Série C – session 2015 : problème 1 - corrigé

Partie A

1) Barycentre G du système S = { (A ; 1) , (B ; -1) , (D ; 1) }

On a $(1-1+1)\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$

Or O est le milieu de [AD], $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{O}$

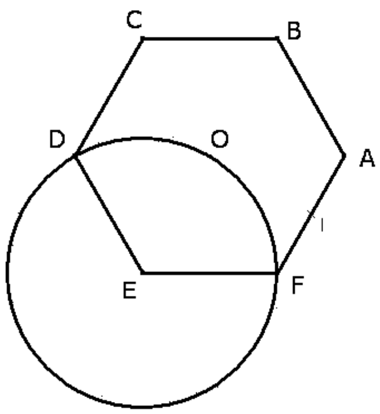
Alors $\overrightarrow{OG}=-\overrightarrow{OB}$ G est le symétrique de B par rapport à O : G = E.

2. a) Lieu des points M tels que $MA^2-MB^2+MD^2=a^2$

G étant le barycentre de S, on a : $MG^2+GA^2-GB^2+GD^2=a^2$

i.e. $MG^2=a^2-GA^2+GB^2-GD^2$.

Calcul de GA^2, GB^2 et GD^2.



On a $GA^2=EA^2=(\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FA})^2$

$=EF^2+FA^2+2\,\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{FA}$

$=EF^2+FA^2+2.EF.FA\cos(\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{FA})$

$=a^2+a^2+2.a^2\cos\frac{\pi}{3}$

D'où $GA^2=3a^2$

On a $GB^2=EB^2=(2OB)^2=4a^2$

et $GD^2=ED^2=a^2$

donc $MG^2=a^2-3a^2+4a^2-a^2$

alors $MG^2=a^2$ avec G = E.

L'ensemble (Γ) des points M est le cercle de centre E et de rayon a.

b) vérifions que (Γ) passe par le point O

(Γ) passe par le point O si $OA^2-OB^2+OD^2=a^2$

On a OA = OB = OD = a, alors $OA^2 - OB^2 + OD^2 = a^2 - a^2 + a^2 = a^2$.

Donc (Γ) passe par le point O.

Partie B

1ère méthode

a) Montrons que f est une symétrie centrale

f est la composée de deux rotations d'angle respectifs $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$

on a $\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}=\pi$, f est donc une rotation d'angle π i.e. une symétrie centrale.

b) image de A par f et centre de f

on a $\quad f(A) = R_A \circ R_O(A)$
$\quad\quad = R_A\left[R_O(A)\right]$
$\quad\quad = R_A\,(B)$

D'où $\quad f(A) = F$

f est donc la symétrie centrale de centre le milieu de [AF] i.e. le point I.

2ème méthode

a) Affixes de A, F et I

$z_A = 1$

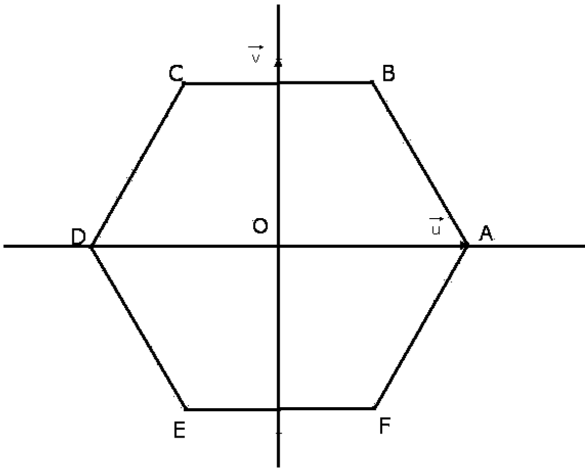
OFA est un triangle équilatéral, on a

$z_F - z_O = e^{-i\frac{\pi}{3}}(z_A - z_0)$

Alors $z_F = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

I est le milieu de [AF]

$z_I = \frac{z_A + z_F}{2} = \frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}$



b) Expression complexe de R_A.

