 0,369

e) 0,369

f) 0,909

g) $\dfrac{P(2 \leqslant X < 3)}{P(1 < X < 3)} = 0{,}5$

h) $\dfrac{P(X > 3)}{P(X \geqslant 2)} \approx 0{,}739$

2) a) $t \approx 6{,}634$

b) $P(Y \geqslant t) = 0{,}7 \Leftrightarrow P(Y \leqslant t) = 0{,}3$ donc $t \approx 7{,}902$

c) $P(-t < Y - 10 < t) = 0{,}9$

$\Leftrightarrow P(10 - t < Y < 10 + t) = 0{,}9$

$\Leftrightarrow P(Y < 10 + t) = 0{,}5 + \dfrac{0{,}9}{2} = 0{,}95$

donc $10 + t \approx 16{,}579$ puis $t \approx 6{,}579$.

d) $P(t \leqslant Y \leqslant 10) = 0{,}35 \Leftrightarrow P(t \leqslant Y) = 0{,}85$

$\Leftrightarrow P(Y \leqslant t) = 0{,}15$ donc $t \approx 5{,}854$

e) $P(t \leqslant Y < 9) = 0{,}1$

$\Leftrightarrow P(Y \geqslant t) = 0{,}1 + P(Y \geqslant 9)$

$\Leftrightarrow P(Y \leqslant t) = 1 - (0{,}1 + P(Y \geqslant 9))$

$= 0{,}9 - P(Y \geqslant 9) \approx 0{,}301$ puis $t \approx 7{,}917$

54 **1)** Z suit la loi $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.

2) Une calculatrice donne $t \approx 0{,}842$.

3) On a $X \leqslant 11 \Leftrightarrow \dfrac{X - 10}{\sigma} \leqslant \dfrac{1}{\sigma}$ d'où

$P(X \leqslant 11) = P\left(Z \leqslant \dfrac{1}{\sigma}\right) = 0{,}8.$

D'après la question précédente, $\dfrac{1}{\sigma} \approx 0{,}842$ puis

$\sigma \approx \dfrac{1}{0{,}842} \approx 1{,}188.$

Auto-évaluation QCM

89 b	**90** a c	**91** b
92 c	**93** a	**94** a c
95 a	**96** b	**97** b c
98 a b c	**99** a	**100** d
101 b	**102** c	**103** d
104 a b	**105** a	**106** c

Chapitre SP3
Échantillonnage et estimation

Auto-évaluation

1 **1)** $[1\,;\,6]$ **2)** $\left[\frac{1}{8}\,;\,\frac{6}{8}\right]$ soit $[0{,}125\,;\,0{,}75]$

2 **1)** X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10\,000$ et $p = 0{,}03$.
2) $[267\,;\,334]$
3) $399 \notin [267\,;\,334]$ donc on peut penser que l'affirmation est fausse au risque d'erreur de 5 %.

3 **1)** $\frac{5}{20} = 0{,}25 \in [0{,}2\,;\,0{,}6]$ donc elle ne peut pas rejeter l'hypothèse que $p = 0{,}4$ au seuil de 95 %.
2) Non, elle peut juste « ne pas rejeter l'hypothèse », ce qui est différent d'accepter.

4 **1)** $\left[0{,}51 - \frac{1}{\sqrt{1000}}\,;\,0{,}51 + \frac{1}{\sqrt{1000}}\right]$ soit $[0{,}478\,;\,0{,}542]$ arrondi à 10^{-3} près
2) Il ne peut pas être sûr de gagner, au seuil de 95 %, car il pourrait très bien avoir 49 % des voix par exemple, auquel cas, il serait perdant.
3) Pour un sondage sur n personnes, l'intervalle de confiance est $\left[0{,}51 - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;\,0{,}51 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$, il s'agit donc de résoudre
$0{,}51 - \frac{1}{\sqrt{n}} > 0{,}50 \Leftrightarrow 0{,}01 > \frac{1}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow 100 < \sqrt{n}$
$\Leftrightarrow n > 10\,000$ autrement dit, il faudrait sonder 10 001 personnes ou plus.

S'entraîner

1 $[0{,}402\,;\,0{,}598]$

2 $[0{,}189\,68\,;\,0{,}210\,32]$

3 **1)** X suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}1$.
2) 0,03
3) $[0{,}1 - 1{,}96 \times 0{,}03\,;\,0{,}1 - 1{,}96 \times 0{,}03]$ soit $[0{,}041\,2\,;\,0{,}158\,8]$
4) $f = \frac{6}{100} = 0{,}06 \in [0{,}041\,2\,;\,0{,}158\,8]$ donc on ne peut pas rejeter l'hypothèse de départ.

