ANALYSE

Table des matières

Partie II : LIMITES, CONTINUITE et DERIVABILITE

Objectifs d'apprentissage	Contenus	Observations
• Etudier la continuité, la dérivabilité et la variation d'une fonction. • Tracer la courbe représentative d'une fonction.	• Etude complète d'une fonction numérique d'une variable réelle : - ensemble de définition - Parité - Périodicité - Limites et branches infinies - Continuité en un point et sur un intervalle - Dérivabilité en un point et sur un intervalle - fonction dérivée - opérations sur les dérivées	Utiliser l'étude d'une fonction dans des problèmes concrets.

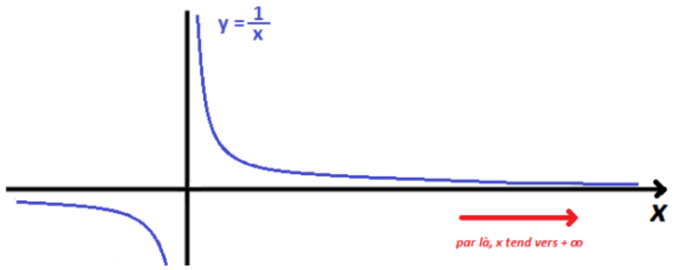
I. Limite

1. Introduction

Considérons un exemple réel concernant un élément radioactif dans un objet. Nous savons que les éléments radioactifs se dégradent (exponentiellement) au cours du temps ; par conséquent, l'élément radioactif dans un objet disparaît progressivement au cours du temps. Si l'on note $f(t)$ la quantité (masse) de l'élément radioactif dans l'objet à un instant donné t, cela signifie que la valeur de $f(t)$ tendra vers zéro lorsque t tend vers l'infini positif. Cela motive la définition de limite à l'infini.

2. Definition

La limite d'une fonction, pour simplifier, c'est « vers quoi tend » la fonction. Le plus simple est de prendre un exemple : la fonction inverse.



On voit bien que quand x tend vers $+\infty$, la fonction « tend » vers 0, c'est-à-dire qu'elle se rapproche de plus en plus de 0 sans jamais la toucher.

Et bien on appelle cela une limite, puisque la fonction « tend vers » quelque chose. On note cette limite de la façon suivante :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

3. Limite d'une fonction à l'infini

a) Limite infinie en ∞

Définition :

On dit que la fonction f admet pour **limite** $+\infty$ **en** $+\infty$, si pour *tout* x suffisamment grand $f(x)$ est aussi grand que l'on veut.

Remarque : On a une définition analogue en $-\infty$.

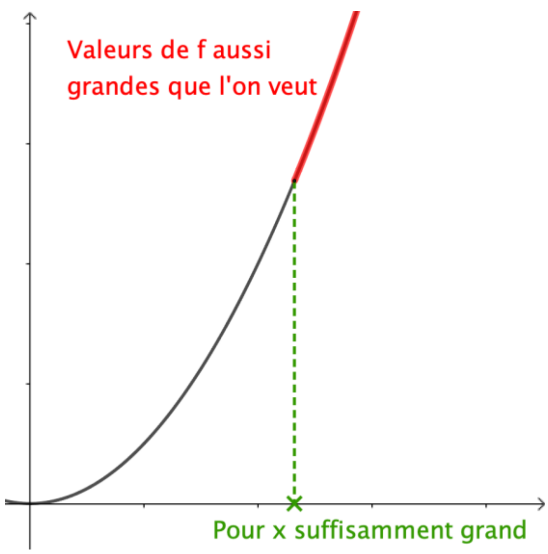
Exemple :

La fonction définie par $f(x) = x^2$ a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

On a par exemple : $f(200) = 200^2 = 40000$

$f(20000) = 20000^2 = 400\ 000\ 000$

Les valeurs de la fonction deviennent aussi grandes que l'on veut dès que x est suffisamment grand.



Si on prend un intervalle $]a\,;\,+\infty[$ quelconque, toutes les valeurs de la fonction appartiennent à cet intervalle dès que x est suffisamment grand.

