Physique chimie terminale S
Mécanique dynamique

Chapitre II : La mécanique dynamique ou les lois de Newton

CHAPITRE II : DYNAMIQUE

Objectif d'apprentissage	Contenus
• Résoudre une situation problème mettant en œuvre une propulsion par réaction • Expliquer l'inclinaison d'un motocycliste dans un virage, en appliquant la conservation de la quantité de mouvement	• Principe d'inertie • Notion de quantité de mouvement d'un solide : définition et conservation
• Résoudre une situation problème mettant en œuvre un mouvement de projectile (ballon au cours d'un match, objets en chute libre etc.) ou le mouvement d'un satellite autour d'un astre attracteur en appliquant la 2e loi de Newton et le théorème de l'Energie cinétique	• Utilisation de la $2e$ loi de Newton pour étudier le mouvement du centre d'inertie d'un solide : relation $\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ dans un repère galiléen. Si m = Cte, $ma = \sum F$ (théorème de centre d'inertie) On peut étudier : - le mouvement d'un projectile dans un champ de pesanteur uniforme - le mouvement d'un mobile servant de moyen de transport - le mouvement d'un satellite ou d'un astre
• Etudier le mouvement circulaire des satellites	Notion de GPS (Global Positioning System) • Etude du mouvement circulaire des satellites en utilisant l'interaction gravitationnelle • Expression de la vitesse de ce satellite et de sa période de révolution
• Résoudre une situation problème mettant en œuvre un amortissement à l'aide d'un ressort, en utilisant l'énergie mécanique	Rappel de la notion de l'énergie cinétique vue en classe de première • Notion d'énergie potentielle de pesanteur et d'énergie potentielle élastique • Oscillateurs élastiques (ressort) : période, fréquence et étude énergétique

I. La mécanique dynamique

1. Introduction à la notion de mécanique dynamique

Qu'est-ce qu'une action mécanique, une force ?
https://www.youtube.com/watch?v=Yd_9E7CSEvw

Gonfler un ballon
Les ballons sont constitués de membranes élastiques en caoutchouc. Pour gonfler un ballon, nous exerçons une force sur la membrane élastique en remplissant un ballon d'air. La force exercée sur les parois du ballon change sa forme et sa taille, c'est donc une force dynamique.
Lancer un objet.
On lance un objet en utilisant la force musculaire dans notre corps. Dès qu'il est lancé, l'objet change sa vitesse par rapport au temps. Cette force musculaire exercée par notre corps est une forme de force dynamique. C'est l'objet de la première loi du mouvement de Newton qui stipule qu'un objet ne peut pas changer sa vitesse sans l'application d'une force externe.

Qu'est-ce qui fait circuler la voiture ?
Un moteur de voiture fournit une force motrice qui aide le véhicule à accélérer et à avancer. Cette force motrice du moteur de la voiture est une forme de force dynamique exercée sur la voiture pour l'aider à changer sa position d'un endroit à un autre avec le temps. Les forces dynamiques dépendent du temps, c'est-à-dire que le changement de position se produit par rapport au temps.

Œuf cru ou cuit, comment les reconnaître ?

Allez voir ici : https://www.youtube.com/watch?v=k3ooBb6wtfg
Vous trouverez d'autres expériences simples à faire soit même ici :
https://www.youtube.com/watch?v=Yd_9E7CSEvw

Rappel : La mécanique comporte deux parties
- La cinématique dont le but est de décrire le mouvement des corps, en définissant la position, la vitesse de translation ou de rotation, l'accélération, etc...
- La dynamique dont le but est d'expliquer le mouvement des corps, en reliant l'accélération aux forces subies.

2. La mécanique dynamique

La dynamique est la partie de la mécanique qui étudie les relations entre les déplacements des solides et leurs causes, c'est à dire les actions mécaniques extérieures qui agissent sur les systèmes matériels.

3. Le centre d'inertie d'un système

L'étude, dans le référentiel terrestre, du mouvement d'un solide lancé puis soumis à la seule action de son poids montre que les mouvements des points constituants le solide sont complexes. Un seul point a un mouvement plus simple que les autres., c'est le centre d'inertie G qui, en l'absence de frottement, décrit une verticale ou une parabole.

Tout système matériel est formé de particules quasi ponctuelles A1,A2,… de masse m1,m2,…

Le centre d'inertie de ce système matériel coïncide avec son barycentre G défini par : $m_1\overrightarrow{GA_1} + m_2\overrightarrow{GA_2} + \cdots + m_i\overrightarrow{GA_\iota} = \vec{0}$

Soit O un point quelconque de l'espace : $\overrightarrow{GA_\iota} = \overrightarrow{GO_\iota} + \overrightarrow{OA_\iota}$

$$\overrightarrow{OG}(m_1 + m_2 + \cdots + m_i) + m_1\overrightarrow{OA_1} + \cdots + m_i\overrightarrow{OA_\iota} = \vec{0} \Rightarrow \sum_i m_i\overrightarrow{OG} = \sum_i m_i\overrightarrow{OA_\iota}$$

Cas particuliers :

- Pour un disque homogène le centre d'inertie G coïncide avec le centre du disque.

$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m1 + m2 + \ldots}\sum_i m_i\overrightarrow{OA_\iota}}$$

- **Pour tout solide homogène possédant un centre de symétrie, le centre d'inertie coïncide avec le centre de symétrie de ce solide.**

II. Première loi de Newton

Isaac Newton (1642 - 1727), de nationalité britannique, fut un brillant mathématicien, physicien et technicien.

Vidéo Khan Academy : https://youtu.be/9kPA4DpssbY

1. Référentiel galiléen

Les référentiels Galiléens usuels

-**Le référentiel Héliocentrique** peut être considéré comme étant Galiléen pour étudier les voyages interplanétaires (terre vers mars par exemple) ou pour étudier le mouvement des planètes autour du soleil.
Le référentiel héliocentrique prend le Soleil pour centre. Le préfixe hélio vient du **grec Hélios, Dieu grec du Soleil**).
Le référentiel Héliocentrique est un solide imaginaire construit à partir du centre du soleil et des centres de trois étoiles lointaines. Les quatre points étant nécessairement non coplanaires.
-**Le référentiel Géocentrique** est considéré comme étant Galiléen pour étudier les satellites terrestres.
Le référentiel géocentrique prend la terre pour centre. **Le préfixe géo vient du grec gé, terre.**
Le référentiel Géocentrique est un solide imaginaire construit à partir du centre de la terre et des centres de trois étoiles lointaines. Les quatre points étant nécessairement non coplanaires.
-**Le référentiel terrestre** (référentiel du laboratoire, solide terre) peut être considéré comme Galiléen pour étudier les expériences dont la durée est courte par rapport au jour sidéral, ce qui est le cas de la plupart des expériences de mécanique réalisées sur terre.
A noter que :
-Un objet immobile dans un référentiel galiléen a tendance à rester immobile dans ce référentiel, d'autant plus que sa masse est grande.
Un objet en mouvement dans un référentiel galiléen a tendance à conserver un mouvement rectiligne uniforme dans ce référentiel, d'autant plus que sa masse est grande.
-Si la somme des forces extérieures appliquées à un solide est nulle, on dit que ce solide est pseudo-isolé. Un système isolé parfait n'existe pas.
-Le référentiel Galiléen parfait n'existe pas.

