Série C - session 2000 : exercice 2 – corrigé

Données :

COULEUR / NUMERO	Blanche	Noire	Total
0	1	0	1
1	1	0	1
2	3	4	7
3	0	1	1
Total	5	5	10

1. Expérience : Tirage, simultanément de trois boules du sac.

Résultat : { b_1 , b_2 , b_3 } non ordonnée.

Choix = 120

Calcul des probabilités de :

A : « Toutes les boules sont blanches ».

A = {B ,B ,B }. Ainsi, Card A = 10. Par conséquent, p (A) = $\frac{1}{12}$

B : « Les boules sont de couleurs différentes ».

B = « {B, B , N } ou { B, N, N} ». Ainsi, Card B = 50. Par conséquent, p (B) = $\frac{5}{12}$

C : « On obtient la boule numérotée 0 ».

C = { 0 , b_2 , b_3 }. Ainsi, Card C = 36 .Donc, p (C) = $\frac{3}{10}$.

D : « Les numéros des boules sont pairs ».

D = { p, p , p} . Ainsi, Card (D) = 56. Donc, p (D) = $\frac{7}{15}$

2. Données : 9 boules dont 1 numérotée 1, 7 numérotées 2 et 1 numérotée 3.

Expérience : tirage successif avec remise de 2 boules.

Résultat : (b_1, b_2) notée (a , b) ordonnée avec répétition

d = PGCD(a, b) le plus grand commun diviseur de a et b.

Choix = 9 x 9 = 81 on enlève du sac la boule numérotée 0.

a. Montrons que { d } = D ={ 1, 2, 3 }.

Les valeurs prises par a sont 1 ou 2 ou 3 ; de même pour les valeurs prises par b. Or PGCD (1, 1) = 1, PGCD (1, 2) = 1, PGCD (1, 3) = 1, PGCD (2, 2) = 2, PGCD (2, 3) = 2, PGCD (3, 3) = 3.

Il s'ensuit que : D ={ 1, 2, 3 }.

b. E_k = {(a, b)/PGCD (a, b) = k } et par p_k sa probabilité

Montrons que p_1 = $\frac{31}{81}$

E_1 = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 1), (3, 1), (3, 2)}

Ainsi, Card $E_1 = 1 + 7 + 1 + 7 + 7 + 1 + 7 = 31$. Donc $p_1 = \frac{31}{81}$

Détermination de p_2 : $E_2 = \{(2, 2)\}$. Ainsi, Card $E_2 = 7 \times 7 = 49$. Donc $p_2 = \frac{49}{81}$

Détermination de p_3 : $E_3 = \{(3, 3)\}$. Ainsi, Card $E_3 = 1 \times 1 = 1$. Donc $p_3 = \frac{1}{81}$

c. Calcul de la probabilité de l'événement

E : « l'équation $ax + by = 2$ admet des solutions dans $Z \times Z$».

L'équation $ax + by = 2$ admet des solutions si $d(a, b) / 2$.

Ainsi, l'équation admet des solutions si $d(a, b) = 1$ ou $d(a, b) = 2$. Par conséquent, $E = E_1 \cup E_2$.

Or $E_1 \cap E_2 = \{ \}$. Il s'ensuit que $p(E) = p_1 + p_2 = + \frac{49}{81} = \frac{80}{81}$

d. Résolution dans $Z \times Z$ de l'équation : $3x + 2y = 2$.

On a $x = 2$ et $y = -2$ comme solution particulière de cette équation. De plus, comme 3 et 2 sont premiers entre eux, alors, les solutions générales de l'équation $3x + 2y = 2$ sont $x = 2 + 2k$ et $y = -2 + 3k$ où k appartient à Z.