Définitions :

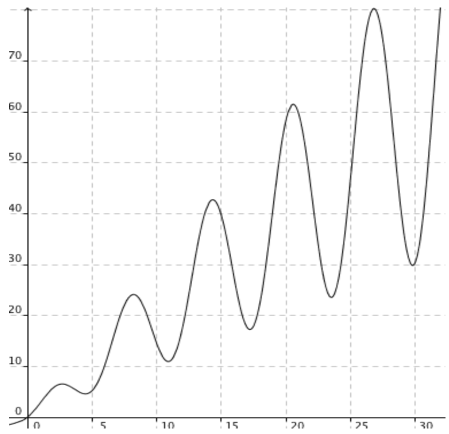
- On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle $]a\,;\,+\infty[$, pour tout réel a, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand et on note : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- On dit que la fonction f admet pour limite $-\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle $]-\infty\,;\,b[$, pour tout réel b, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand.

Notation : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

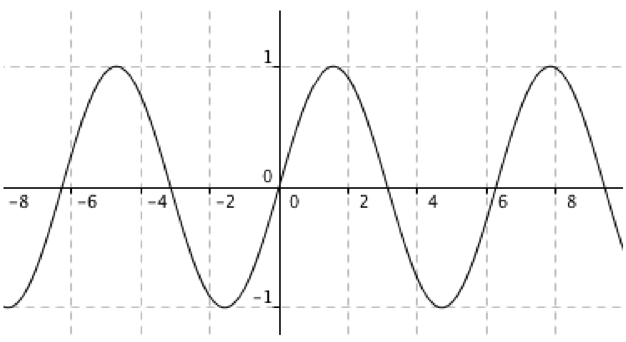
Remarques :

- Une fonction qui tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ n'est pas nécessairement croissante.

Par exemple :



- Il existe des fonctions qui ne possèdent pas de limite infinie. C'est le cas des fonctions sinusoïdales.



Limite finie en ∞

Définition :

On dit que la fonction f admet pour **limite L en** $+\infty$,

si $pour\ x\ suffisamment\ grand\ la\ valeur\ de\ f(x)$ reste le plus proche possible que l'on veut de L

Notation : $\lim\limits_{x \to +\infty} \boldsymbol{f(x) = L}$.

Remarque : On a une définition analogue en $-\infty$.

Exemple :

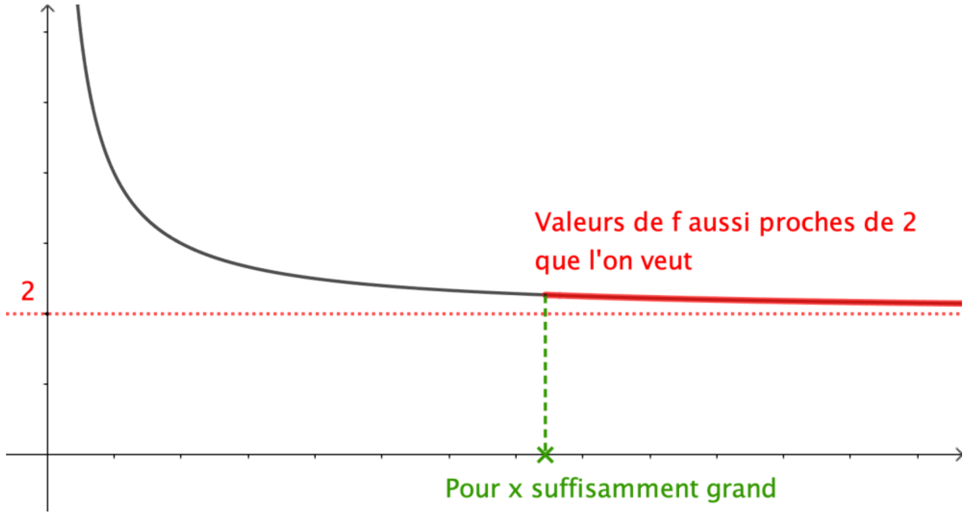
La fonction définie par $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$ a pour limite 2 lorsque x tend vers $+\infty$.

On a par exemple :

$f(400) = 2 + \frac{1}{400} = 2{,}04$

$f(100000) = 2 + \frac{1}{100000}$

$= 2{,}00001$

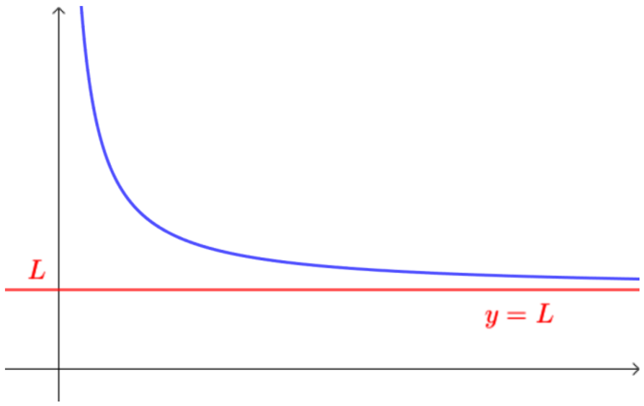


Les valeurs de la fonction se resserrent autour de 2 dès que x est suffisamment grand.