2. Enoncé de la 1ème loi de Newton ou Principe de l'inertie

Dans un référentiel galiléen, **si** la somme des forces extérieures appliquées à un système est nulle **alors** le centre d'inertie de ce système est, soit au repos, soit en mouvement rectiligne uniforme.

Un référentiel Galiléen est un référentiel dans lequel le principe de l'inertie est vérifié :
Dans un référentiel Galiléen, **si** la somme vectorielle des forces extérieures appliquées à un système est nulle alors le vecteur vitesse de son centre d'inertie G ne varie pas **:**

$$\boxed{\textbf{Si } \sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}, \quad \textbf{Alors } \overrightarrow{v_G} = Cte}$$

Le système est donc soit au repos $\overrightarrow{v_G} = \vec{0}$, soit en mouvement rectiligne uniforme si $\overrightarrow{v_G} = Cte$.

La réciproque est vraie :
Dans un référentiel Galiléen, **si** le centre d'inertie d'un solide est, soit au repos, soit en mouvement rectiligne uniforme, **alors** la somme vectorielle $\sum \vec{F}_{ext}$ des forces appliquées à ce système est nulle.

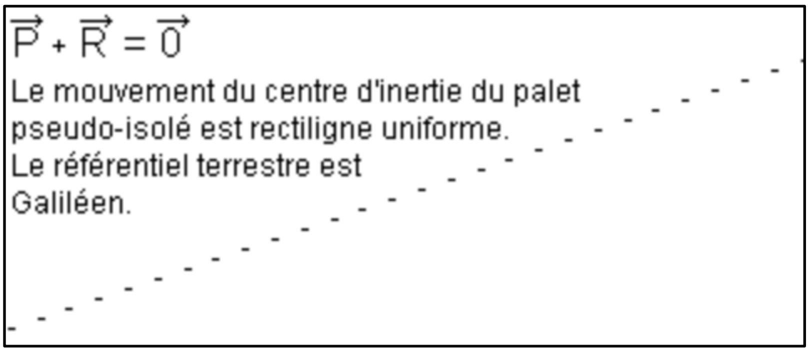
3. Quelques exemples d'étude de mouvement

Exemple n°1 : mouvement du centre d'inertie d'un solide pseudo-isolé dans un référentiel Galiléen.
Le référentiel spatial : la terre
Système étudié : un palet autoporteur muni d'un stylet axial coïncidant avec son centre d'inertie. Le palet est posé sur une table à coussin d'air installé sur un **chariot immobile.**
Conditions d'étude : le palet étant autoporteur, les frottements sont nuls.
Inventaire des forces mises en jeu :

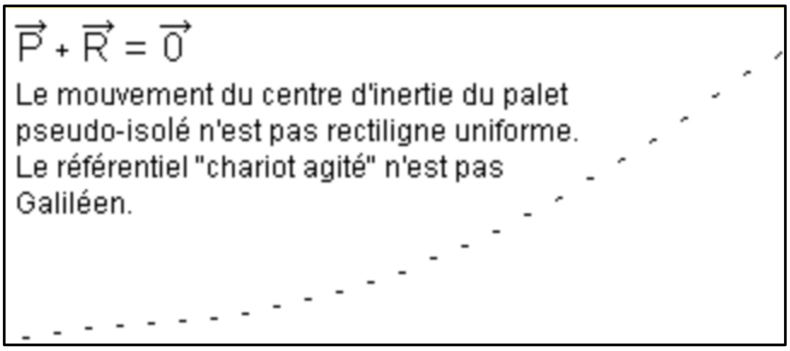
- Le poids $\vec{P}$ (action gravitationnelle de la Terre sur le palet)
- La force $\vec{R}$ (action verticale de la table sur le palet)

En absence de frottement la somme des forces agissants sur le mobile est nulle : $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$

Observation : Le stylet laisse sur le papier une trace concrétisant sa trajectoire. On observe une trajectoire rectiligne uniforme.



Exemple n°2 : mouvement du centre d'inertie d'un solide pseudo-isolé dans un référentiel NON Galiléen.
On reproduit l'expérience précédente mais **on agite le chariot** supportant la table à coussin d'air. Le solide chariot n'est pas, ici, un référentiel Galiléen car, bien que la somme des forces agissant sur le palet soit nulle, son centre d'inertie n'est pas animé d'un mouvement rectiligne uniforme.
Par rapport au référentiel « chariot agité » la trajectoire du centre d'inertie du palet n'est pas rectiligne uniforme.



III. Deuxième loi de Newton

1. Quantité du mouvement d'un point matériel :

Le vecteur quantité de mouvement d'un système est égal au produit de la masse m du système par le vecteur vitesse $\vec{V}_G$ de son centre d'inertie.
Soit un point matériel A de masse m animé d'une vitesse $\vec{v}$. La quantité de mouvement du point A notée $\vec{p}$ est donnée par la relation :

$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$ Exprimée en kgm/s

2. Quantité du mouvement d'un solide :

Un solide de masse M peut être décomposé en plusieurs points matériels A_i de masse m_i et de vecteur vitesse $\vec{v_i}$.

$$\vec{p} = \sum_i \vec{p_i} = \sum_i m_i \vec{v_i} = \sum_i m_i \frac{d}{dt}\overrightarrow{OA_i} = \frac{d}{dt}\sum_i m_i \overrightarrow{OA_i} = \frac{d}{dt} M\overrightarrow{OG} => \vec{p}$$
$$= M\frac{d}{dt}\overrightarrow{OG} = M\overrightarrow{v_G}$$

$$\boxed{\vec{p} = M\overrightarrow{V_G}}$$

Où $\overrightarrow{V_G}$ est la vitesse du centre d'inertie du solide.

3. Enoncé de la 2ème loi de newton ou Principe fondamentale de la Dynamique (PFD)

Dans un référentiel terrestre supposé Galiléen, il est facile de constater qu'une force peut ralentir ou accélérer le mouvement d'un solide.
La 2ème loi de newton fait intervenir **le vecteur quantité de mouvement du système étudié $\vec{P} = m\,\vec{V}_G$**

Dans un référentiel Galiléen, la somme vectorielle des forces extérieures appliquées à un système est égale à la dérivée par rapport au temps de son vecteur quantité de mouvement :

$$\boxed{\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}}$$

De façon équivalente, on peut énoncer :
Dans un référentiel Galiléen, la somme des forces extérieures appliquées à un solide est égale au **produit de la masse m du solide par l'accélération** de son centre d'inertie G

$$\vec{a}_G = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad \sum \vec{F}_{ext} = m\,\frac{d\vec{v}}{dt} \qquad \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} \ldots = m\,\vec{a}_G$$

Cas particulier :

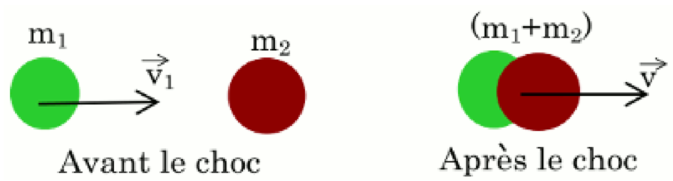
Si $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$ alors $\vec{a}_G = \vec{0}$ et par conséquent $\vec{V}_G$ reste constant en direction, sens et norme (on retrouve la première loi de Newton).

