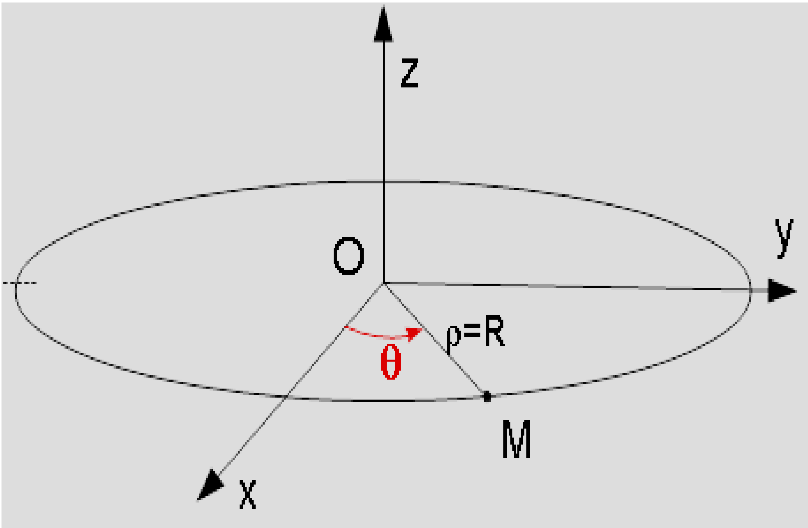
Mouvements circulaires

1. Définition

La trajectoire du point **M** est un cercle de centre **O** et de rayon de courbure ρ **=R** constant.

2. Équations du mouvement relatives à un repère Oxyz



On choisira l'origine O du repère au centre du cercle . L'axe **Oz** étant perpendiculaire au plan contenant la trajectoire, c'est l'axe de rotation .

Le système de coordonnées polaires est le mieux adapté pour ce type de mouvement. Les équations horaires peuvent s'écrire :

ρ **=R = constante** et $\theta = \theta$ **(t)** .

La forme de la fonction **θ(t)** qualifiera le type de mouvement circulaire.

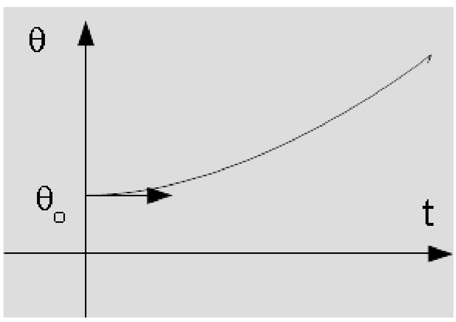
Les équations ont une forme analogue aux équations d'un mouvement rectiligne . La variable x(t) étant remplacée par **θ(t)** .

Suivant la forme de la fonction **θ(t)** le mouvement sera dit circulaire et :

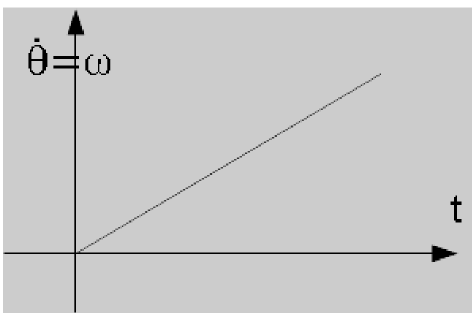
- Uniforme ,si $\theta(t)=\omega_o t+\theta_o$ avec $\dot{\theta}=\omega_o$ = constante
- Uniformément varié (accéléré ou décéléré) si $\ddot{\theta}=\ddot{\theta}_o$ = constante soit : $\dot{\theta}=\omega=\ddot{\theta}_o . t+\dot{\theta}_o$

  et $\theta(t)=\frac{1}{2}\ddot{\theta}_o . t^2+\dot{\theta}_o . t+\theta_o$
- Sinusoïdale ,si $\theta(t)=\theta_{m.}\cos(\omega t+\varphi)$

