

CONGRUENCES

1. Définition

Soit $n \in \mathbb{N}$, les entiers relatifs x et y sont congrus modulo n lorsqu'ils ont le même reste dans la division euclidienne par n .

On écrit $x \equiv y \pmod{n}$ ou $x \equiv y \pmod{n}$.

Exemple : $4 \equiv 11 \pmod{7}$ ou $11 \equiv 4 \pmod{7}$.

2. Propriétés

Cette relation \equiv est une relation d'équivalence.

Deux nombres congrus à un troisième sont congrus entre eux.

Soit $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble des entiers congrus modulo n est un ensemble fini à n éléments. On le note

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{ \overset{\cdot}{0}, \overset{\cdot}{1}, \dots, \overset{\cdot}{n-1} \} \text{ v.}$$

Tout entier relatif x est congru au reste de la division euclidienne de x par n . Donc $\overset{\cdot}{x} = \overset{\cdot}{r}$.

Exemples :

$$\mathbb{Z}/1\mathbb{Z} = \{ \overset{\cdot}{0} \}$$

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{ \overset{\cdot}{0}, \overset{\cdot}{1} \}$$

$$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{ \overset{\cdot}{0}, \overset{\cdot}{1}, \overset{\cdot}{2} \}$$

$$\overset{\cdot}{0} = \{ x, x \in \mathbb{Z}, x = 2k, k \in \mathbb{Z} \} \quad \overset{\cdot}{1} = \{ x, x \in \mathbb{Z}, x = 2k+1, k \in \mathbb{Z} \}$$

$$9 \in \overset{\cdot}{0} \quad -8 \in \overset{\cdot}{1} \quad 26 \in \overset{\cdot}{2}.$$

La relation de congruence est compatible à l'addition et la multiplication dans \mathbb{Z} .

On définit dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ une addition $\overset{\cdot}{+}$ et une multiplication $\overset{\cdot}{\times}$ telles que :

$$\overset{\cdot}{x}, \overset{\cdot}{y} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad \overset{\cdot}{x} \overset{\cdot}{+} \overset{\cdot}{y} = \overset{\cdot}{x+y} \quad \text{et} \quad \overset{\cdot}{x} \overset{\cdot}{\times} \overset{\cdot}{y} = \overset{\cdot}{x \times y}$$

3- Exemple

Dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, on a $\overset{\cdot}{4} \overset{\cdot}{+} \overset{\cdot}{3} = \overset{\cdot}{7} = \overset{\cdot}{2}$; $\overset{\cdot}{3} \overset{\cdot}{\times} \overset{\cdot}{2} = \overset{\cdot}{6} = \overset{\cdot}{1}$

Table d'addition et de multiplication dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Compléter les tableaux suivants :

$\overset{\cdot}{+}$	$\overset{\cdot}{0}$	$\overset{\cdot}{1}$	$\overset{\cdot}{2}$
$\overset{\cdot}{0}$			
$\overset{\cdot}{1}$			
$\overset{\cdot}{2}$			

$\overset{\cdot}{\times}$	$\overset{\cdot}{0}$	$\overset{\cdot}{1}$	$\overset{\cdot}{2}$
$\overset{\cdot}{0}$			
$\overset{\cdot}{1}$			
$\overset{\cdot}{2}$			