4 $[0{,}322\,;\,0{,}342]$

5 **1)** Il s'agit de résoudre
$\frac{1}{\sqrt{n}} = 0{,}01 \Leftrightarrow \sqrt{n} = 100 \Leftrightarrow n = 10\,000$: il faut sonder 10 000 personnes.
2) Il s'agit de résoudre
$\frac{1}{\sqrt{n}} = 0{,}001 \Leftrightarrow \sqrt{n} = 1000 \Leftrightarrow n = 1\,000\,000$: il faut sonder 1 000 000 personnes.

6 **1)** $\left[0{,}5 - 1{,}96 \times \frac{\sqrt{0{,}5^2}}{\sqrt{100}}\,;\,0{,}5 + 1{,}96 \times \frac{\sqrt{0{,}5^2}}{\sqrt{100}}\right]$
$= \left[0{,}5 - 1{,}96 \times \frac{0{,}5}{10}\,;\,0{,}5 + 1{,}96 \times \frac{0{,}5}{10}\right]$
$= [0{,}5 - 0{,}098\,;\,0{,}5 + 0{,}098] = [0{,}402\,;\,0{,}598]$
2) $[0{,}490\,2\,;\,0{,}509\,8]$
3) Pour $p = 0{,}5$, l'amplitude de l'intervalle de fluctuation asymptotique est
$2 \times 1{,}96 \times \frac{\sqrt{0{,}5^2}}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \times \frac{1}{\sqrt{n}}$: il s'agit donc de résoudre
$1{,}96 \times \frac{1}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \times 10^{-3} \Leftrightarrow \sqrt{n} = 10^3 \Leftrightarrow n = 10^6$.
Il faut donc faire un million de lancers.

17 **1)** X suit la loi binomiale de paramètres $n = 598$ et $p = 0{,}04$.
2) Les conditions d'utilisation sont réunies :
$\left[0{,}04 - 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}04 \times 0{,}96}}{\sqrt{598}}\,;\,0{,}04 - 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}04 \times 0{,}96}}{\sqrt{598}}\right]$
soit $[0{,}024\,;\,0{,}056]$ à 10^{-3} près.
3) $f = \frac{19}{598} \approx 0{,}032$ donc f est dans l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %. Le producteur n'a pas fait mieux que l'an dernier.

30 **1)** $f = \frac{135}{400} = 0{,}337\,5$
2) Non, la fréquence peut fluctuer suivant l'échantillon.
3) Les conditions d'utilisation sont réunies : un intervalle de confiance au niveau (ou seuil) de 95 % est $\left[0{,}337\,5 - \frac{1}{\sqrt{400}}\,;\,0{,}337\,5 - \frac{1}{\sqrt{400}}\right]$ soit $[0{,}287\,5\,;\,0{,}387\,5]$, c'est-à-dire entre 28,75 % et 38,75 %.

Auto-évaluation QCM

48 b	**49** a	**50** a
51 d	**52** a	**53** a
54 d	**55** b	**56** a
57 c	**58** b c	**59** d
60 b		

LEXIQUE

Suivi éditorial : Dominique Decobecq
Coordination éditoriale : Adrien Fuchs
Écriture de la maquette en LaTeX : Jean-Côme Charpentier et Sébastien Mengin
Mise en page du manuel en LaTeX : Sébastien Mengin (Édilibre)
Couverture : Maro Haas (MH Design)
Maquette Intérieure : Nicolas Balbo
Concepteurs/Techniciens des interfaces de Sésamath : Thomas Crespin et Daniel Caillibaud

Crédits photographiques
p. 50 (haut) : © School of Mathematics and Statistics, University of St Andrews, Scotland/ Wikimediacommons.
p. 50 (bas) : anonyme/Wikimediacommons
p. 114 © Neil, E, « The everyday cook and recipe book » (1891)/ Wikimediacommons
p. 133 © Bev Sykes from Davis, CA, États-Unis/Wikimediacommons
p. 143 © Inocybefr. Rhinocéros à grande corne (Grotte Chauvet/Vallon-Pont-d'Arc)/ Wikimediacommons
p. 148 John Napier/ Wikimediacommons
p. 164 © OpenStax College et adaptation française/Wikimediacommons
p. 165 © H. Zell/Wikimediacommons
p. 166 © Mattosaurus/Wikimediacommons
p. 330 © Wikimediacommons