

SUJET TYPE FONCTION NUMERIQUE

Soient f et g les fonctions définies sur \mathbb{R} par

$$f(x) = e^x \quad \text{et} \quad g(x) = 2e^{\frac{x}{2}} - 1.$$

On note \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthogonal.

1. Démontrer que les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g ont un point commun d'abscisse 0 et qu'en ce point, elles ont la même tangente Δ dont on déterminera une équation.
2. Étude de la position relative de la courbe \mathcal{C}_g et de la droite Δ
Soit h la fonction définie sur \mathbb{R} par $h(x) = 2e^{\frac{x}{2}} - x - 2$.
 - a. Déterminer la limite de la fonction h en $-\infty$.
 - b. Justifier que, pour tout réel x , $h(x) = x \left(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{2} - 1 - \frac{2}{x} \right)$.
En déduire la limite de la fonction h en $+\infty$.
 - c. On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur \mathbb{R} .
Pour tout réel x , calculer $h'(x)$ et étudier le signe de $h'(x)$ suivant les valeurs de x .
 - d. Dresser le tableau de variations de la fonction h sur \mathbb{R} .
 - e. En déduire que, pour tout réel x , $2e^{\frac{x}{2}} - 1 \geq x + 1$.
 - f. Que peut-on en déduire quant à la position relative de la courbe \mathcal{C}_g et de la droite Δ ?
3. Étude de la position relative des courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g
 - a. Pour tout réel x , développer l'expression $(e^{\frac{x}{2}} - 1)^2$.
 - b. Déterminer la position relative des courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .
4. Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine compris entre les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.