GEOMETRIE

.

Table des matières

Partie II: Geometrie dans l'espace

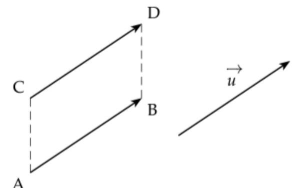
Objectifs d'apprentissage	Contenus	Observation
S'orienter dans l'espace - Manipuler les vecteurs dans l'espace. -Calculer un produit scalaire et produit vectoriel. Déterminer les équations d'une droite et d'un plan dans l'espace.	-Repérage dans l'espace d'un cube ou d'un parallélépipède -Produit scalaire : analytique et géométrique - Produit vectoriel : analytique et géométrique - Orientation dans l'espace -Equation cartésienne et équations paramétriques d'une droite dans l'espace -Equation cartésienne et équations paramétriques d'un plan dans l'espace	On encouragera les apprenants à confectionner un cube, un parallélépipède rectangle, … On incitera les apprenants à s'entraider, à manipuler des solides sous forme de Travaux Pratiques (TP).

I. Géométrie vectorielle

1. Définition d'un vecteur dans l'espace

On étend la notion de vecteur dans le plan dans l'espace.

Définition : Un **vecteur** $\vec{u}$ ou son représentant $\overrightarrow{AB}$ est défini par :



- une direction : la droite (AB) ;
- un sens : de A vers B ;
- une norme, notée $\|\vec{u}\|$: distance ou longueur AB

Propriété : Dire que le point A' est l'image du point A par la **translation** de vecteur $\vec{u}$ revient à dire que : $\overrightarrow{AA'} = \vec{u}$.

Remarques :

Les vecteurs de l'espace suivent les mêmes règles de construction qu'en géométrie plane : somme, produit par un réel, relation de Chasles, colinéarité, …

Les translations gardent les mêmes propriétés qu'en géométrie plane : conservation du parallélisme, de l'orthogonalité, du milieu, …

2. Combinaisons linéaires de vecteurs de l'espace

a) Définition

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.

Tout vecteur de la forme a$\vec{u}$ $+ b\vec{v}$ + c$\vec{w}$ avec a, b et c réels, est appelé **combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

b) Méthode

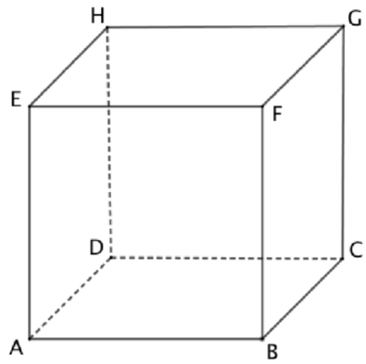
- **Représenter des combinaisons linéaires de vecteurs donnés**

A l'aide du cube ci-contre, représenter les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ donnés par :

$\vec{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{FH}$

$\vec{b} = 2\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{FC}$

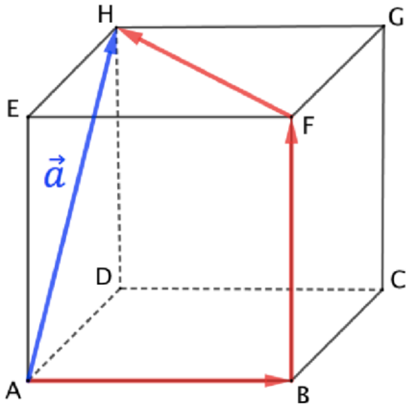
$\vec{c} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BF} - \overrightarrow{AC}$



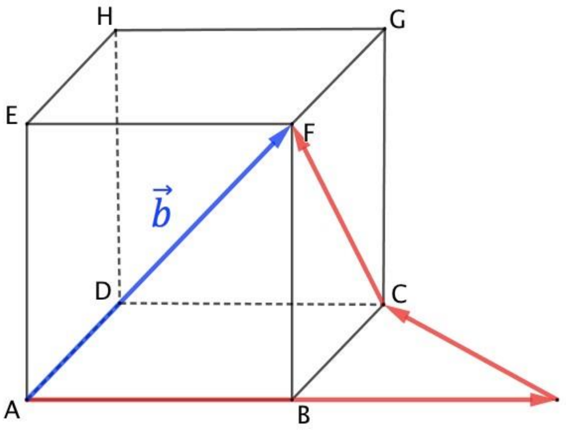
Réponse :