Conséquence de la 2ème loi de Newton : Principe de la conservation de la quantité de mouvement :

Dans un référentiel Galiléen, si la somme vectorielle des forces extérieures appliquées à un système est nulle alors, il y a conservation de la quantité du mouvement de ce système (c'est les cas de tout système pseudo-isolé).

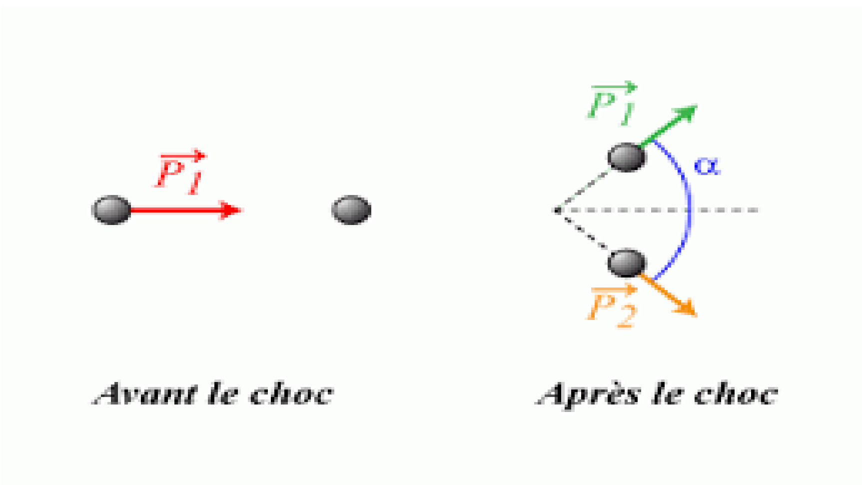
-Lors d'un choc le vecteur quantité de mouvement d'un système de deux solides isolé ou pseudo-isolé demeure constante : $\vec{p}(avant\ choc) = \vec{p}(après\ choc)$

-Dans le cas d'un choc mou, les deux solides se raccrochent l'un de l'autre et forme un seul système après le choc : $m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2} = (m_1 + m_2)\vec{V}$



Source : https://www.camerecole.org/component/content/article/27-exercices-premiere/76-correction-l-energie-cinetique.html

-Dans le cas d'un choc élastique, les deux solides ont des directions différentes après le choc : $m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2} = m_1\overrightarrow{v'_1} + m_2\overrightarrow{v'_2}$



Exemple d'application de la 2ème loi de Newton : Propulsion par réaction
C'est sur ce modèle que fonctionne la propulsion des fusées ou des avions à réaction. Une turbine expulse une grande masse de gaz à grande vitesse. La fusée ou l'avion se mette en mouvement en sens inverse.

Comment calculer la vitesse de propulsion d'une fusée ?
Le système est formé par l'ensemble $\{fusée\ +\ gaz\}$.
Référentiel d'étude : référentiel de Copernic (loin de tout astre attracteur)
Le système est initialement immobile : $\overrightarrow{p_{(initial)}} = (M+m).\vec{0} = \vec{0}$
Le système est pseudo isolé donc il y a conservation de la quantité de mouvement :
$\overrightarrow{p_{(final)}} = \vec{0} = M.\overrightarrow{V_f} + m\overrightarrow{V_g}$ d'où $\overrightarrow{V_f} = -\frac{m}{M}\overrightarrow{V_g}$

IV. Troisième loi de Newton

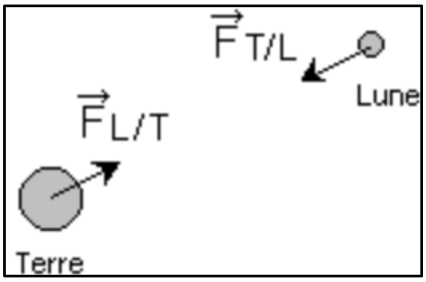
Lorsque je prends appui sur le sol pour sauter, j'exerce sur la terre une force aussi grande que celle que la terre exerce sur moi et qui me permet de sauter. Par contre, ma masse est beaucoup plus faible que celle de la terre, mon accélération (variation de vitesse par unité de temps) est beaucoup plus grande que celle de la terre (accélération négligeable du coup, d'après la 2ème loi de newton)

1. Enoncé de la 3ème loi de newton ou principe des actions réciproques

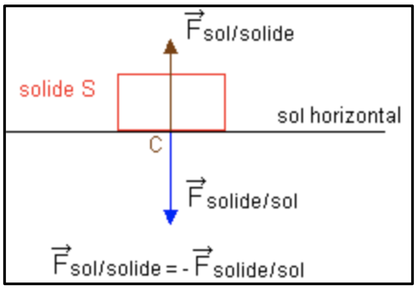
Si un point matériel A exerce sur un point matériel B une force $\vec{f}_{A\to B}$, alors le point B exerce sur le point A une force $\vec{f}_{B\to A}$, telle que :
Les forces $\vec{f}_{A\to B}$ et $\vec{f}_{B\to A}$ s'exercent sur **la même droite d'action** à savoir la **droite passant par A et B**,
Les deux forces associées à une même interaction sont toujours égales et opposées : $\boldsymbol{\vec{f}_{A\to B} = -\vec{f}_{B\to A}}$

2. Exemples d'interaction

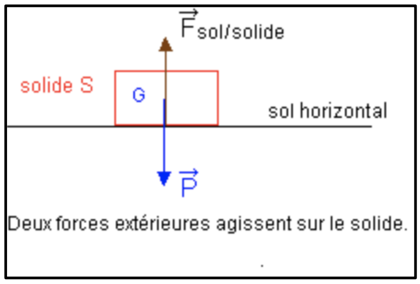
-Interaction à distance Terre / Lune.
La Terre attire la Lune avec une force $\overrightarrow{F_{T/L}}$.
Réciproquement, la Lune attire la Terre avec une force $\overrightarrow{F_{L/T}}$ égale et opposée à $\overrightarrow{F_{T/L}}$ telle que $\overrightarrow{F_{L/T}} = -\overrightarrow{F_{T/L}}$



-Interaction de contact solide / sol.
Un solide, immobile par rapport à la Terre, appuie sur le sol horizontal avec une force $\overrightarrow{F_{solide/sol}}$. Réciproquement, le sol soutient le solide, avec une force $\overrightarrow{F_{sol/solide}}$ telle que : $\overrightarrow{F_{solide/sol}}$ = - $\overrightarrow{F_{sol/solide}}$



Sur le solide S s'exercent deux forces extérieures :
$\vec{P}$ (poids) : essentiellement action gravitationnelle de la Terre sur le solide S (force à distance)
$\overrightarrow{F_{sol/solide}}$: action verticale du sol sur le solide S (force de contact)
Comme le solide est au repos dans le référentiel terrestre (Galiléen), le principe de l'inertie permet d'écrire : $\vec{P} + \overrightarrow{F_{sol/solide}} = \vec{0}$



V. Etude énergétique en mécanique

L'énergie d'un système exprime sa capacité à modifier l'état d'autres systèmes avec lesquels il est en interaction. Son unité est le Joule noté J
L'énergie apparaît sous un très grand nombre de formes différentes : énergie cinétique Ec, énergie potentielle de pesanteur Ep, énergie mécanique Em…

1. Energie cinétique

L'énergie cinétique d'un solide est l'énergie qu'il possède du fait de son mouvement.

