MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
SECRETARIAT GENERAL
DIRECTION GENERALE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR PUBLIC et PRIVE
Service d'Appui au Baccalauréat

BACCALAUREAT DE L'ENSEIGNEMENT GENERAL

SESSION 2015

C

Options : C

Code matière : 009

Epreuve de : MATHEMATIQUES
Durée : 4 heures
Coefficient : 5

✡✡✡✡✡✡✡✡✡✡✡✡✡✡✡✡✡✡✡✡✡✡✡✡✡✡✡✡✡

<u>NB</u> : L'utilisation d'une calculatrice scientifique non programmable est autorisée.
L'exercice et les deux problèmes sont obligatoires.

<u>EXERCICE</u> : (4 points)

I. 1) Résoudre dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, l'équation : $\overline{6}x+\overline{2}=-\overline{3}$ (0,5pt)

2) Soient a et b deux entiers relatifs premiers entre eux.
Démontrer que A = 5a + 3b et B = 8a + 5b sont aussi premiers entre eux. (0,5pt)

3) Soit $x \in I\!N$.
Dans un système de numération à base 13, un entier naturel M s'écrit $M = (\overline{25x3})_{13}$.

a) Justifier que : $M \equiv x+2[4]$ (0,5pt)

b) Pour quelles valeurs de x, M est-il divisible par 4 ? (0,5pt)

II. 1) On lance une fois un dé tétraédrique parfait à quatre faces numérotées 2, 3, 4, 5 et on s'intéresse au numéro de la face cachée.
Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
A : « La face cachée porte un numéro inférieur ou égal à 4 ». (0,5pt)
B : « La somme des numéros des faces visibles est un nombre premier ». (0,5pt)

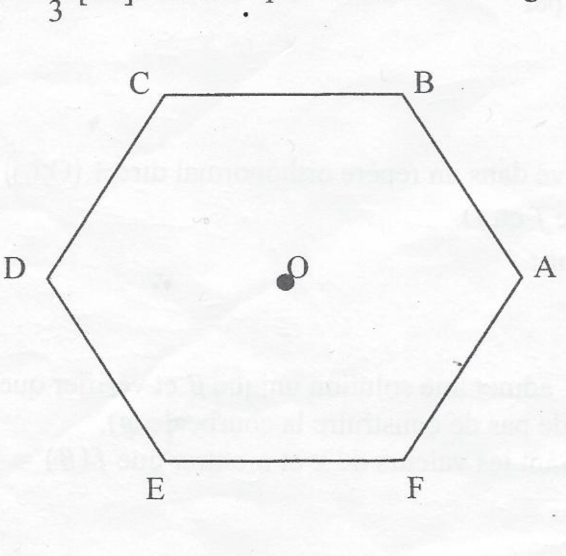
2) On lance maintenant n fois de suite ($n \geq 2$) le dé et on note P_n la probabilité de réaliser au moins une fois l'événement « la face cachée porte un numéro inférieur ou égal à 4 » au cours de ces n lancers.

a) Calculer P_3. (0,5pt)

b) Donner le plus petit entier n pour que $P_n \geq 0{,}99$. (0,5pt)

<u>PROBLEME I</u> (7 points)

ABCDEF est un hexagone régulier de centre O, de côté a > 0 dans un plan orienté (P). Cet hexagone est direct donc : $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AF}) = \frac{2\pi}{3}[2\pi]$. On note par I le milieu du segment [AF].



/...

PARTIE A

Soit S un système de trois points pondérés (A ; 1) ; (B ; -1) ; (D ; 1)

1) Déterminer et construire le barycentre G de S. (0,5pt)

2) a) Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M du plan ($\mathcal{P}$) qui vérifient

$MA^2 - MB^2 + MD^2 = a^2$ (0,5pt)

b) Vérifier que (Γ) passe par le centre de l'hexagone. (0,25pt)

PARTIE B

Soit R_O la rotation de centre O, d'angle $\frac{\pi}{3}$ et R_A la rotation de centre A, d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

Dans cette partie, on se propose de caractériser la transformation $f = R_A o R_O$, en utilisant deux méthodes différentes.

