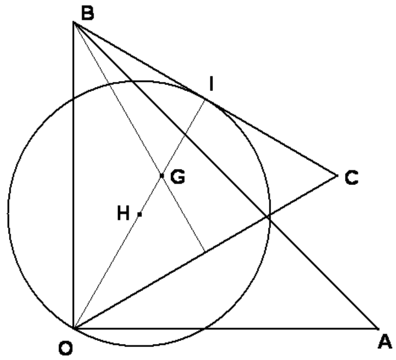
Série C - session 2008 : problème 1 – corrigé

Partie A : Utilisation des propriétés géométriques des transformations

1 - a) Construction



b) Nature de la transformation R = $R_B \circ R_O$.

R est la composée de 2 rotations dont la somme des angles est : $\theta = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$,

R est une rotation d'angle $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

c) Détermination du centre de R

Décomposons R_B et R_O en produit de réflexions

Décomposition de R_O, rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$, en deux réflexions S_{D1} et S_{D2}

Soit $R_O = S_{D2} \circ S_{D1}$ telle que

$$\begin{cases} (D_1) \cap (D_2) = O \\ (D_1, D_2) = \frac{1}{2}\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

Décomposition de R_B, rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$, en deux réflexions S_{D3} et S_{D4}.

Soit $R_B = S_{D4} \circ S_{D3}$ telle que

$$\begin{cases} (D_4) \cap (D_3) = B \\ (D_3, D_4) = \frac{1}{2}\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

Ainsi $R = R_B \circ R_O = S_{D4} \circ S_{D3} \circ S_{D2} \circ S_{D1}$.

On prend $(D_3) = (D_2) = (OB)$ (axe des deux centres de rotation)

Alors (D_1) est une droite passant par O et $(D_1, (OB)) = \frac{\pi}{6}$

On a $(D_1) = (OG)$

Ensuite, (D_4) est une droite passant par B et $((OB), (D_4)) = \frac{\pi}{6}$

On a $(D_4) = (BG)$

D'où $R = R_B \circ R_O = S_{(BG)} \circ S_{(OB)} \circ S_{(OB)} \circ S_{(OG)} = S_{(BG)} \circ S_{(OG)}$.

R est la composée de 2 réflexions, $S_{(BG)}$ et $S_{(OG)}$, d'axes sécants en G.

Donc, R est une rotation de centre G.

2 – a) Construction du pont H, barycentre des points pondérés S = { (O,2) ; (B,1) ; (C,1) }

On a $2\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \vec{0}$

Soit I le milieu de [CB], on a : $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HI}$

Alors $\quad 2\overrightarrow{HO} + 2\overrightarrow{HI} = \vec{0}$; H est le milieu de [OI]

b) ensemble (*C*) des points M : $2\overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{MC}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = 2\overrightarrow{AO}^2$

En introduisant le barycentre H du système S, on a :

$$2\overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{MC}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = 4\overrightarrow{MH}^2 + (2\overrightarrow{HO}^2 + \overrightarrow{HC}^2 + \overrightarrow{HB}^2)$$

Alors $\quad 2\overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{MC}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = 2\overrightarrow{AO}^2$

équivaut à : $\quad \overrightarrow{MH}^2 = \frac{1}{4}[2\overrightarrow{AO}^2 - (2\overrightarrow{HO}^2 + \overrightarrow{HC}^2 + \overrightarrow{HB}^2)]$

Si l'ensemble (*C*) n'est pas vide ou réduit à { H }, alors (*C*) est un cercle de centre H.

On a $OC = OB = OA$ et $OC^2 + OB^2 = 2\,OA^2$, donc $O \in$ (*C*).

Ainsi, (*C*) est le cercle de centre H de rayon HO.

c) Montrons que (*C*) passe par I.

On a $\quad OH = IH$ alors $I \in$ (*C*)

Construction (voir figure)

Partie B. Utilisation des nombres complexes

1 - Affixe des points O, A, B, C, et G.

On a $\quad z_O = 0$; $z_A = 1$; $z_B = i$; $z_C = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$

G est le centre de gravité du triangle équilatéral OCB, on a : $z_G = \frac{1}{3}[z_0 + z_C + z_B] = \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{i}{2}$

2 – a) Une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OA})$ et la valeur du rapport $\frac{OA}{OG}$

On a $\quad \frac{z_A}{z_G} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{i}{2}} = \sqrt{3}\,(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})$

Alors $\quad (\overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OA}) = \arg(\frac{z_A}{z_G}) = \arg[\sqrt{3}\,(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{6})] = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

Le rapport $\quad \frac{OA}{OG} = \left|\frac{z_A}{z_G}\right| = \left|\sqrt{3}\,(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})\right| = \sqrt{3}$

b) Eléments caractéristiques de la similitude plane directe S

On a $\quad S(O) = O$ et $S(G) = A$

Le centre est O

Le rapport $\quad k = \frac{OA}{OG} = \sqrt{3}$

L'angle $\quad \theta = \frac{-\pi}{3} + 2k\pi$

c) Expression complexe de S.

C'est de la forme $\quad z' - z_O = k\,e^{i\theta}\,(z - z_O)$

On a $\quad z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3i}{2}\right) z$