Expression : $\boldsymbol{E_c = \frac{1}{2} mv^2}$ en joule J

m : masse en kilogrammes kg
v : vitesse du centre d'inertie de l'objet en m.s^{-1}
Remarque :
- Pour un solide animé d'un mouvement de translation, tous les points du solide ont à chaque instant la même vitesse que le centre d'inertie G.
-L'énergie cinétique dépend du référentiel d'étude

2. Théorème de l'énergie cinétique

Dans un référentiel galiléen, la variation de l'énergie cinétique d'un solide en mouvement de translation entre deux instants $\boldsymbol{t_i}$ **et** $\boldsymbol{t_f}$ est égale à la somme des travaux des forces extérieures qui lui sont appliquées entre ces deux instants.

$$\Delta \boldsymbol{Ec} = \boldsymbol{Ec}_{\mathrm{f}} - \boldsymbol{Ec}_{\mathrm{i}} = \sum \boldsymbol{W}(\vec{\boldsymbol{F}})$$

3. Energie potentielle de pesanteur

L'énergie potentielle de pesanteur d'un solide est l'énergie qu'il possède du fait de son interaction avec la terre.
La valeur de cette énergie dépend de sa position par rapport à la terre.

Expression $\boldsymbol{E_p = \mathrm{m.g.z}}$ exprimée en joule J
m : masse de l'objet en kilogrammes kg
g : facteur d'attraction terrestre ou intensité de la pesanteur $\simeq 9{,}81\mathrm{N}.Kg^{-1}$
z : altitude du centre d'inertie de l'objet en m.
Remarque :
-la valeur de l'énergie potentielle dépend de la valeur de z, elle dépend du choix de l'origine des altitudes.
-La **différence d'énergie potentielle** ne dépend pas du choix de l'origine.

4. Energie mécanique

L'énergie mécanique E_m d'un solide est la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle.

$\boldsymbol{E_m = E_c + E_p}$

Remarque 1 :
-Lors de la chute libre, l'altitude d'un solide diminue et son énergie potentielle étant proportionnelle à l'altitude, diminue.
-Simultanément, sa vitesse augmente et de ce fait, son énergie cinétique proportionnelle au carré de sa vitesse, augmente.

Remarque 2 :
-Au cours du mouvement, l'énergie potentielle se transforme en énergie cinétique et réciproquement.

Remarque 3 :
-L'énergie mécanique d'un solide soumis uniquement à son poids est constante.
-Si un solide est soumis à son poids et à d'autres forces dont le travail est nul au cours du mouvement, alors l'énergie mécanique de ce solide est constante.

5. Conservation de l'énergie mécanique

Un système est dit conservatif lorsque les déplacements des éléments qui le constituent s'effectuent sans frottement.
L'énergie mécanique d'un système conservatif est constante :
$E_{Mf} = E_{Mi}$ par conséquent $\Delta E_M = E_{Mf} - E_{Mi} = 0$

Dans le cas où l'énergie mécanique d'un système se conserve, alors toute l'énergie cinétique est convertie en énergie potentielle et inversement.

Exercices d'application : énoncé

https://www.afterclasse.fr/exercices/869/etude-energetiques-en-mecanique

-On lâche une balle de 10 m de hauteur, sans vitesse initiale. L'énergie potentielle de pesanteur… Diminue

☐Diminue au cours de la chute

☐Augmente au cours de la chute

-Vrai ou faux ? Le travail du poids a un signe qui dépend du choix de l'axe vertical. Faux

☐Vrai

☐Faux

-En quelle unité s'exprime l'énergie ?

- en m/s V☐ F ☐
- en watt V☐ F ☐
- en wattheure V☐ F ☐
- en joule V☐ F ☐

-Combien vaut l'énergie cinétique d'un skateur de 70 kg qui se déplace à 3 m/s ?

☐30 KJ

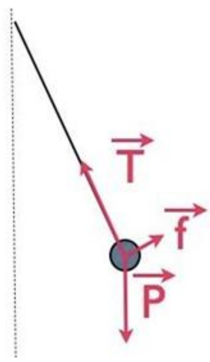
☐315 J

☐24545 J

☐42 J

Réponse 315 J

-Dans cette situation, l'énergie potentielle …



- est constante V☐ F ☐
- est convertie partiellement en énergie cinétique V☐ F ☐
- est convertie totalement en énergie cinétique V☐ F ☐
- st partiellement dissipée V☐ F ☐

Exercices d'application : corrigés

Sources :
https://www.afterclasse.fr/exercices/869/etude-energetiques-en-mecanique

-On lâche une balle de 10 m de hauteur, sans vitesse initiale. L'énergie potentielle de pesanteur… Diminue

☐Diminue au cours de la chute

☐Augmente au cours de la chute

-Vrai ou faux ? Le travail du poids a un signe qui dépend du choix de l'axe vertical. Faux car c'est la différence de hauteur qui intervient, elle est toujours positive.

☐Vrai

☐Faux

-En quelle unité s'exprime l'énergie ?

- en m/s V☐ F ☐Faux
- en watt V☐ F ☐Faux
- en wattheure V☐ F ☐Vrai
- en joule V☐ F ☐Vrai

-Combien vaut l'énergie cinétique d'un skateur de 70 kg qui se déplace à 3 m/s ?

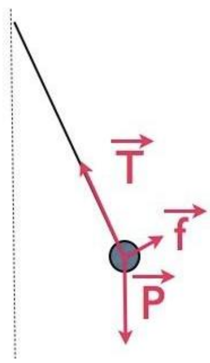
☐30 KJ

☐315 J

☐24545 J

☐42 J

Réponse 315 J



-Dans cette situation, l'énergie potentielle …

- est constante V☐ F ☐Faux
- est convertie partiellement en énergie cinétique V☐ F ☐Vrai
- est convertie totalement en énergie cinétique V☐ F ☐Faux
- st partiellement dissipée V☐ F ☐Vrai

VI. Etude de quelques mouvements

1. Mouvement d'un projectile dans le champ de pesanteur

Une balle de tennis de masse m est lancé d'un point O avec une vitesse initiale $\vec{v_0}$ faisant un angle α avec l'horizontal.

