Série D - session 2009 : problème – corrigé

1- Ensemble de définition de f

Comme $x \to x\,(1 - \ln x)^2$ est définie sur $]0\,,+\infty[$ et f est définie en 0 avec $f(0) = 0$, alors l'ensemble de définition de f est $[0\,,+\infty[$.

2- a) Continuité de f en $x_0=0$

On a $\quad f(x) = x(1-\ln x)^2 = x(\ln x)^2\left[\frac{1}{(\ln x)^2} - \frac{2}{\ln x} + 1\right]$

On a $\quad \lim\limits_{x\to 0^+} x(\ln x)^2 = \lim\limits_{x\to 0^+} 4(\sqrt{x}\,\ln\sqrt{x})^2 = 0$

puis $\quad \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{(\ln x)^2} = 0 \quad$ et $\quad \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{2}{\ln x} = 0$

alors $\quad \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$, f est continue à droite de 0

b) Dérivabilité de f en $x_0=0$

On a $\quad \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} (1-\ln x)^2 = +\infty$

f n'est pas dérivable en $x_0=0$

3- a) Dérivée de f

On a $\quad f'(x) = (1-\ln x)^2 + x(-\frac{2}{x})(1-\ln x) = (\ln x - 1)(\ln x + 1)$

b) sens de variation de f

$f'(x)$ s'annule pour $x = \frac{1}{e}$ ou x= e, d'où le signe de $f'(x)$

x	0		$\frac{1}{e}$		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	+	0	-	0	+	

sur $[0,\frac{1}{e}[$, f est croissante

sur $[\frac{1}{e}\,,\,e\,[$, f est décroissante

sur $[e,+\infty[$, f est croissante

Tableau de variation de f

On a $\quad \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} x(1-\ln x)^2 = +\infty$

puis $\quad f(\frac{1}{e}) = \frac{4}{e} \quad$ et $\quad f(e) = 0$

x	0		$\frac{1}{e}$		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert +\infty$	+	0	-	0	+	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4- courbe représentative de f (unité graphique : 1 cm)

5- a) calcul de $I = \int_{\alpha}^{e} f(x)\,dx$

On a $\quad I = \int_{\alpha}^{e} x(1-\ln x)^2\,dx$

On pose $\quad u'(x) = x \quad$ et $\quad v(x) = (1 - \ln x)^2$

alors $\quad u(x) = \frac{x^2}{2} \quad$ et $\quad v'(x) = -\frac{2}{x}(1-\ln x)$

d'où $\quad I = \left[\frac{x^2}{2}(1-\ln x)^2\right]_\alpha^e + \int_\alpha^e x(1-\ln x)\,dx$

Calcul de $\quad J = \int_\alpha^e x(1-\ln x)\,dx$

On pose $\quad u'(x) = x$ et $v(x) = (1 - \ln x)$

alors $\quad u(x) = \frac{x^2}{2}$ et $v'(x) = -\frac{1}{x}$

dans ce cas $\quad J = \left[\frac{x^2}{2}(1-\ln x)\right]_\alpha^e - \int_\alpha^e -\frac{x}{2}\,dx = \left[\frac{x^2}{2}(1-\ln x)\right]_\alpha^e + \left[\frac{x^2}{4}\right]_\alpha^e$

d'où $\quad I = \left[\frac{x^2}{2}(1-\ln x)^2\right]_\alpha^e + J = \left[\frac{x^2}{2}(1-\ln x)^2 + \frac{x^2}{2}(1-\ln x) + \frac{x^2}{4}\right]_\alpha^e$

i.e. $\quad I = \frac{e^2}{4} - \frac{\alpha^2}{2}\left[(\ln\alpha)^2 - 3\ln\alpha + 2\right]$

b) Calcul de l'aire $A(\alpha)$

unité d'aire : 1 cm^2.

L'aire $\quad A(\alpha) = I.cm^2 = \left(\frac{e^2}{4} - \frac{\alpha^2}{2}\left[(\ln\alpha)^2 - 3\ln\alpha + 2\right]\right) \times cm^2$

On a $\quad \lim_{\alpha \to 0^+} A(\alpha) = \lim_{\alpha \to 0^+} \left(\frac{e^2}{4} - \frac{\alpha^2}{2}\left[(\ln\alpha)^2 - 3\ln\alpha + 2\right]\right) \times cm^2$

D'où $\quad \lim_{\alpha \to 0^+} A(\alpha) = \frac{e^2}{4} \times cm^2$

6- a) Existence de la réciproque g^{-1} de g.

La fonction g restriction de f sur $[e,+\infty[$ est continue strictement croissante de $[e,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$;

g admet donc une réciproque définie sur $[0,+\infty[$.

b) Calcul de $g(e^2)$ et de $(g^{-1})'(e^2)$

On a $\quad g(e^2) = f(e^2) = e^2$ (C) passe par le point A($x_0 = e^2$; $y_0 = e^2$)

Alors $\quad (g^{-1})'(y_0) = \frac{1}{g'(x_0)}$ i.e. $(g^{-1})'(e^2) = \frac{1}{g'(e^2)}$

Or $\quad g'(e^2) = g'(e^2) = (\ln e^2 - 1)((\ln e^2 + 1) = 3$

D'où $\quad (g^{-1})'(e^2) = \frac{1}{3}$

7- Les courbes (C) et (Γ) sont symétriques par rapport à la droite d'équation y = x (première bissectrice).