courbes obtenues pour un mouvement circulaire uniformément accéléré



abscisse curviligne

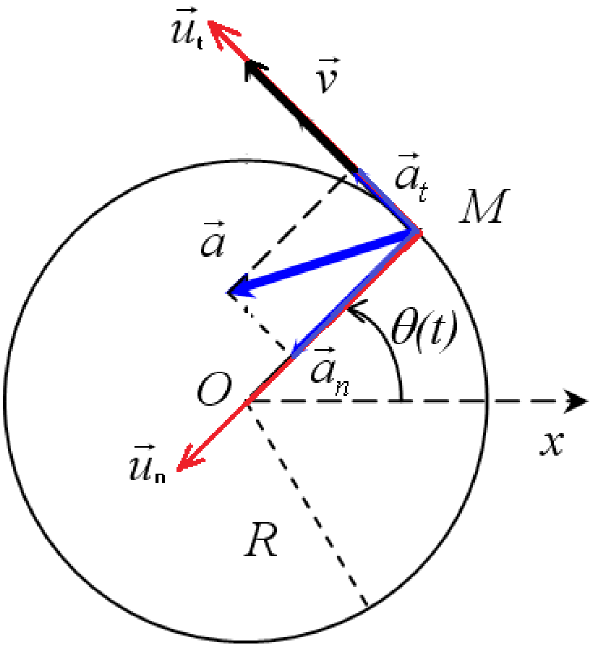


vitesse angulaire

accélération angulaire

3. Expression des grandeurs cinématiques: vecteurs position, vitesse et accélération .

Il est commode de représenter ces grandeurs dans un repère mobile se déplaçant avec le point M dont l'un des axes est tangent à la trajectoire circulaire et l'autre perpendiculaire au premier orienté vers le centre O (axe centripète) Ce repère $M, \vec{u}_T, \vec{u}_N$ est appelé **repère de Frénet**



Vecteur position : $\vec{OM}(t) = -R.\vec{u}_N$

Vecteur vitesse : $\vec{V}_M = \frac{d\vec{OM}}{dt} = -R.\frac{d\vec{u}_N}{dt}$

or : $\frac{d\vec{u}_N}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}.\vec{u}_T$ (formule de dérivation du vecteur unitaire mobile : voir annexe pour l'explication)

$$\vec{V}_M = \frac{d\vec{OM}}{dt} = +R.\frac{d\theta}{dt}.\vec{u}_T = R.\omega.\vec{u}_T$$

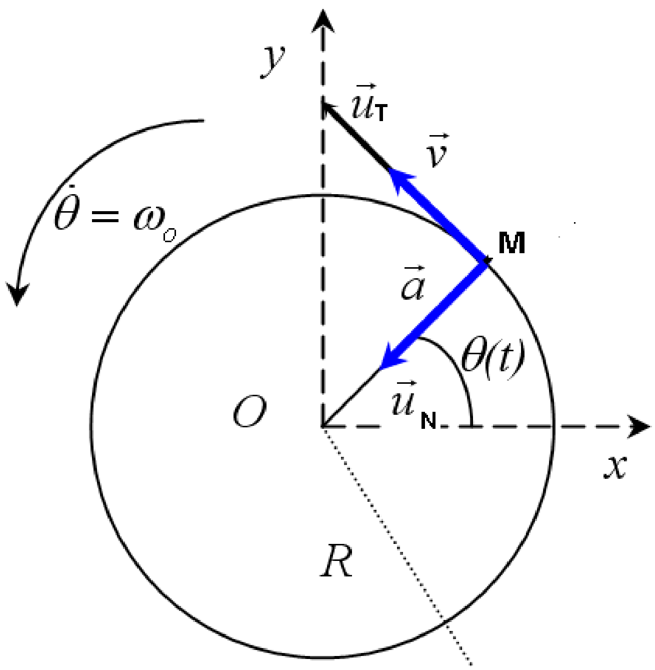
Vecteur accélération :

$$\vec{a}_M = \frac{d\vec{V}_M}{dt} = R.\frac{d\omega}{dt}\vec{u}_T + R.\omega.\frac{d\vec{u}_T}{dt}$$ or,

$\frac{d\vec{u}_T}{dt} = +\frac{d\theta}{dt}.\vec{u}_N$ (autre formule de dérivation du vecteur unitaire : voir annexe pour l'explication)

$$\vec{a}_M = R.\frac{d\omega}{dt}\vec{u}_T + R.\omega^2.\vec{u}_N = \frac{dv}{dt}.\vec{u}_T + \frac{v^2}{R}\vec{u}_N = \vec{a}_T + \vec{a}_N$$

Dans le cas d'un mouvement **accéléré**, la quantité dv/dt est positive, la projection du vecteur accélération a_T sur la tangente aura même sens que le vecteur vitesse. Le sens contraire si le mouvement est **décéléré**. La projection a_N sur la normale est toujours orientée vers le centre du cercle : **elle est centripète**.



Cas particulier: **mouvement circulaire et uniforme**

Si la projection tangentielle a_T =dv/dt =0, la vitesse est constante en valeur, le mouvement est circulaire et uniforme. Dans ce cas l'accélération est donc normale à chaque instant .

$$\vec{V}_M = \frac{d\vec{OM}}{dt} = +R.\frac{d\theta}{dt}.\vec{u}_T = R.\omega_o.\vec{u}_T$$

$$\vec{a}_M = +R.\omega_o^2.\vec{u}_N = \frac{+v_o^2}{R}\vec{u}_N = \vec{a}_N$$

$\theta(t) = \omega_o t + \theta_o$ avec $\dot{\theta} = \omega_o$ = constante

Le mouvement circulaire *uniforme* est un mouvement accéléré dont l'accélération est centripète. Attention : u*niforme* ne veut donc pas dire *accélération nulle*.