Etude dynamique :

On considère que la balle se déplace dans un champ de pesanteur uniforme.

Données numériques : $\boldsymbol{v_0}$ *= 12 m/s ; α = 60° ; m = 50g ; et g = 9,81 m /s²*

On choisit comme repère R $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$

L'axe y'oy est l'axe vertical orienté vers le haut et l'axe x'ox l'axe horizontal orienté de gauche à droite.

Le plan (x'x ; y'y) contient le vecteur vitesse $\vec{v_0}$

L'axe z'oz est orthogonal au plan (x'x ;y'y)

Les vecteurs forment un trièdre direct.

On choisit comme origine des espaces le point O et l'origine des dates correspond à l'instant où la balle occupe la position O.

-Donner les équations du mouvement

-Que peut-on dire du mouvement de G suivant l'axe x'ox ; suivant l'axe y'oy ?

-Dans quel plan s'effectue le mouvement de G.

-Déterminer la trajectoire du point G. Conclusion.

Résolution :

-Première étape : Définition du système

On précise le système étudié : S(m,G) le système est une balle de masse m, assimilable à un point matériel G

-Deuxième étape : Choix du référentiel d'étude et on indique les conditions initiales

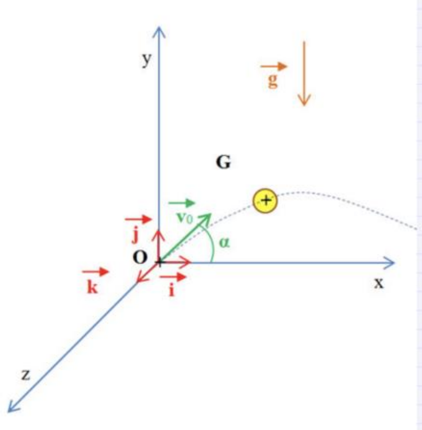
- *on étudie le mouvement dans un champ de pesanteur uniforme*
- *Le mouvement a lieu au voisinage du sol*
- *On choisit le référentiel terrestre supposé galiléen associé à un repère d'espace orthonormé R* $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$
- *Conditions initiales : Position et vitesse du mobile à l'instant t = 0 s*

$$\overrightarrow{OG_0}\begin{cases}x_0 = 0\\ y_0 = 0\\ z_0 = 0\end{cases} \qquad \overrightarrow{v_0}\begin{cases}v_{0x} = v_0\, Cos\, \alpha\\ v_{0y} = v_0\, Sin\, \alpha\\ v_{oz} = 0\end{cases}$$

-Troisième étape : étude dynamique

- Bilan des forces : inventaire des actions mécaniques que subit le système. La balle est soumise à son poids $\vec{P}$ = m.$\vec{g}$
- Inventaire des interactions avec le système : la balle est en interaction avec l'air qui l'entoure
- Interaction avec la Terre (champ de pesanteur uniforme) : On peut négliger la poussée d'Archimède et les forces de frottement.
- Coordonnées des forces et des vecteurs dans le repère R

$$\vec{g}\begin{cases}g_{x=0}\\ g_{y=-g}\\ g_{z=0}\end{cases} \qquad \vec{P}\begin{cases}p_{x=0}\\ p_{y=\,-m.g}\\ p_z = o\end{cases}$$



- Application de la 2ème loi de newton :

Dans un référentiel galiléen, si un système assimilé à un point matériel est soumis à une ou plusieurs forces extérieures, alors, la somme vectorielle des forces est égale à la dérivée par rapport au temps de son vecteur quantité de mouvement :

$$\sum\overrightarrow{F_{ext}} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad => \quad \sum\overrightarrow{F_{ext}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m.\vec{v}\,)}{dt} = \text{m.}\frac{d\vec{v}}{dt}$$

D'après le principe d'inertie :

$\sum\overrightarrow{F_{ext}} = \text{m.}\,\vec{a}$ avec $\sum\overrightarrow{F_{ext}} = \vec{P} = \text{m.}\vec{g}$ d'où m.$\vec{g}$ = m. $\vec{a}$ soit $\boldsymbol{\vec{g} = \vec{a}}$

-Quatrième étape : étude cinématique

$$\vec{a}\begin{cases}a_x\\ a_y\\ a_z\end{cases} \qquad \vec{g}\begin{cases}g_{x=0}\\ g_{y=-g}\\ g_{z=0}\end{cases} \quad \vec{g} = \vec{a} \qquad => \vec{a} = \begin{cases}a_{x=0}\\ a_{y=\,-g}\\ a_{z=\ 0}\end{cases}$$

- Équations horaires du vecteur vitesse

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ par intégration des équations de $\vec{a}$ et utilisation des conditions initiales, on obtient $\vec{v} = \begin{cases} v_{x=v_{ox}} \\ v_{y=} -g.t + v_{oy} \\ v_{z=}\ v_{oz} \end{cases}$ soit $\vec{v} = \begin{cases} v_{x=v_0}\ \cos\alpha \\ v_{y=} -g.t + v_o \sin\alpha \\ v_{z=}\ 0 \end{cases}$

- Équations horaires du vecteur position

$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}$ par intégration des équations de $\vec{v}$ et utilisation des conditions initiales, on obtient $\overrightarrow{OG} = \begin{cases} x = v_o\, t\, \cos\alpha + x_0 \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_o\, t\ \sin\alpha \\ Z = v_{oz} \end{cases}$

$$=> \overrightarrow{OG} = \begin{cases} x = v_o\, t\, \cos\alpha \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_o\, t\ \sin\alpha \\ Z = 0 \end{cases}$$

- Le mouvement suivant l'axe x'ox est rectiligne uniforme.

-Le mouvement suivant l'axe y'oy est est rectiligne uniformément varié.

-Le mouvement de g est contenu dans le plan (x'x ;y'y) appelé plan de tir qui contient le vecteur $\overrightarrow{v_0}$

- Équations horaires de la trajectoire

La trajectoire est l'ensemble des positions successives occupées par le point G au cours du temps.

