Série D - session 2003 : problème - corrigé

Soit f la fonction définie par $\mathbf{f(x)=1-\frac{1}{2}x-\frac{\ln x}{x}}$

1.- *Calcul de f'(x)et de f''(x)*

- $$f'(x)=0-\frac{1}{2}-\frac{\frac{1}{x}x-1.\ln x}{x^2}$$
  $$f'(x)=\frac{2\ln x-x^2-2}{2x^2}$$

- $$f''(x)=\frac{(\frac{1}{x}-2x)x^2-2x(2\ln x-x^2-2)}{2x^4}$$
  $$f''(x)=\frac{-2\ln x+3}{x^3}$$

2.a) *Variations de f '*

- $D_f'=\{x/x>0 \text{ et } x\neq 0\}$donc $D_f=]0;+\infty[$
- $$\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\ln x-x^2-2}{2x^2}$$
  $$\lim_{x\to 0^+} 2\ln x-x^2-2=-\infty \text{ et } \lim_{x\to 0} 2x^2=0^+$$
  donc $\lim_{x\to 0^+} f'(x)=-\infty$
- $$\lim_{x\to+\infty} f'(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{x^2}$$
  $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=0$ $\lim_{x\to+\infty}-\frac{1}{2}-\frac{1}{x^2}=-\frac{1}{2}$ donc $\lim_{x\to+\infty} f'(x)=-\frac{1}{2}$
- *Tableau de variations*

x	0		$e^{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
f''(x)	‖	+	0	−	
f ' (x)	‖ $-\infty$	↗	$\frac{1-e^3}{2e^3}$	↘	$\frac{1}{2}$

- f ''(x)=0 si et seulement si $x=e^{\frac{3}{2}}$

La valeur maximale de f '(x) est $\frac{1-e^3}{2e^3}$ qui est négative

Donc f '(x) <0 qule que soit x >0

3. *Variations de f*

- $D_f = \{x / x > 0 \text{ et } x \neq 0\}$ donc $D_f =]0;+\infty[$
- $\lim_{x\to 0^+} (-\ln x) = +\infty$ et $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

  Donc $\lim_{x\to 0^+} -\ln x.\frac{1}{x} = +\infty$

  Comme $\lim_{x\to 0} 1-\frac{1}{2}x = 1$, $\lim_{x\to 0^+} (1-\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}) = +\infty$

  Ansi $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, $\lim_{x\to +\infty} (1-\frac{1}{2}x) = -\infty$ donc $\lim_{x\to +\infty} (1-\frac{1}{2}x-\frac{\ln x}{x}) = -\infty$

  Ainsi $\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$

D'après le résultat précédent, f '(x) <0 quel que soit x > 0, donc f est strictement décoissante sue D_f.

Tableau de variation

x	0		$+\infty$
f '(x)	‖	$-$	
f(x)	‖ $+\infty$	↘	$-\infty$

4.- $\lim_{x\to +\infty} (f(x)-(-\frac{1}{2}x+1)) = \lim_{x\to +\infty} -\frac{\ln x}{x} = 0$

Donc la droite d'équaiton $y = -\frac{1}{2}x+1$ est une asymptote à la courbe de f en $+\infty$.