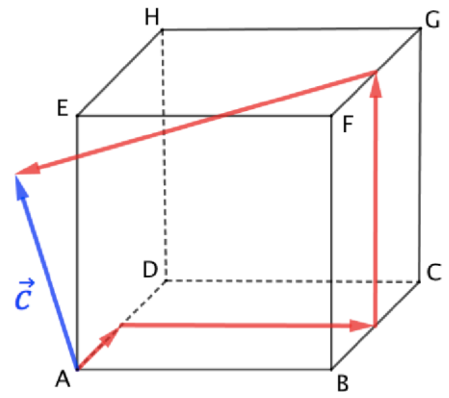
$\vec{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{FH}$

A l'aide du cube, on construit un chemin d'origine A et formé des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CG}$ (soit $\overrightarrow{BF}$) et $\overrightarrow{FH}$



$\vec{b} = 2\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{FC}$



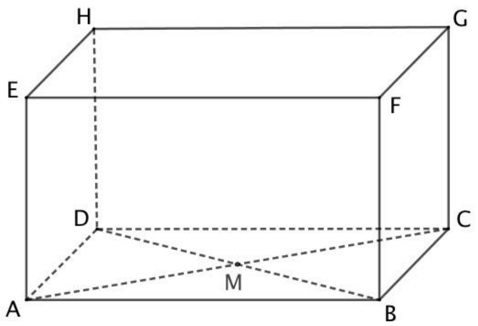


$\vec{c} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BF} - \overrightarrow{AC}$

- **Exprimer un vecteur comme combinaisons linéaires de vecteurs**

Dans le parallélépipède ci-dessous, M est le centre du rectangle $ABCD$.

Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{MG}$ et $\overrightarrow{MF}$ comme combinaisons linéaires des vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$



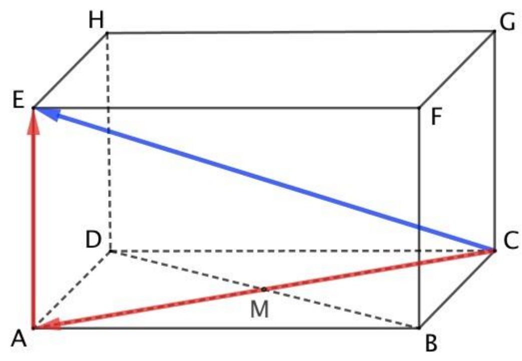
Réponse :

- On commence par construire un chemin d'origine C et d'extrémité E à l'aide des vecteurs

$\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ ou des vecteurs qui leurs sont colinéaires.

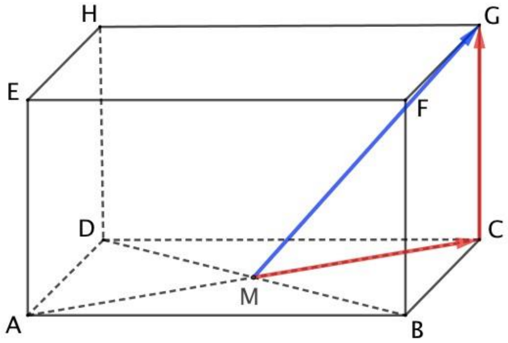
- $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE}$

  $= -2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AE}$



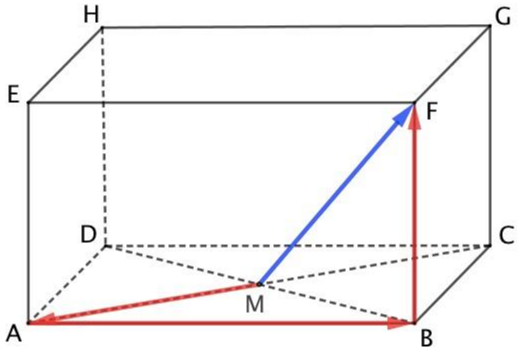
- $\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CG}$

  $= \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AE}$



- $\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$

  $= \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$



II. Produit scalaire dans l'espace

1. Produit scalaire

a) Définitions

On désigne par E l'espace et par $\vec{E}$ l'ensemble des vecteurs de l'espace.

Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace de coordonnées (x,y,z). On définit la norme du vecteur $\vec{u}$ par : $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Soient deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\vec{E}$.

On appelle produit scalaire des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le réel noté $\vec{u}.\vec{v}$ et définit par :

$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}[\|\vec{u} + \vec{v}\|2 - \|\vec{u}\|2 - \|\vec{v}\|2]$

b) Expressions du produit scalaire

- Dans un repère orthonormé, le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$(x,y,z) et

$\vec{v}$(x',y',z') est définit par :

https://www.lyceedadultes.fr/sitepedagogique/documents/math/math1spe/07_produit_scalaire_geo_reperees/07_cours_barycentre.pdf

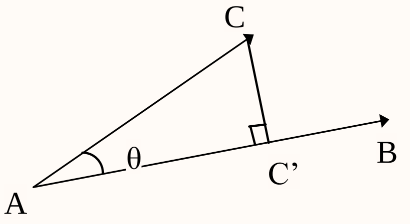
$\vec{u}.\vec{v}$= x x’ + y y’ + zz’ (Expression analytique)

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls, le produit scalaire de u et v est définit par :

$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|^2.\ \|\vec{v}\|^2\cos(\vec{u},\vec{v})$ avec $(\vec{u},\vec{v})$ la mesure de l’angle géométrique associé à u et v .

- Si $\overrightarrow{AC'}$ est le projeté de $\overrightarrow{AC}$ sur (AB) alors on a la propriété suivante :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'}$$



c) <u>Propriétés</u>

$\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ et $\vec{u}.\vec{0}$=0

$\vec{u}\ k\vec{v}$= k × $(\vec{u}.\vec{v})$

$\vec{u}\ .(\vec{v}.\vec{w})$= $\vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$

$(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2+2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$

$(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2-2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$

$(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

Attention :

$\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.\vec{w}$ ne prouve pas du tout que $\vec{v}=\vec{w}$

2. Orthogonalité dans l’espace

a) <u>Vecteurs orthogonaux</u>

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont **orthogonaux** si leurs directions sont perpendiculaires, ce qui se traduit avec le produit scalaire par : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{0}$

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de l’espace de coordonnées (x , y , z) et (x’, y’, z’) alors :

$\vec{u}.\vec{v}$= 0 ⇔ x x’ + y y’ + z z’ = 0

ATTENTION :

$\vec{u}.\vec{v}= 0$ signifie que $\vec{u}= 0$ ou que $\vec{v}= 0$ ou que u et v sont **orthogonaux**

b) Droites orthogonales

Deux droites de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonales si et seulement si : $\vec{u}.\vec{v}= 0$.

c) Vecteur normal à un plan

Un vecteur normal a un plan P est un vecteur $\vec{n}$ non nul dont la direction (qui est une droite) est orthogonale au plan P.

d) Droite orthogonale à un plan

Soient une droite D de vecteur directeur $\vec{u}$ et un plan P de vecteurs directeurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

La droite D est orthogonale à P si et seulement si pour tout point A et B de P : $\vec{u}.\overrightarrow{AB} = 0$

La droite D est orthogonale à P si et seulement si : $\vec{u}.\vec{v}= 0$ et $\vec{u}.\vec{w}= 0$.

3. Géométrie analytique

a) Expression analytique du produit scalaire

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée directe.

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$(x, y,z) et $\vec{v}$(x',y',z') est :

$\vec{u}.\vec{v}$ = xx' + yy' + zz'.

b) Equation cartésienne d'un plan

Les plans orthogonaux à un vecteur n (a,b,c) ont une équation cartésienne de la forme : ax + by + cz + d = 0 avec d réel.

Pour trouver une équation du plan P passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$, il suffit d'écrire que :

M∈P si et seulement si $\vec{n}$ $\overrightarrow{AM}$ =0.

c) Distance d'un point à un plan

Soient A un point de l'espace et P un plan passant par A et de vecteur normal non nul n. Soient M un point de l'espace et H son projeté orthogonal sur le plan P.