On élimine le temps pour trouver la relation entre les coordonnées *x et y* du vecteur position dans le plan *xoy :*

y = f(x)

$$\overrightarrow{OG} = \begin{cases} t = \frac{x}{v_o\ \cos\alpha} \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_o\, t \sin\alpha \\ Z = 0 \end{cases}$$

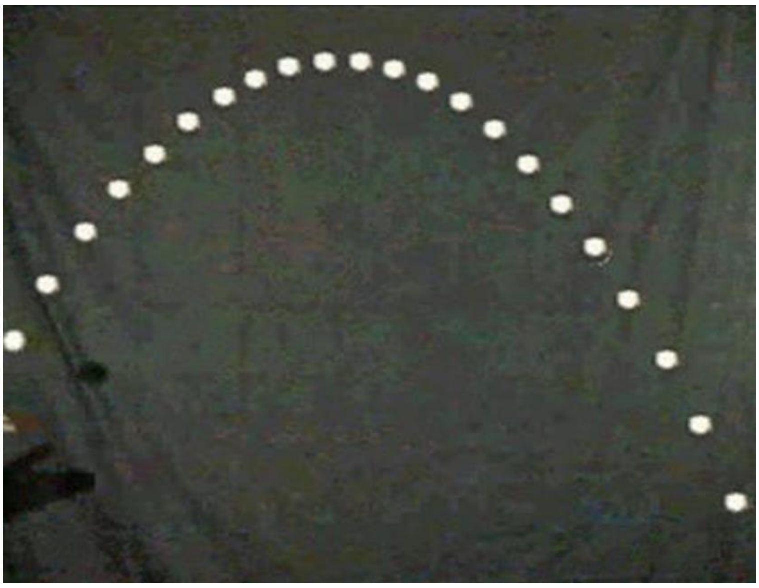
$$y = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_o\ \cos\alpha}\right)^2 + v_o\left(\frac{x}{v_o\ \cos\alpha}\right) Sin\ \alpha$$

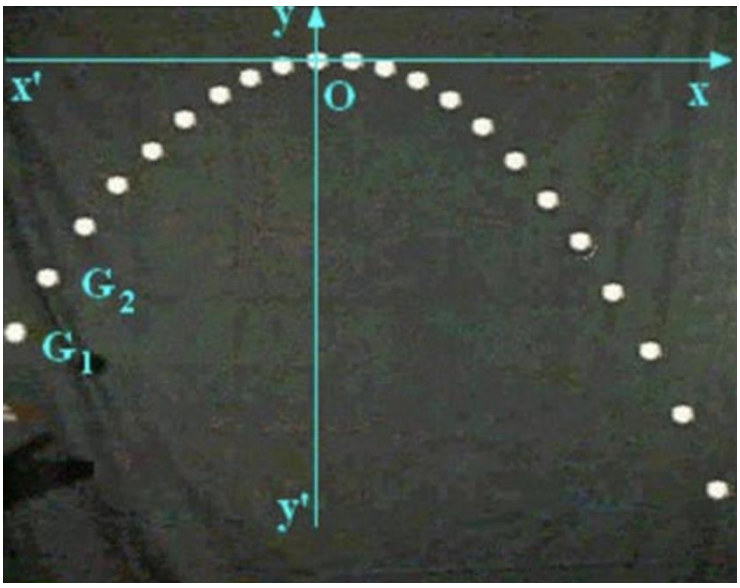
$$y = -\frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 cos^2 \alpha} + x \tan \alpha$$

$$y = -\frac{1}{2} 9{,}81 \frac{x^2}{15^2 cos^2 \frac{\pi}{3}} + x \tan \frac{\pi}{3}$$

$$y = -\frac{1}{2} 9{,}81 \frac{x^2}{15^2 cos^2 60} + x \tan 60 \quad \boxed{\boldsymbol{y = -0{,}0875x^2 + 1{,}73x}}$$

La trajectoire est une portion de parabole contenu dans le plan contenant le vecteur vitesse $\overrightarrow{v_0}$. Elle est liée aux conditions initiales.





2. Mouvements des planètes et des satellites

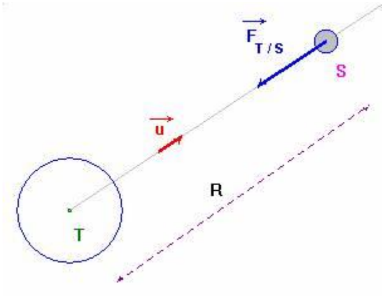
Les 9 planètes gravitent approximativement dans le même plan autour d'une étoile centrale qui est le soleil.
Dans le référentiel héliocentrique, le mouvement du centre d'une planète autour du soleil est quasiment circulaire. Le centre de chaque trajectoire circulaire coïncide presque avec le centre du soleil.
La terre possède un seul satellite naturel qui est la lune et un nombre important de satellites artificiels.

a. Etude du mouvement d'un satellite terrestre

On étudie le mouvement d'un satellite de la terre dans le référentiel géocentrique
Ce satellite S possède une masse m et son centre d'inertie est situé à la distance R du centre de la terre à une altitude z. On note $R = R_T + z$
La masse de la terre est notée M_T
On néglige les forces d'attraction gravitationnelle exercées par les planètes voisines et par le Soleil.
-Quelles sont les caractéristiques de la force gravitationnelle qu'il subit ?
-En déduire celles de son accélération.
-Que se passe-t-il lorsque la trajectoire du satellite est circulaire ?
-Donner l'expression de sa vitesse dans le référentiel géocentrique.
-Comment varie la valeur de la vitesse en fonction de l'altitude ?
-Donner l'expression et calculer sa vitesse
Donner l'expression et calculer la vitesse et la période de la station orbitale
<u>Données numériques :</u>
Masse du satellite m = 415 tonnes
Altitude du satellite z = 400 km
Masse de la terre M_T= $5{,}98.10^{24}$ kg
Rayon de la terre r_T=6380 km
Constante de gravitation universelle G= $6{,}67.10^{-11} m^3 \cdot kg^{-1} s^{-2}$

Solution : Etude du mouvement d'un satellite terrestre

Le satellite **S** est soumis à une force gravitationnelle $F_{T/S}$ exercée par la Terre **T.**



-Expression vectorielle de la force

$\vec{F} = \overrightarrow{F_{T/S}}$ = - $\frac{M_T.m}{R^2}.\vec{u}$

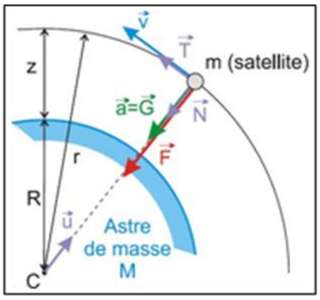
- Application de la deuxième loi de newton dans le référentiel géocentrique :

$\sum\overrightarrow{F_{ext}} = \text{m}.\overrightarrow{a_G}$ $\Rightarrow$ $\vec{F} = \overrightarrow{F_{T/S}}$ = - $G\,\frac{M_T.m}{R^2}.\vec{u} = \text{m}.\overrightarrow{a_G}$

$\overrightarrow{a_G}$ = - $G\,\frac{M_T.}{R^2}.\vec{u}$

Pour simplifie l'étude, on se place dans le repère de Frenet $R_f\ (O,\vec{T},\vec{N})$

<u>Rappel</u> : La base de Frenet est constituée de deux vecteurs unitaires $\vec{N}$ et $\vec{T}$.



Le vecteur unitaire $\vec{T}$ est tangent à la trajectoire, au point M où se trouve le mobile ponctuel. Ce vecteur est orienté arbitrairement.

Le vecteur unitaire $\vec{N}$ est normal à la trajectoire. Il est orienté vers l'intérieur de la courbe.

On remarque que $\vec{N}$= - $\vec{u}$

- L'expression de l'accélération dans ce repère :

$$\boldsymbol{\overrightarrow{a_G} = - G\,\frac{M_T}{R^2}\,.\vec{N}}$$

-Dans le référentiel géocentrique donc, l'accélération du centre d'inertie du satellite est indépendante de sa masse.

