Série A – session 2013 : problème – corrigé

1.- a) $f(x)=\dfrac{4.e^x}{e^x+1}=\dfrac{4(e^x+1-1)}{e^x+1}$

$$=4\left(\frac{e^x+1)}{e^x+1}-\frac{1}{e^x+1}\right)$$

$$f(x)=4\left(1-\frac{1}{e^x+1}\right)$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 4\left(1-\dfrac{1}{e^x+1}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x+1)=+\infty \; donc \; \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x+1}=0$

Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=4$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=4$: la droite d'équation y = 4 est une asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$.

2.- a) $f=\dfrac{u}{v}$ $avec\; u(x)=4e^x \; et \; v(x)=e^x+1.$

$u'(x)=4e^x \; et \; v'(x)=e^x$

$f'=\dfrac{u'.v-u.v'}{v^2}$

$$f'(x)=\frac{4e^x(e^x+1)-4e^x.e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$=\frac{4e^x.e^x+4e^x.1-4e^x.e^x}{(e^x+1)^2}$$

Ainsi $f(x)=\dfrac{4.e^x}{(e^x+1)^2}$.

b) $4e^x>0 \; et \; (e^x+1)^2>0 \; donc \; f'(x)>0$. Alors f est strictement croissante.

$$f(0)=\frac{4e^0}{e^0+1}=\frac{4}{1+1}=2$$

Tableau de variation :

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
f '(x)	+
f(x)	$\nearrow$ **4**

3.- a) $f(0)=\dfrac{4e^0}{e^0+1}=\dfrac{4}{1+1}=2$

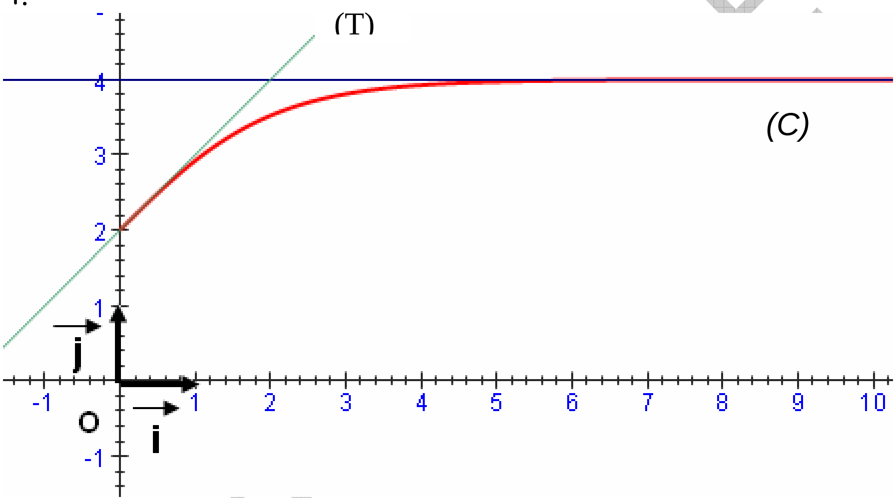
$f(1)=\dfrac{4e}{e+1}=2{,}91$

$f(2)=\dfrac{4e^2}{e^2+1}=3{,}52$

b) L'équation de la droite (T) est y = f '(0)(x-0) + f(0).

Comme f(0)= 2 et $f'(0)=\dfrac{4e^0}{e^0+1}=2$, l'équation de (T) est y = x + 2.

4.-



5.- a) $F(x)=4\ln(e^x+1)$. F est de la forme 4 ln u, avec $u(x)=e^x+1$

La dérivée de lnu est $\dfrac{u'}{u}$,

Comme $u'(x)=e^x$, $F'(x)=4.\dfrac{e^x}{e^x+1}=f(x)$. Alors F est une primitive de f.

b) L'aire du domaine délimité par la courbe de f, l'axe des abscisses et les courbes d'équations x = 0 et x = 2 est, en cm^2 , *A* = |F(2)-F(0)|.

$F(2)=4\ln(e^2+1)=8{,}46$

$F(0)=4.\ln(e^0+1)=2{,}77$

A = 5,68 cm^2

Pour A_2 seulement :

6) $G(x)=\dfrac{4e^x}{e^x+1}$

$$G(-x)=\frac{4e^{-x}}{e^{-x}+1}=\frac{4\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x}+1}=\frac{4\frac{1}{e^x}}{\frac{1+e^x}{e^x}}$$

$$G(-x)=\frac{4}{e^x+1}$$

On a alors $G(-x)+G(x)=\dfrac{4}{1+e^x}+\dfrac{4e^x}{e^x+1}=\dfrac{4(1+e^x)}{1+e^x}=4$

$G(-x)+G(x)=G(0-x)+G(0+x)=2.2$ donc le point I(0,2) est centre de symétrie pour la courbe $(\mathcal{C})$.

b) *Courbe* :