Série C - session 2007 : problème 2 – corrigé

Partie A : Etude de la fonction f

I – Etude de la fonction la fonction g

1- Variation de g

g est définie par $g(x) = \ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$ sur $[0, +\infty[$

La dérivée de g est : $g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x - x^2 = \frac{-x^3}{1+x}$

pour tout $x \geq 0$, $g'(x) \leq 0$ donc g est décroissante sur $[0, +\infty[$

- signe de g(x)

Comme g est décroissante sur $[0, +\infty[$, alors pour tout $x \geq 0$, $g(x) \leq g(0)$,

Or $g(0) = 0$, d'où $g(x) \leq 0$ sur $[0, +\infty[$

2- Montrons que pour tout $x \geq 0$ on a : $\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \geq 0$

Posons $\varphi(x) = \ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2}$

On a $\varphi'(x) = \frac{x^2}{x+1} \geq 0$

donc φ est croissante sur $[0, +\infty[$

comme $\varphi(0) = 0$, on a : $\ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2} \geq 0$

En combinant $0 \leq \ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2}$ et $g(x) \leq 0$

On a $-\frac{x^2}{2} \leq \ln(x+1) - x \leq -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

En divisant par x^2 (x>0) $-\frac{1}{2} \leq \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \leq -\frac{1}{2} + \frac{x}{3}$

II – 1-a) Continuité de f à droite de 0

On a $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

donc $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 = f(0)$, f est continue à droite de 0

-Dérivabilité de f à droite de 0

On a $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$

D'après I-2) $-\frac{1}{2} \leq \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \leq \lim_{x\to 0^+} (-\frac{1}{2} + \frac{x}{3})$

alors $f'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}$

f est donc dérivable à droite de 0, et $f_d'(0) = -\frac{1}{2}$

b) Tangente en x = 0 : $(T) : y = -\frac{x}{2} + 1$

c) - Variation de h sur [0 , +∞[

la dérivée de h est : $h'(x) = -\ln(x+1)$

- signe de h(x)

On a $h'(x) \leq 0$ sur $[0, +\infty[$

alors h est décroissante sur $[0, +\infty[$

Comme h(0) = 0, on a $h(x) \leq h(0)$, d'où $h(x) \leq 0$

d) Dérivée de f

On a $f'(x) = \dfrac{x-(x+1)\ln(x+1)}{x^2(x+1)} = \dfrac{h(x)}{x^2(x+1)}$ et $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$

Comme $x^2(x+1) \geq 0$, on a $sg[\ f(x)\ ] = sg[\ h(x)\ ]$

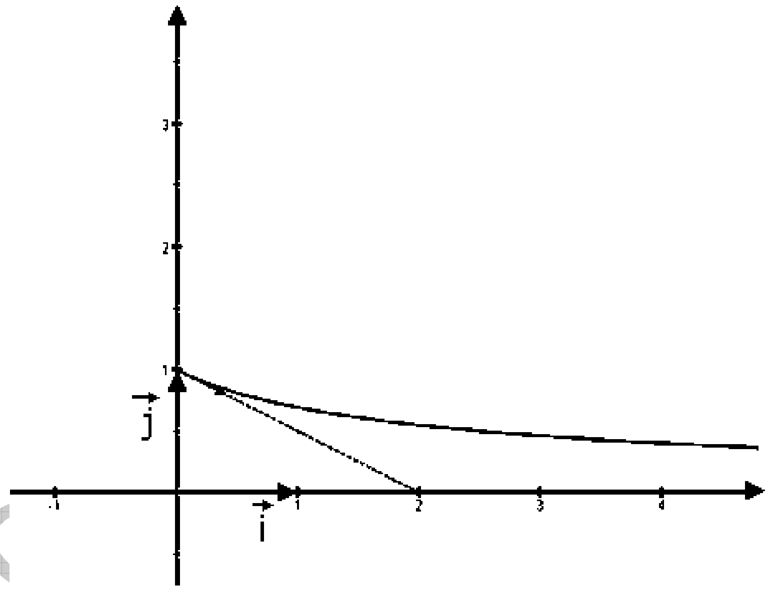
D'où $f'(x) < 0$ sur $[0, +\infty[$

e) Tableau de variation de f

f est décroissant sur $[0, +\infty[$

x	0		$+\infty$
f ' (x)	$-\frac{1}{2}$	-	
f(x)	1	$\searrow$	0

Courbe(C) et tangente (T) Unité graphique 2 cm



2- Encadrement de F(1)

D'après I-2) $-\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{\ln(1+t)-t}{t^2} \leq -\dfrac{1}{2} + \dfrac{t}{3}$

Ce qui implique $-\dfrac{t}{2} + 1 \leq f(t) \leq \dfrac{t^2}{3} - \dfrac{t}{2} + 1$ pour $t \geq 0$