La distance MH est : MH=$\dfrac{|\overrightarrow{\mathbf{AM}}.\vec{\mathbf{n}}|}{\|\vec{\mathbf{n}}\|}$

Dans un repère orthonormé, la distance d du point A de coordonnées (x_0, y_0, z_0) au plan P d'équation cartésienne : ax +by + cz + d = 0 est égale à :

$$d(A, P) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Cette distance correspond à la plus petite des distances séparant M des points de P.

Application 12 :

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.

On considère les points A(0;4;1), B(1;3;0), C(2;−1;−2) et D(7;−1;4).

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u}(2;-1;3)$.

   a. Démontrer que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC).

   b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

III. Représentation paramétrique

1. Droite

Soit A(x_A , y_A , z_A) un point de la droite Δ qui a pour vecteur directeur non nul $\vec{u}(\alpha,\beta,\lambda)$.

Un point M(x,y,z) appartient à Δ si et seulement s'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM}=t\vec{u}$.

Une représentation paramétrique de Δ est donc : $\begin{cases} x = x_a + t\alpha \\ y=y_a+t\beta (t \text{ réel}) \\ z = z_a + t\lambda \end{cases}$

Réciproquement, toute représentation paramétrique de cette forme avec

(α,β ,λ)≠ (0, 0, 0) est celle d'une droite.

2. Segment et demi-droite

Soient deux points A et B tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$. Un point M(x,y,z) appartient au segment [AB] (*ou à la demi-droite [AB)*) si et seulement s'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$ avec **t appartenant à l'ensemble [0 , 1]** *(ou t appartenant à l'ensemble [0 , + ∞ [ )* **.**

La représentation paramétrique est la même que pour une droite, seul l'intervalle auquel appartient t change.

3. Système d'équations d'une droite

L'intersection de deux plans non parallèles et non confondus est une droite. On peut donc en déduire l'équation d'une droite à partir d'un système de deux équations de plan.

> Si les triplets (a, b, c) et (a', b', c') ne sont pas proportionnels, l'ensemble des points M de coordonnées (x, y, z) tels que $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$
>
> est une droite.

4. Intersection d'une droite et d'un plan

Soit la droite D de vecteur directeur non nul $\vec{u}$ (α,β ,λ). Soit un plan P d'équation : ax + by + cz + d = 0 et donc de vecteur normal $\vec{n}$ (a,b,c).

> La droite D et le plan P ont un seul point en commun si u et n ne sont pas orthogonaux, c'est à dire si aα + b β + cλ ≠ 0. Si u et n sont orthogonaux, la droite D appartient au plan P ou bien la droite D est parallèle au plan P.

Pour trouver le point d'intersection d'une droite avec un plan, il suffit de déterminer la représentation paramétrique de D et de remplacer les variables x, y et z de l'équation du plan par x(t), y(t) et z(t). On obtient une équation à une seule inconnue et on détermine t. On remplace ensuite t par sa valeur dans x(t), y(t) et z(t). On a ainsi déterminé le point d'intersection.

IV. Plans de l'espace

1. Intersection de deux plans

Soient deux plans P_1 et P_2 d'équations : $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ et $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$.

Il y a trois cas possibles dans l'espace :

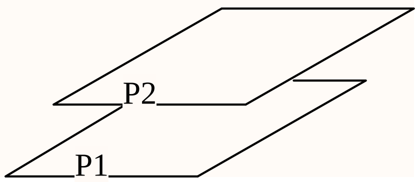
a) P_1 et P_2 sont confondus

Si P_1 et P_2 sont confondus, les équations de P_1 et P_2 correspondent à une seule et même équation.