1ère méthode

a) Justifier que f est une symétrie centrale. (0,5pt)

b) Déterminer l'image de A par f, puis en déduire le centre de f. (0,75pt)

2ème méthode

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ où $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$.

a) Donner les affixes des points A, F et I milieu de [AF]. (0,75pt)

b) Ecrire les expressions complexes de R_A, R_O et en déduire celle de f. (0,75pt)

c) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f. (0,5pt)

PARTIE C

1) Soit l'application $g = R_O \text{ o } R_O$.

a) Déterminer g(A). (0,25pt)

b) Déterminer l'écriture complexe de g. (0,5pt)

c) En déduire les affixes des points C et E. (0,5pt)

2) Soit $\overline{S}$ la similitude plane indirecte qui transforme O en C et A en E.

Donner l'écriture complexe de $\overline{S}$. (0,5pt)

En déduire les éléments caractéristiques de $\overline{S}$. (0,75pt)

PROBLEME II (9 points)

Les parties A et B sont indépendantes.

PARTIE A

On considère l'équation différentielle :

(E) : $y'' + 2y' - 3y = P(x)$ où P est un polynôme.

1) Trouver le polynôme P pour que la fonction g définie par : $x \longmapsto e^x + x + 1$ soit une solution de (E). (0,25pt)

2) Résoudre l'équation différentielle (E') : $y'' + 2y' - 3y = 0$. (0,25pt)

3) Donner l'ensemble des solutions de (E) que l'on note par h. En déduire la solution de (E) qui satisfait aux conditions $h(O) = 1$ et $h'(O) = 5$. (0,5pt)

PARTIE B

Soit f une fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\ln x}{x+1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On note par ($\mathscr{C}$) sa courbe représentative dans un repère orthonormal direct $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 4 cm.

I- 1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en O. (0,5pt)

2) Soit φ la fonction définie sur $]0 ;+\infty[$ par :

$\varphi(x) = -\ln x - x - 1.$

a) Etudier les variations de φ. (0,25pt)

b) Etablir que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique β et vérifier que : $\beta \in]0{,}27 ; 0{,}28[$. (On ne demande pas de construire la courbe de φ).

En déduire le signe de $\varphi(x)$ suivant les valeurs de x et montrer que $f(\beta) = -\beta$ (1pt)

/...

3) Pour tout $x > 0$, exprimer $f'(x)$ en fonction de $\varphi(x)$ où f' est la dérivée de la fonction f.
En déduire les variations de f. (0,75pt)

4) a) Etudier la position relative de $(\mathscr{C})$ par rapport à la courbe (Γ) de la fonction $x \longmapsto \ln x$ sur $]0 ; +\infty[$. (0,5pt)

b) Construire dans un même repère les courbes $(\mathscr{C})$ et (Γ). (1pt)

On donne $\ln(0,27) = -1,3$; $\ln(0,28) = -1,2$

II- On se propose d'étudier l'équation $f(x) = n$ où n est un entier naturel non nul.

1) Montrer que, pour tout n, cette équation admet une solution unique notée α_n. (0,5pt)

2) a) Etablir que $f(e^n) \leq n$. En déduire que $\alpha_n \geq e^n$. (0,5pt)

b) Prouver que la relation $f(\alpha_n) = n$ peut s'écrire sous la forme $\ln\left(\dfrac{\alpha_n}{e^n}\right) = \dfrac{n}{\alpha_n}$. (1)

En déduire, à l'aide de a), la limite de $\dfrac{\alpha_n}{e^n}$ lorsque n tend vers l'infini. (0,75pt)

3) On écrit α_n sous la forme : $\alpha_n = e^n(1+\varepsilon_n)$ où $\varepsilon_n \geq 0$ (2).
A l'aide de (1), exprimer $(1+\varepsilon_n)\ln(1+\varepsilon_n)$ en fonction de n. (0,25pt)

4) Soient U et V deux fonctions définies sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$U(t) = (1+t)\ln(1+t) - t \quad \text{et} \quad V(t) = (1+t)\ln(1+t) - t - \frac{t^2}{2}.$$

a) Etudier les variations de U et V, puis en déduire que pour tout $t \geq 0$, on a

$$0 \leq (1+t)\ln(1+t) - t \leq \frac{t^2}{2}.$$ (0,75pt)

b) En utilisant 4)a) et 3), en déduire que pour tout $n \geq 1$: $\varepsilon_n \leq n e^{-n} \leq \varepsilon_n + \dfrac{\varepsilon_n^2}{2}$, puis

$$0 \leq n e^{-n} - \varepsilon_n \leq \frac{n^2}{2} e^{-2n}. \quad (3)$$ (0,75pt)

c) A l'aide de (2) et (3), déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} (e^n + n - \alpha_n)$. (0,5pt)

o o o o o o o o o o o o o o o o o o o o o o o o