

Série A - session 2011 : problème - corrigé

1 - Calcul de $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - 2) = -2$. Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$.

Interprétation géométrique : la courbe (C) admet une asymptote horizontale d'équation $y = -3$ en $-\infty$.

2 - a) Calcul de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 2) = +\infty$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

b) Interprétation graphique de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$,

La courbe (C) admet une branche infinie parabolique de direction asymptotique $(y'Oy)$ en $+\infty$.

3 - Le point d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses est le point A (x, y) tel que $f(x) = 0$.

$$f(x) = 0 \text{ si et seulement si } e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$$

Posons $e^x = X$. L'équation précédente équivaut à

$$\begin{cases} X^2 - 2X - 3 = 0 \\ e^x = X \end{cases}$$

Les racines de $X^2 - 2X - 3 = 0$ sont $X = -1$ ou $X = 3$

Alors $e^x = -1$ ou $e^x = 3$

$e^x = -1$ ne donne aucune solution et $e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3$
donc $A(\ln 3; 0)$

4 - Sens de variation et tableau de variation de f

- Dérivée de f

$$\begin{aligned} \text{On a } f'(x) &= e^x(e^x - 2) + e^x(e^x - 0) - 0 \\ &= e^x e^x - 2e^x + e^x e^x \end{aligned}$$

$$f'(x) = 2e^x(e^x - 1)$$

$$f'(x) = 0 \text{ si et seulement si } e^x = 1 \text{ c'est-à-dire } x = 0.$$

- Sens de variation de f

Pour $x < 0$, f est décroissante

Pour $x > 0$, f est croissante

- Tableau de variation de f

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$2e^x$	+	+	
$e^x - 1$	-	0	+
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	-3		$+\infty$

↙ ↘
-4

5 - Equation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $x_0 = \ln 3$

On a $f'(\ln 3) = 12$ et $f(\ln 3) = 0$

Donc l'équation de la tangente (T) est $y = 12x - 12\ln 3$

6 - Point d'inflexion

On vérifie que $f''(x) = 2e^x(2e^x - 1)$

et $f''(x) = 0$ lorsque $2e^x - 1 = 0$

C'est-à-dire pour $x = -\ln 2$

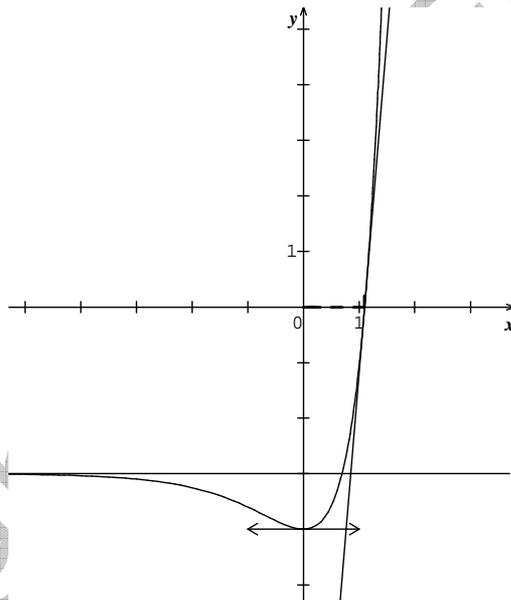
D'où le tableau de signe de $f''(x)$

x	$-\infty$	$-\ln 2$	$+\infty$
$2e^x$	+	+	+
$2e^x - 1$	-	0	+
$f''(x)$	-	0	+

On a $f(-\ln 2) = -\frac{15}{4}$

f'' s'annule et change de signe en $-\ln 2$, donc le point $I(-\ln 2, -\frac{15}{4})$ est un point d'inflexion.

7.- Traçage de (T) et de (C). Unité graphique 1 cm



Pour A2 seulement :

8.- a) Dérivée de F

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{2} 2e^{2x} - 2e^x - 3 \\ &= e^{2x} - 2e^x - 3 \end{aligned}$$

On a $F'(x) = f(x)$ donc F est une primitive de f

b) Calcul d'aire

Unités d'aire : 1 cm^2 .

On a $A = |F(\ln 3) - F(0)| \text{ cm}^2$

D'où $A = 3,3 \text{ cm}^2$.