Etudions le signe de $f(x)-(-\frac{1}{2}x+1) = -\frac{\ln x}{x}$

x	0		1		$+\infty$
-lnx	‖	+	0	$-$	
x	0	+		+	
$-\frac{\ln x}{x}$	‖	+	0	-	

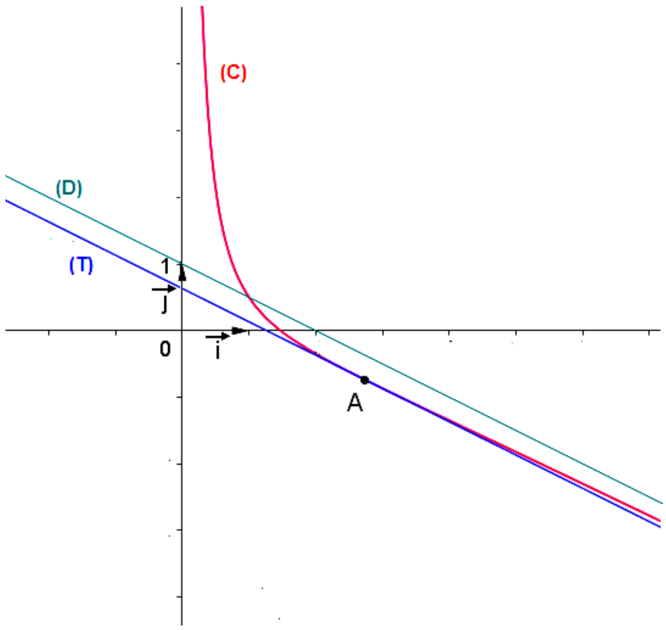
- $f(x)-(-\frac{1}{2}x+1)>0$ si $x\in\left]0\,;1\right[$ donc la courbe est au dessus de la droite sur cet intervalle
- $f(x)-(-\frac{1}{2}x+1)<0$ si x >1, donc la courbe est en dessous de la droite sur $\left]1;+\infty\right[$
- La courbe et la droite se coupe en x = 1.

5.- La tangente en A est parallèle à (D) si elle a le même coefficient directeur que (D) , donc si $f'(x_A)=-\frac{1}{2}$.

Puisque $f'(x)=\frac{2\ln x-x^2-2}{2x^2}$, $f'(x)=-\frac{1}{2}$ si et seulement si $\frac{2\ln x-x^2-2}{2x^2}=-\frac{1}{2}$,

Ou $\frac{2\ln x-2}{2x^2}=0$. Ou encore $x_A = e$

C'est donc la tangente en x = e qui est parallèle à la droite (D).



7.- L'aire du domaine plan, limité par la corube, la droite (D), et les droites d'équations x = 1 et x = e est donné par $A=\left|\int_1^e (f(x)-(-\frac{1}{2}x+1))dx\right|.1cm^2$

$$\left|\int_1^e (f(x)-(-\frac{1}{2}x+1))dx\right| = \left|\int_1^e -\frac{\ln x}{x}dx\right|$$

$$= \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e$$

d'où $A = 0,5\,cm^2$

8.- On considère la fonction g définie sur $[3;+\infty[$ par $g(x) = -\frac{1}{2}x + 1 - f(x)$

$$g(x) = \frac{\ln x}{x}$$

a) g est le quotient de deux fonctions dérivables, donc dérivable

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - 1.\ln x}{x^2}$$

$$g'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

Pour $x \geq 3$, $\ln x \geq \ln 3 > 1$. Et $x^2 \geq 3 > 0$ et **1-lnx < 0. Ainsi** $\frac{1-\ln x}{x^2} < 0$

Par conséquent, g est décroissante sur $[3;+\infty[$

b) g est décroissante sur $[3;+\infty[$ donc si $n \leq x \leq n+1$, $g(n+1) \leq g(x) \leq g(n)$

Comme ln(n+1) >0 et (n+1)> 0 si x > 3, on a $g(n+1) = \frac{\ln(n+1)}{n+1} > 0$.

Ainsi $0 < g(x) \leq g(n)$.

c) On pose $U_n = \int_n^{n+1} g(x)dx$ **pour tout** $n \geq 3$

Comme $0 < g(x) \leq g(n)$, on a $0 < \int_n^{n+1} g(x)dx \leq \int_n^{n+1} g(n)dx$

$$\int_n^{n+1} g(n)dx = \int_n^{n+1} \frac{\ln n}{n}dx$$

Puisque la variable d'intégration est x, $\frac{\ln n}{n}$ est constante, donc

$$\int_n^{n+1} g(n)dx = \frac{\ln n}{n}\int_n^{n+1} 1\,dx$$

$$= \frac{\ln n}{n}(n+1-n)$$

$$\int_n^{n+1} g(n)dx = \frac{\ln n}{n}$$

Ainsi $0 < U_n \leq \frac{\ln n}{n}$.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n}=0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n)=0$