Soit M'(z') l'image de M(z) par la rotation R_A,

On a $\quad z'-z_A = e^{i\frac{2\pi}{3}}(z - z_A)$ où $z_A = 1$ et $e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Alors $\quad z' = (-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})z + \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Expression complexe de R_O.

Soit M'(z') l'image de M(z) par la rotation R_O,

On a $\quad z'-z_O = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - z_O)$ et $e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Alors $\quad z' = (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})z$

Expression complexe de f.

$$\begin{tikzcd} M(z) \arrow[r, "R_O"] \arrow[dr, "f = R_A \circ R_O"'] & M_1(z_1) \arrow[d, "R_A"] \\ & M'(z') \end{tikzcd}$$

$z_1 = (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})z$

$z' = (-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})z_1 + \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

En remplaçant z_1 par son expression on a : $z' = (-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})z + \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Alors l'expression complexe de f est : $z' = -z + \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

c) Nature et expression complexe de f.

L'écriture complexe de f est de la forme : z ' = az + b ; f est un déplacement avec a = -1. f est une rotation d'angle $\theta = \arg(-1) = \pi$.

Autrement dit c'est une symétrie centrale de centre Ω d'affixe $z_\Omega = \frac{b}{1-a}$.

$$z_\Omega = \frac{\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-(-1)} = \frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}$$

Alors f est le symétrie centrale de centre I.

Partie C

1. a) Détermination de g(A)

on a $g(A) = R_O \circ R_O(A)$
$= R_O[R_O(A)]$
$= R_O(B)$

D'où *g(A) = C*

b) Ecriture complexe de g.

g = R_O o R_O est la rotation de centre O et d'angle $2\frac{\pi}{3}$.

Soit M'(z') l'image de M(z) par g, on a $z' - z_O = e^{i\frac{2\pi}{3}}(z - z_O)$ et $e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Alors $z' = (-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})z$

c) affixes des points C et E

Comme g(A) = C, on a $z_C = (-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})z_A = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Ensuite g(C) = E, alors $z_E = (-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})z_C = (-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$

D'où $z_E = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) Ecriture complexe de $\overline{S}$

C'est de la forme : $z' = a\overline{z} + b$ où a et b sont des complexes

On a $\overline{S}(O) = C$ i.e. $a\overline{z_O} + b = z_C$

et $\overline{S}(A) = E$ i.e. $a\overline{z_A} + b = z_E$

On a alors le système :

$$\begin{cases} a0 + b = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ a + b \quad = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

La résolution de ce système donne $a = -i\sqrt{3}$ et $b = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

D'où l'écriture complexe de $\bar{S}$ est $z' = -i\sqrt{3}\,\bar{z} - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Les éléments caractéristiques de $\bar{S}$

Rapport $k = \left| i\sqrt{3} \right| = \sqrt{3}$

Centre Ω d'affixe $z_\Omega = \frac{a\bar{b} + b}{1 - a\bar{a}} = 1 + i\sqrt{3}$

Axe Δ : c'est l'ensemble des points M(z) tels que $a(\overline{z - z_\Omega}) = |a|(z - z_\Omega)$

En remplaçant z par x + iy, on a $-i\sqrt{3}\left[(x - iy) - (1 - i\sqrt{3})\right] = \sqrt{3}\left[(x + iy) - (1 + i\sqrt{3})\right]$

Ce qui implique : $(-y + \sqrt{3}) + i(-x + 1) = (x - 1) + i(y - \sqrt{3})$

Par identification

$$\begin{cases} -y + \sqrt{3} = x - 1 \\ -x + 1 = y - \sqrt{3} \end{cases}$$

Alors l'équation de l'axe Δ est $x + y - 1 - \sqrt{3} = 0$

$\bar{S}$ est la similitude indirecte de rapport $k = \sqrt{3}$, de centre Ω d'affixe $z_\Omega = 1 + i\sqrt{3}$ et d'axe Δ d'équation $x + y - 1 - \sqrt{3} = 0$