- Le vecteur accélération est centripète (orienté par le vecteur $\vec{N}$)
- Si la trajectoire du satellite est circulaire, alors :

R = Constante $\Rightarrow$ $\text{G}.\frac{M_T}{R^2} = \text{k} = \text{Constante}$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{a_G} = \text{k}.\vec{N}$

-Si le mouvement est circulaire uniforme, alors :

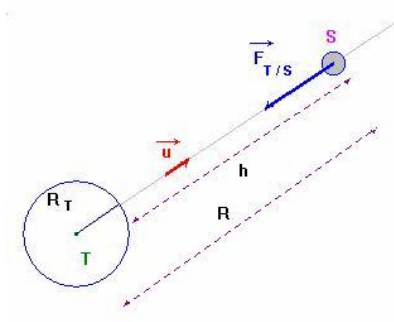
V = Constante $\Rightarrow$ $\frac{dv}{dt} = 0$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{\vec{a} = \frac{v^2}{R}\,.\,\vec{N}}$

Par identification : $\boldsymbol{- G\,\frac{M_T}{R^2} = \frac{v^2}{R}}$ $\Rightarrow$ $v^2 = \frac{G.M_T}{R}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\boldsymbol{v = \sqrt{\frac{G.M_T}{R}} = C^{te}}}$

-Dans le référentiel géocentrique, le mouvement d'un satellite en orbite circulaire est uniforme.

- Sa vitesse dépend de l'altitude mais est indépendante de sa masse m.

- D'autre part : $V = \sqrt{\frac{G.M_T}{R}} = \sqrt{\frac{G.M_T}{R_T+z}}$



Donc la vitesse du satellite diminue lorsque son altitude augmente.

- Valeur de la vitesse :

$$V = \sqrt{\frac{G.M_T}{R_T+z}} = \sqrt{\frac{G6{,}67.10^{-11}.5{,}98.10^{24}}{(6380+400).10^3}} \quad \Rightarrow \quad v \simeq 7670 \text{ m/s} \simeq 27\,600 \text{ km/h}$$

- Expression de la période T : durée nécessaire pour effectuer un tour :

$$T = \frac{2\pi R}{v} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi R\sqrt{R}}{G.M_T} \Rightarrow \quad \boldsymbol{T=2\pi\sqrt{\frac{R^3}{G.M_T}}}$$

- Valeur de la période.

$$\boldsymbol{T=2\pi\sqrt{\frac{(R+z)^3}{G.M_T}}} \Rightarrow T = \boldsymbol{2\pi\sqrt{\frac{\left((6380+400)10^3\right)^3}{6{,}67.10^{-11}.5{,}98.10^{24}}}}$$

T $\simeq$ 5 554s $\simeq$ 1h33 min

Remarque :

$$T=2\pi\sqrt{\frac{R^3}{G.M_T}} \quad \Rightarrow \quad T^2 = 4\pi^2\frac{R^3}{G.M_T} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{G.M_T}}$$

Le carré de la période de révolution T divisé par le cube de l'altitude est une constante indépendante de la masse du satellite et reste invariant d'un satellite à l'autre.

-Cette loi appelée troisième loi de Kepler. Les lois de Kepler ont été formulées à l'origine pour étudier le mouvement des planètes, peuvent-être appliquées à tous corps en orbite autour d'un autre.

-Cette formule permet de calculer la masse d'un corps attracteur connaissant sa période et le rayon de l'orbite d'un de ses satellites.

-Expression du champ de pesanteur $\vec{g}$

b. Détermination de l'intensité de la pesanteur g sur un astre

A la surface d'un astre de masse m_A et de rayon R_A, la force de gravitation qui s'exerce sur un objet de masse m a comme valeur : $F=\frac{G.M_A.m}{R_A^2}$

Si la force de gravitation est assimilée au poids dont l'expression est $P = g_A.m$
Alors l'intensité de la pesanteur à la surface de l'astre A a pour expression :

$$g_A.m = \frac{G.M_A.m}{R_A^2} \quad \Rightarrow \quad g_A = \frac{G.M_A}{R_A^2}$$

Exemple sur la Terre dont la masse est M_T = 5,97 x 1024 kg et le rayon moyen

R_T = 6370 km $\quad g_T = \frac{6{,}67.10^{-11}.5{,}98.10^{24}}{(6\ 370\ 000)^2}$

g_T = 9,80 N/kg

c. Le satellite géostationnaire

Un Satellite Géostationnaire est un Satellite qui reste toujours à la verticale d'un même point **P** de la Terre. Ils sont utilisés pour la télécommunication et la météorologie.

- Le plan de l'orbite dans le référentiel géocentrique est le plan équatorial (le plan contenant l'équateur).
- Quelle est la période **T** de révolution d'un tel Satellite ?
- En déduire l'altitude **h** d'un Satellite géostationnaire.
- Période de révolution d'un Satellite Géostationnaire :

C'est la durée pour effectuer un tour dans le référentiel géocentrique :

- c'est-à-dire la durée d'un jour sidéral soit 1 j = 86164 s = 23 h 56 min 4 s

- Calculer l'altitude de révolution d'un Satellite Géostationnaire

Solution : altitude d'un satellite géostationnaire

La période d'un satellite terrestre est donnée par la formule : $T=2\pi\sqrt{\frac{R^3}{G.M_T}}$

$$T^2 = 4\pi^2\frac{R^3}{G.M_T} \quad \Rightarrow \quad R^3 = \frac{T^2 G.M_T}{4\pi^2} \quad \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{T^2 G.M_T}{4\pi^2}} \quad \text{et} \quad R = R_T + z$$

$$\Rightarrow \boxed{z = \sqrt[3]{\frac{T^2 G.M_T}{4\pi^2}} - R_T}$$

$$Z = \sqrt[3]{\frac{86164^2.6{,}67.10^{-11}.5{,}98.10^{24}}{4\pi^2}} - 6\,400.10^3$$

$Z \simeq 3{,}58.10^7$ m $\simeq$ 35 800 km

d. Détermination de la masse d'une planète

Lorsqu'un Satellite est animé d'un mouvement circulaire, autour d'une planète de masse **M**, le rayon **R** de son orbite et la période **T** de son mouvement vérifient la troisième loi de Kepler : $\boldsymbol{\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{G.M} = C^{te}}$

Les Satellites géostationnaires de la Terre ont une orbite circulaire de rayon $\mathbf{R}_G$ = 42164 km et une période $\mathbf{T}_G$ = 86164 s. Calculer la masse $\mathbf{M}_T$ de la Terre.