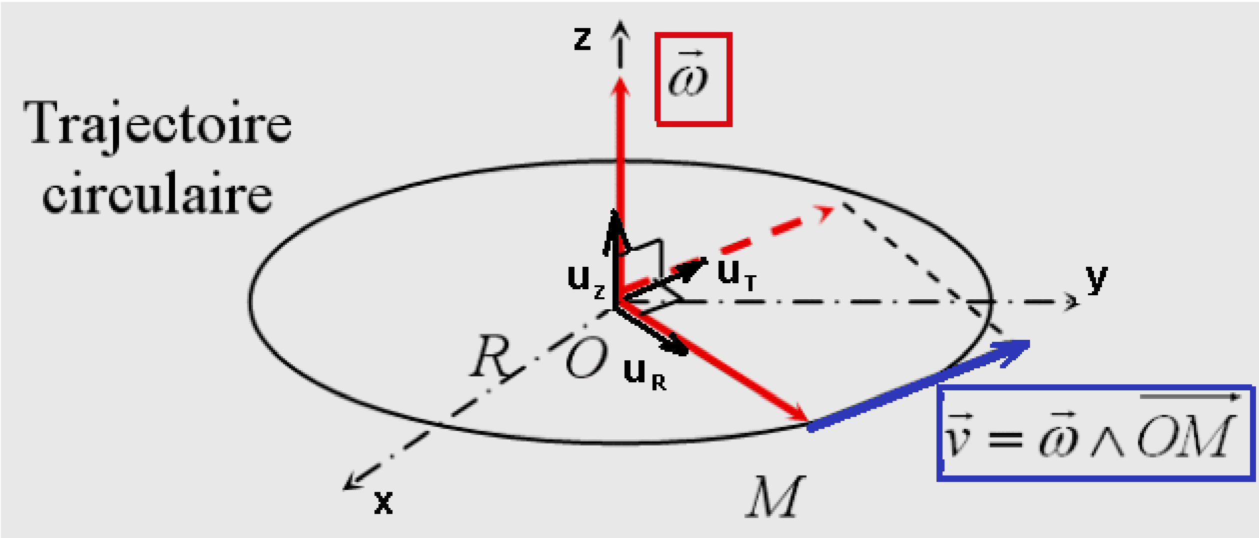
4. Autres formules générales utilisant le produit vectoriel:

4.1 Expression du vecteur vitesse angulaire

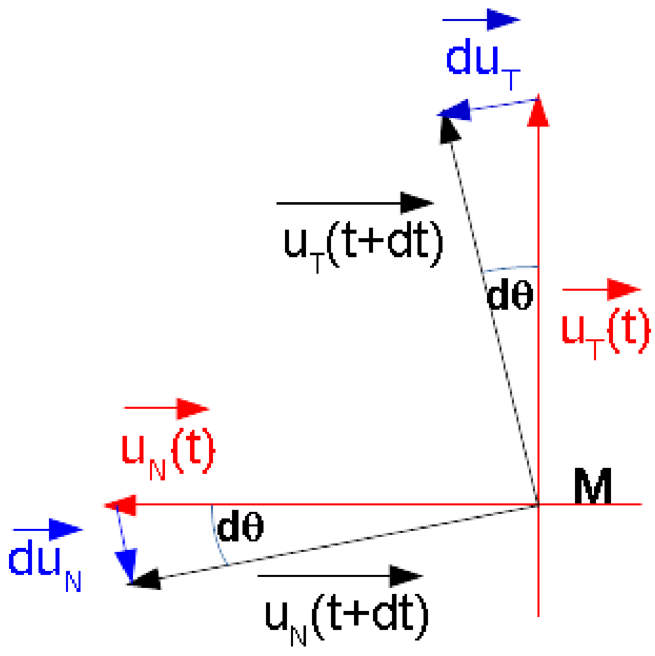
$$\vec{\omega}=\omega.\vec{u}_z$$

4.2 Expression du vecteur vitesse

$$\vec{V}=R.\omega.\vec{u}_T=R.\omega.(\vec{u}_Z\wedge\vec{u}_R)=\omega\vec{u}_Z\wedge R.\vec{u}_R=\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM}$$



5. Annexe: méthode de dérivation des vecteurs unitaires mobiles



Lorsque le point M se déplace d'une valeur infinitésimale sur le cercle, le repère de Frénet tourne autour de M d'un angle dθ.

L'extrémité du vecteur $\vec{u}_T$ de déplace de $\overrightarrow{du_t}$:

$$\|\overrightarrow{du_t}\|=\|\vec{u}_T\|\times d\theta=1.d\theta$$

$\overrightarrow{du_t}$ a la direction et le sens de $\vec{u}_N$, soit :

$$\overrightarrow{du_t}=1.d\theta.\vec{u}_N \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{\overrightarrow{du_t}}{dt}=\dot{\theta}.\vec{u}_N}$$

De même :

$$\|\overrightarrow{du_N}\|=\|\vec{u}_N\|\times d\theta=1.d\theta$$

$\overrightarrow{du_N}$ a la direction et le sens contraire de $\vec{u}_T$

$$\overrightarrow{du_N}=-1.d\theta.\vec{u}_T \quad \boxed{\frac{\overrightarrow{du_N}}{dt}=-\dot{\theta}.\vec{u}_T}$$