Série A – session 2009 : problème – corrigé

Etude de la fonction f est définie par $f(x) = -x + 3 + e^x$.

1 - Calcul de $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

On a $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x+3) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

2 - a) Autre expression de f(x)

En factorisant x, on a $f(x) = x(-1 + \frac{3}{x} + \frac{e^x}{x})$

b) Limite de f en $+\infty$

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} x = (+\infty)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (-1 + \frac{3}{x} + \frac{e^x}{x}) = +\infty$

Par conséquent $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x(-1 + \frac{3}{x} + \frac{e^x}{x}) = +\infty$

d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

c) Equation de la droite asymptote

On a $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

et $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (-x+3)] = \lim\limits_{x \to -\infty} [(-x+3+e^x) - (-x+3)] = \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

La droite Δ d'équation y=-x+3 est une asymptote oblique.

3 - a) Résolution de l'équation $e^x - 1 = 0$

$e^x - 1 = 0$ si $e^x = 1$ ce qui équivaut à $x = \ln 1 = 0$

La solution est x = 0

b) Dérivée de f

On a $f'(x) = (-x + 3 + e^x)' = -1 + e^x$

c) Signe de f '(x)

$f'(x) > 0$ si $-1 + e^x > 0$ i .e. si $x > 0$

et $f'(x) < 0$ si $-1 + e^x < 0$ i .e. si $x < 0$

d'où le tableau de signe de f '(x)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f '(x)		-	0	+	

d) Tableau de variation

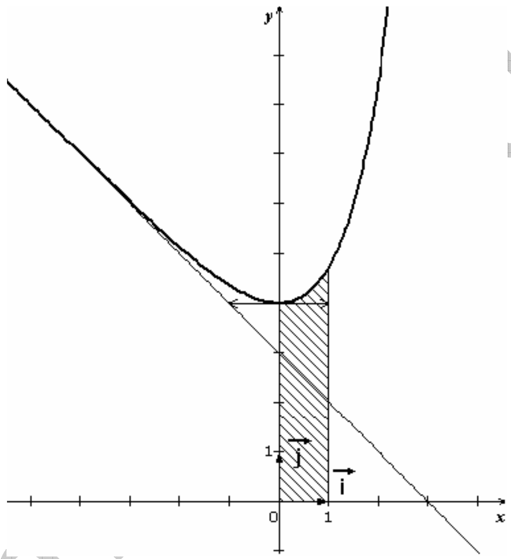
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

On a $\quad f(0) = -0 + 3 + e^0 = 4$

4- a) Equation de la tangente (T) au point d'abscisse $x_0 = 0$

On a $f'(0) = 0$, la tangente (T) est horizontale et d'équation $y = 4$

b) Courbe représentative de f. unité graphique : 1 cm



5– a) Montrons que F est une primitive de f sur R

On a $\quad F'(x) = (-\frac{x^2}{2} + 3x + e^x)' = -x + 3 + e^x$

c'est-à-dire $\quad F'(x) = f(x)$

donc $\quad$ F est une primitive de f sur R

b) Calcul d'aire *A*

L'unité d'aire est $\quad \|\vec{i}\|.\|\vec{j}\| = 1 \times 1 = 1\,\text{cm}^2$

Et l'aire $\quad A = [F(x)]_0^1.\text{cm}^2$

Avec $\quad F(1) = -\frac{1}{2} + 3 + e^1 = \frac{5}{2} + e \quad$ et $\quad F(0) = 0 + 0 + e^0 = 1$

alors $\quad A = [\,F(1) - F(0)\,]\,\text{cm}^2 = \left(\frac{5}{2} + e - 1\right)\text{cm}^2$

D'où $\quad A = (\frac{3}{2} + e)\,\text{cm}^2$.