- La planète Mars a deux Satellites naturels, Phobos et Deimos.
- Phobos gravite à la distance $\mathbf{R}_P$ = 9380 km du centre de Mars avec une période $\mathbf{T}_P$ = 7 h 39 min.
- Deimos a une trajectoire quasi circulaire de rayon $\mathbf{R}_D$ = 23460 km et une période de révolution $\mathbf{T}_D$ = 30 h 18 min.
- Calculer la masse $\mathbf{M}_M$ de la planète Mars à partir des caractéristiques du mouvement de Phobos et de Deimos.
- Comparer les valeurs obtenues.

c)- Au cours de la mission APOLLO XVII en 1972, le module de commande en orbite autour de la Lune à une distance de 2040 km du centre de celle-ci, avait une période de 8240 s dans le référentiel Sélénocentrique.

- Calculer la masse de la Lune.

Solution :

- Masse de la Terre :

$$\boldsymbol{\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{G.M_T} = C^{te}} \Rightarrow \quad \boldsymbol{M_T} = \frac{4\pi^2 R^3}{G.T^2} = \frac{4\pi^2(42164.10^3)^3}{6{,}67.10^{-11}.(86164)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{M_T \simeq 5{,}98.10^{24}\ \text{kg.}}$$

- Masse de la planète Mars : En utilisant les caractéristiques de Phobos.

$$\boldsymbol{\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{G.M_M} = C^{te}} \Rightarrow \quad \boldsymbol{M_M} = \frac{4\pi^2 R^3}{G.{T_P}^2} = \frac{4\pi^2 (9380.10^3\,)^3}{6{,}67.10^{-11}.(2\,7540)^2}$$

$$\boldsymbol{M_M \simeq 6{,}44.10^{23}\ \text{kg}}$$

- En utilisant les caractéristiques de Deimos.

$$\boldsymbol{\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{G.M_M} = C^{te}} \Rightarrow \quad \boldsymbol{M_M} = \frac{4\pi^2 R^3}{G.{T_D}^2} = \frac{4\pi^2 (23460.10^3\,)^3}{6{,}67.10^{-11}.(109100)^2}$$

$$\boldsymbol{M_M \simeq 6{,}43.10^{23}\ \text{kg}}$$

Comparaison des valeurs calculées :

$\boldsymbol{M_M} \simeq (6{,}43 \pm 0{,}01).10^{23}$ kg

Incertitude relative $\simeq \frac{0{,}01}{6{,}43} \simeq 0{,}15$ soit 15%

- Masse de la Lune :

$$\boldsymbol{\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{G.M_L} = C^{te}} \Rightarrow \quad \boldsymbol{M_L} = \frac{4\pi^2 R^3}{G.{T_A}^2} = \frac{4\pi^2 (2040.10^3\,)^3}{6{,}67.10^{-11}.(8240)^2}$$

$$\boldsymbol{M_L \simeq 7{,}39.10^{22}\ \text{kg}}$$

3. Fonctionnement d'un GPS :

Comment fonctionne un GPS ? Explications sur son fonctionnement (geo-loc.com)

Fiche fonctionnement d'un GPS

VII. Etude énergétique d'un oscillateur harmonique de translation

En physique, un **oscillateur** est un système évoluant de part et d'autre d'un équilibre stable.

Les variations des grandeurs décrivant le système se font en fonction du temps (ces variations sont *pseudo-périodiques* s'il existe une dissipation d'énergie qui atténue progressivement l'amplitude des oscillations).

On distingue plusieurs types d'oscillateurs selon leur fonctionnement et leurs effets. Les exemples les plus courants proviennent de la mécanique classique (pendule, système masse-ressort) et de l'**électricité**, mais on les retrouve dans tous les domaines de la chimie et de la physique et notamment en mécanique quantique.

1. Energie potentielle élastique d'un ressort

Un ressort comprimé ou dilaté emmagasine de l'énergie appelée énergie potentielle élastique.

Cette énergie potentielle emmagasinée par le ressort est égale au **travail effectué par la force** qui a permis de le comprimer ou de le dilater.

L'allongement étant progressif, on peut écrire que la tension est proportionnelle à l'allongement Δl du ressort :

L'énergie potentielle élastique du ressort s'écrit $E_{pe} = \frac{1}{2} k \, \Delta l^2$

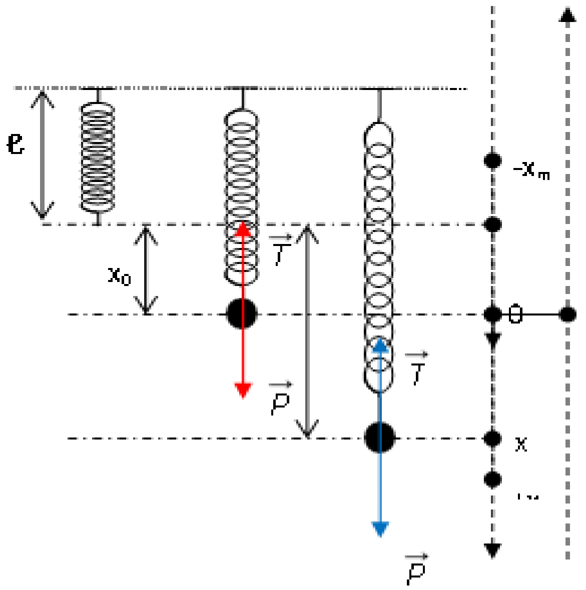
La constante k désigne la constante de raideur du ressort.

Unités :

- E_{pe} en Joule (J)
- Raideur du ressort k en Newton par mètre (N/m)
- Elongation Δl ou x en m

2. Etude du mouvement d'un oscillateur harmonique

Considérons un pendule élastique verticale constitué d'un solide de masse m attaché à l'extrémité d'un ressort de constante raideur k.



Système : $\{masse + ressort\}$

$E_M = E_c + E_{pe} + E_{pp}$

$= \frac{1}{2}mV_G{}^2 + \frac{1}{2}k.\Delta l^2 + m.g(z - z_0)$

$= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k.(x_0 + x)^2 - m.g.x$

En appliquant la conservation de l'énergie mécanique : $\frac{dE_M}{dt} = 0$

$=> \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k.(x_0 + x)^2 - m.g.x\right) = 0$

$=> \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k.(x_0^2 + 2x_0x + x^2) - m.g.x\right) = 0$

$=> \frac{1}{2}m2\dot{x}\ddot{x} + \frac{1}{2}k.2x_0\dot{x} + \frac{1}{2}k.2x\dot{x} - m.g.\dot{x} = 0$

$=> m.\dot{x}.\ddot{x} + k.x_0\dot{x} + k.x.\dot{x} - m.g.\dot{x} = 0$

$=> m.\ddot{x} + k.x_0 + k.x - m.g = 0 <=> m\left(\ddot{x} + \frac{k}{m}x\right) + k.x_0 - m.g = 0$

Avec $k.x_0 - m.g = 0$ (Principe d'inertie)

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0}$$

C'est l'équation différentielle du mouvement.

D'une manière générale l'équation différentielle d'un oscillateur mécanique de translation s'écrit

$$\boxed{\ddot{x} + {\omega_0}^2 x = 0} \qquad avec\ \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- La solution de cette équation différentielle est $\boxed{x = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi)}$
- La période propre : $\boxed{T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\dfrac{k}{m}}}$
- Fréquence propre $\boxed{N_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}}$