On peut ne pas le voir au premier coup d'œil mais il suffit de vérifier que les suites de nombres (a_1,b_1,c_1,d_1) et (a_2,b_2,c_2,d_2) sont proportionnelles.

b) P_1 et P_2 sont disjoints

Si P_1 et P_2 sont disjoints, les plans sont parallèles et non confondus. Il suffit de vérifier que les triplets (a_1,b_1,c_1) et (a_2,b_2,c_2) sont proportionnels, et que d_1 et d_2 ne sont pas proportionnels (ce qui veut dire que les vecteurs normaux sont colinéaires).



c) P_1 et P_2 sont sécants

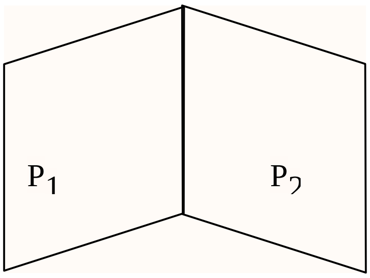
Si P_1 et P_2 sont sécants, les plans ont une droite en commun.

Dans ce cas, les triplets (a_1,b_1,c_1) et (a_2,b_2,c_2) ne sont pas proportionnels, l'ensemble des points M de coordonnées (x,y,z) tels que : $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d = 0 \end{cases}$ est une droite

Pour résoudre un tel système, il faut exprimer x et y en fonction de z par substitution.

On remplace ensuite z par t .

Le point M appartenant à la droite D a pour coordonnées (x(t), y(t), z = t). On obtient ainsi une définition paramétrique de la droite.



2. Intersection de trois plans

Soient trois plans P_1 , P_2 et P_3 d'équations :

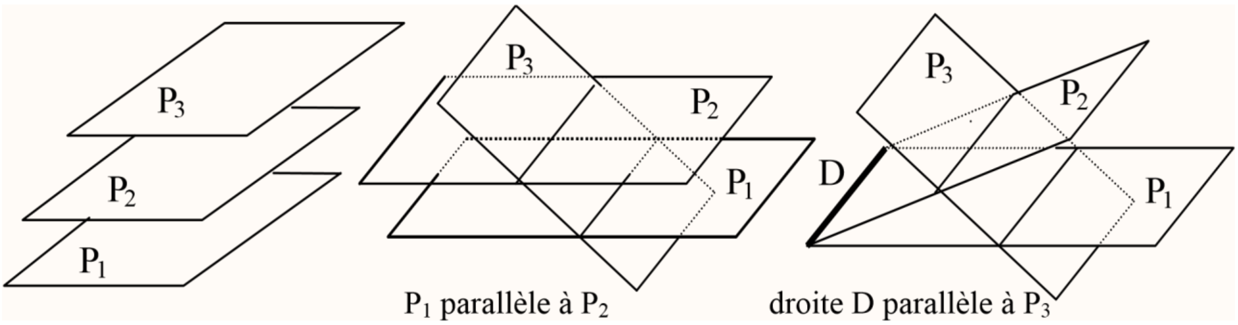
$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ et $a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0$.

Il y a quatre cas possibles dans l'espace :

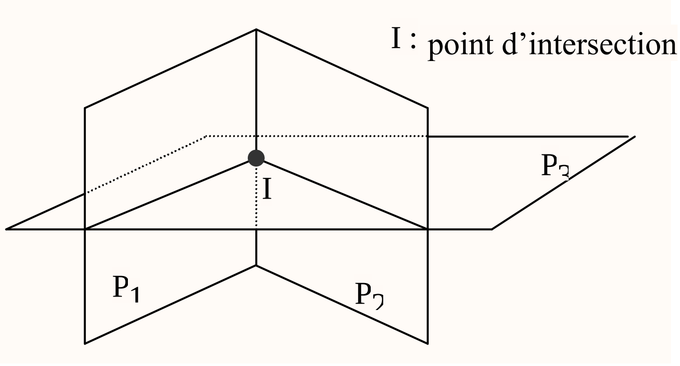
a) Tous les points en commun

Les plans sont confondus : $P_1 = P_2 = P_3$.

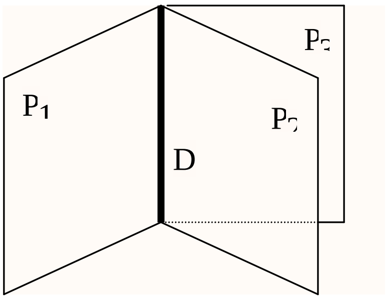
b) Aucun point commun aux trois plans



c) Un seul point commun aux trois plans



d) Une droite commune



D est l'intersection des trois plans.