Série A – session 2005 : problème – corrigé

1) a) Calcul de limites

Nous avons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (4x^2e^{2x}) = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2e^{2x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} 4xe^{2x} = +\infty$$

b) Interprétation graphique

La courbe (C) de f admet une branche infinie parallèle à Oy

c) Calcul de la limite de f en -∞

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \left(2xe^x\right)^2 = 0^2 = 0$$

(C) admet une asymptote horizontale d'équation d'équation y = 0

2) a) Dérivée f '(x)

Posons $u = x^2$ et $v = e^{2x}$

On a $u' = 2x$ et $v' = 2\,e^{2x}$

Alors $f(x) = 4\,u(x).v(x)$

Et $f'(x) = 4\,(u'v + u\,v') = 4\,(2x\,e^{2x} + x^2\,(2\,e^{2x}))$

$f'(x) = 8x\,(x+1)e^{2x}$

Signe de f '(x)

e^{2x} étant positif pour tout x, le signe de f '(x) est celui de 8x (x+1)

x	-∞		-1		0		+∞
8x		-		-	0	+	
x + 1		-	0	+		+	
f '(x)		+	0	-	0	+	

b) Tableau de valeurs

$f(-1) = 4(-1)^2\,e^{-2} = 4\,e^{-2} \approx 0{,}64$

$f(-\frac{1}{2}) = 4(-\frac{1}{2})^2\,e^{-1} = e^{-1} \approx 0{,}40$

$f(0) = 4.0.e^0 = 0$

$f(\frac{1}{2}) = 4(\frac{1}{2})^2\,e^1 = e^1 \approx 2{,}70$

X	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
f(x)	$4\,e^{-2}$	e^{-1}	0	e

c) Tableau de variation

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3) a) Equation de la tangente à (*C*) en $x_0 = 1/2$

L'équation est de la forme $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

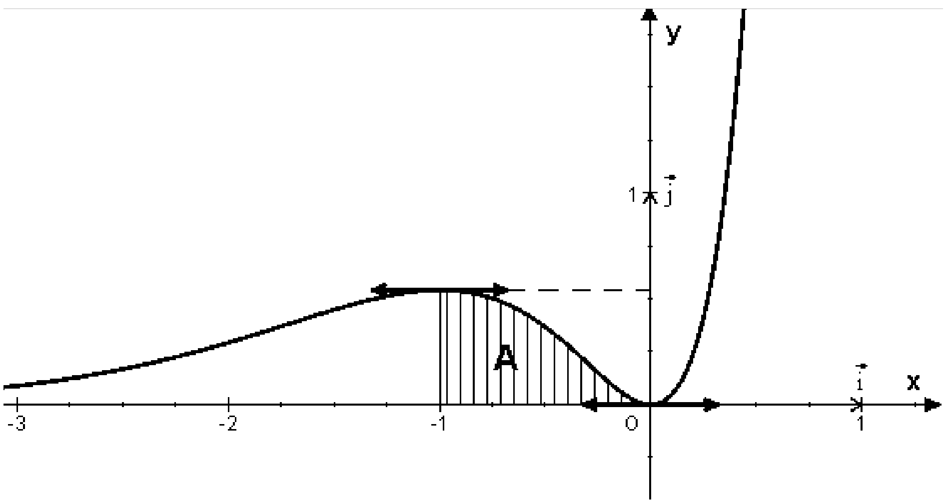
On a $f(1/2) = e$

et $f'(\frac{1}{2}) = 8\,\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)\,e^{2\frac{1}{2}} = 6\,e$

d'où $y = 6\,e\,(x - \frac{1}{2}) + e$ i.e $y = 6\,e\,x - 2\,e$

b) Courbe représentative de f

L'unité graphique est de 4 cm.



4) a) Calcul de F'(x)

Posons $u = 2x^2 - 2x + 1$, $v = e^{2x}$ alors $u' = 4x - 2$, $v = 2\,e^{2x}$

$F'(x) = (uv)' = u'v + uv' = (4x-2)\,e^{2x} + (2x^2 - 2x + 1)(2\,e^{2x})$

d'où $F'(x) = 4x^2e^{2x} = f(x)$

F est donc une primitive de f sur R

b) Calcul d'aire

L'unité d'aire est $\|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| = 4\,\text{cm} \times 4\,\text{cm} = 16\,\text{cm}^2$

L'aire $A = [F(x)]_{-1}^{0} \times 16\,\text{cm}^2$

avec $F(0) = (0 - 0 + 1)e^0 = 1$ et $F(-1) = (2 + 2 + 1)\,e^{-2} = 5\,e^{-2}$

d'où $A = [\,F(0) - F(-1)\,]\,.\,16\ \text{cm}^2$

$A = (\,1 - 5\,e^{-2})\,.\,16\ \text{cm}^2$