En intégrant, on a $\int_0^x (-\dfrac{t}{2}+1)\,dt \leq \int_0^x f(tx)\,dt \leq \int_0^x (\dfrac{t^2}{3} - \dfrac{t}{2} + 1)\,dt$

Alors $$-\frac{x^2}{4}+x \le F(x) \le \frac{x^3}{9}-\frac{x^2}{4}+x$$

D'où, en prenant x = 1 $$\frac{3}{4} \le F(1) \le \frac{31}{36}$$

Conclusion : L'aire A du domaine plan limitée par (C), l'axe Ox et les droites d'équations x = 0 et x = 1 est $A = F(1) . 4\ cm^2$

et $$3\,cm^2 \le A \le \frac{31}{9}cm^2$$

Partie B : Etude de la suite (U_n)

I - Majoration de | f '(x) |

1- Image par f de l'intervalle I = [0 , 1]

f étant décroissante sur I, on a, pour tout x de I, f(1) ≤ f(x) ≤ f(0) i.e. $\ln 2 \le f(x) \le 1$

d'où $$f(I) \subset [0, 1]$$

2- Montrons que l'équation f(x) = x admet une solution unique $\alpha \in$ I.

Posons $$\Psi(x) = f(x) - x$$

On a $$\Psi'(x) = f'(x) - 1 = \frac{h(x)}{x^2(x+1)} - 1$$

Comme h(x) ≤ 0 (d'après Partie II – 1c), ψ '(x) ≤ 0 sur I. Il s'ensuit que ψ est continue et strictement décroissante sur I.

On a $\psi(0)$ = f(0) – 0 = 1 > 0 et $\psi(1)$ = f(1) – 1 = ln2 -1 < 0

D'après le théorème de la valeur intermédiaire, il existe un unique α de I tel que $\psi(\alpha) = 0$

D'où f(x) = x admet une solution unique $\alpha \in$ I.

3 – Dérivée de $k : x \mapsto x^3 + x^2 + 2x - 2(x+1)\ln(x+1)$

On a $$k'(x) = 3x^2 + 2x - 2\ln(x+1)$$

- variation de k'(x) pour x ≥ 0

La dérivée de k' est $$k''(x) = \frac{6x^2+8x}{x+1}$$

donc pour x ≥ 0, k "(x) ≥ 0, ce qui implique k ' croissante sur [0, +∞ [

- signe de k '(x) et de k(x)

On a, pour x ≥ 0, k '(x) ≥ k '(0) avec k(0)=0. Alors k '(x) ≥ 0 sur [0, +∞ [.

La fonction k est donc croissante sur [0, +∞ [, ce qui implique, k(x) ≥ k(0)

Comme k(0) = 0, on a k (x) ≥ 0 sur [0, +∞ [.

4- Majoration de | f '(x) |

On a $$f'(x) + \frac{1}{2} = \frac{x-(x+1)\ln(x+1)}{x^2(x+1)} + \frac{1}{2}$$

Ou encore $$f'(x) + \frac{1}{2} = \frac{k(x)}{x^2(x+1)}$$

Comme k(x) ≥ 0 sur [0, 1] , on a $f'(x) + \frac{1}{2} \ge 0$

D'où $$-\frac{1}{2} \le f'(x) \le 0$$

On en conclut que, pour tout x de I, $|f'(x)| \le \frac{1}{2}$

II – Etude de la suite (U_n)

1- Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \in I$

On a $U_0 \in I$,

Supposons que $U_n \in I$ et montrons que $U_{n+1} \in I$.

Comme $f(I) \subset [0,1]$, $U_n \in I$ implique $f(U_n) \in I$. Donc $U_{n+1} \in I$.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \in I$

2- Montrons, que pour tout entier naturel n, $|U_{n+1} - \alpha| \le \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$.

f est dérivable sur I et $|f'(x)| \le \frac{1}{2}$, alors pour tous réels a et b de I,

on a : $|f(b) - f(a)| \le \frac{1}{2}|b - a|$

on pose $a = \alpha$ et $b = U_n$

alors $|f(U_n) - f(\alpha)| \le \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$

ce qui implique $|U_{n+1} - \alpha| \le \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$

3- Montrons, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $|U_n - \alpha| \le \frac{1}{2^n}$

Pour n = 0, $U_0 = 0$ et $\alpha \in]0,1[$, alors $|U_0 - \alpha| \le \frac{1}{2^0}$

Supposons que, pour un certain rang n, $|U_n - \alpha| \le \frac{1}{2^n}$.

pour un certain rang n + 1, $|U_{n+1} - \alpha| \le \frac{1}{2}|U_n - \alpha| \le \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n}$

c'est-à-dire $|U_{n+1} - \alpha| \le \frac{1}{2^{n+1}}$, Donc, c'est vrai pour n+1

Conclusion : pour tout entier naturel n, $|U_n - \alpha| \le \frac{1}{2^n}$

4- limite de U_n quand n tend vers $+\infty$

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} |U_n - \alpha| \le \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \alpha$