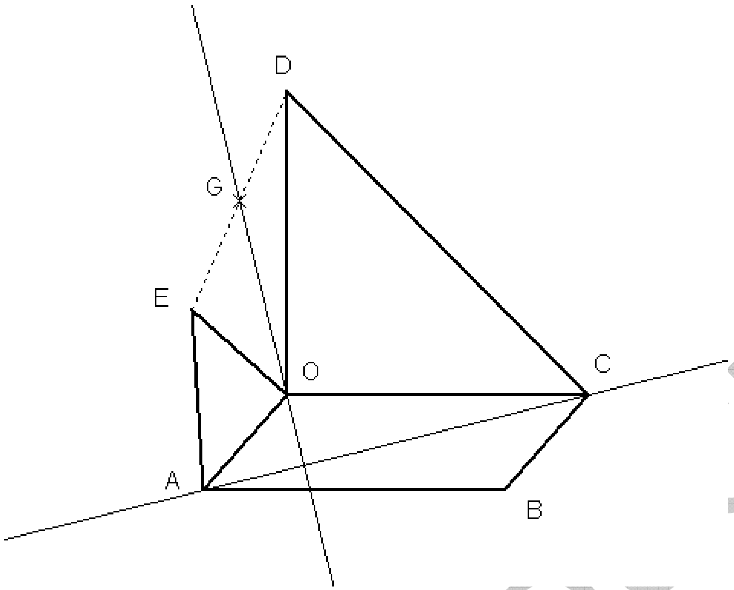
Série C - session 2009 : problème 1 – corrigé

A – Construction



B - Utilisation des nombres complexes

a) Affixes de D et A

Posons $z_C = a$ et $z_E = b$

D est l'image de C par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ alors $z_D = e^{\frac{i\pi}{2}} z_C$ i.e $z_D = ia$.

A est l'image de E par la rotation de $r_{(O,\frac{\pi}{2})}$ alors $z_A = e^{\frac{i\pi}{2}} z_E$ i.e $z_A = ib$.

Remarque : a et b sont des complexes quelconques

b) Affixes des vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{OG}$

On a $Z = z_{\overrightarrow{CA}} = z_A - z_C = ib - a$ d'où $Z = -a + ib$.

G étant le milieu de $[DE]$, alors $z_G = \dfrac{z_D + z_E}{2} = \dfrac{b + ai}{2}$

D'où $Z' = z_{\overrightarrow{OG}} = z_G = \dfrac{b + ai}{2}$; $Z' = \dfrac{1}{2}(b + ai)$

c) Expression de Z' en fonction de Z

On a $Z' = \dfrac{1}{2}(b + ai) = -\dfrac{i}{2}(ib - a)$. D'où $Z' = -\dfrac{i}{2}Z$

d) Démontrons que $\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{OG}$ et que CA = 2 OG

Comparons les arguments et modules de Z et Z'

- Argument : on a $\arg(Z') = \arg(-\dfrac{i}{2}Z) = \arg(-\dfrac{i}{2}) + \arg(Z)$

D'où $\arg(Z') = -\dfrac{\pi}{2} + \arg(Z)$ i.e $\arg(Z') - \arg(Z) = -\dfrac{\pi}{2}$ alors $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{OG}) = \dfrac{\pi}{2}$

- module : on a $|Z'| = \left|-\frac{i}{2}Z\right| = \left|-\frac{i}{2}\right|.|Z|$ d'où $|Z'| = \frac{1}{2}|Z|$ i.e $OG = \frac{1}{2}CA$

On conclusion : $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{OG}$ sont orthogonaux et $CA = 2\,OG$

2. Utilisation des propriétés géométriques des transformations.

a) Nature de $s = r \circ h$

s est la composée d'une homothétie $h = h_{(D\,;\,2)}$ de rapport positif et d'un déplacement r (ici la rotation $r = r_{(0,\frac{\pi}{2})}$),

alors $s = r \circ h$ est une similitude directe de rapport k = 2 et d'angle $\theta = \frac{\pi}{2}$

b) Détermination des images s(G) et s(O) de G et O par s.

• calcul de s(G)

on a $s(G) = r \circ h(G) = r[h(G)]$

- posons G' = h(G), on a : $\overrightarrow{DG'} = 2\overrightarrow{DG}$ (d'après la définition de h) or G est le milieu de [DE], i.e. $\overrightarrow{DE} = 2\,\overrightarrow{DG}$, d'où G' = E . Ainsi $s(G) = r[h(G)] = r(E)$
- Déterminons ensuite r(E).

Soit $E' = r(E)$, on a $((\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OE'}) = \frac{\pi}{2}$ et OE'= OE

Comme (O E A) est isocèle directe, on a OA= OE et $(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OA}) = \frac{\pi}{2}$ d'où E'=A

Alors $s(G) = r(E) = A$ i.e $s(G) = A$

• Calcul de s(O) :

On a $s(O) = r \circ h(O) = r[h(O)]$

- Soit $O' = h(O)$, d'après la définition de h on a $\overrightarrow{DO'} = 2\overrightarrow{DO}$

Donc O est le milieu de $[DO']$

D'où $s(O) = r[h(O)] = r(O')$

- Déterminons ensuite r(O').

Soit $O'' = r(O')$, on a $(\overrightarrow{OO'}; \overrightarrow{OO''}) = \frac{\pi}{2}$ et $OO' = OO''$

On a $(OD) \perp (OC)$, et comme $\overrightarrow{DO'} = 2\overrightarrow{DO}$ alors $(OO') \perp (OC)$

Donc $(\overrightarrow{OO'}, \overrightarrow{OC}) = \frac{\pi}{2}$. Ainsi O'' appartient à la demi-droite [OC).

De plus OCD est un triangle isocèle, ce qui implique OC = OD et OD = OO '

alors OC = OO'. D'où O '' = C

Conclusion $s(O) = r(O') = C$

• Donc $s(G) = A$ et $s(O) = C$

c) S est une similitude directe de rapport k =2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui transforme (G ; O) en (A ;C) alors

$(\overrightarrow{OG}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$ et AC = 2 OG.