La courbe de la fonction "se rapproche" de la droite d'équation $y = 2$ sans jamais la toucher.

Si on prend un intervalle ouvert quelconque contenant 2, toutes les valeurs de la fonction appartiennent à cet intervalle dès que x est suffisamment grand.

Définition : Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$, la droite d'équation $y = L$ est appelée **asymptote horizontale** à la courbe de la fonction f en $+\infty$.



Définition :

On dit que la fonction f admet pour limite L en $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand et on note : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$.

Remarque : On a des définitions analogues en $-\infty$.

Limites des fonctions de référence

Propriétés :

- $\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$

- $\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

- $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} x^n = +\infty$ (pour n pair)

- $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty$ (pour n impair)

- $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$

- $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

b) Limite d'une fonction en un réel A

Définition

On dit que la fonction f admet pour **limite $+\infty$ en $\boldsymbol{A}$**,

si $pour\ tout$ x $suffisamment\ grand, f(x)$ est aussi grand que l'on veut.

Exemple :

La fonction définie par $f(x) = \frac{1}{3-x} + 1$ a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers le nombre 3.

On a par exemple :

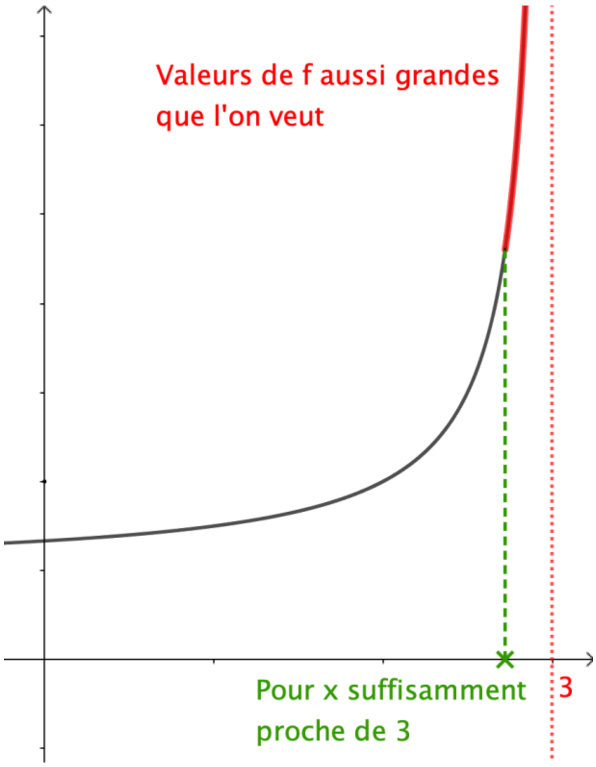
$$f(2{,}99) = \frac{1}{3 - 2{,}99} + 1 = 101$$

$$f(2{,}999) = \frac{1}{3 - 2{,}999} + 1 = 1\,001$$

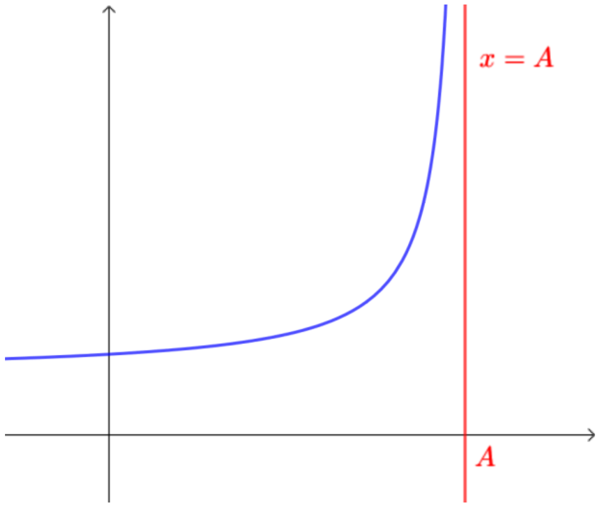
Les valeurs de la fonction deviennent aussi grandes que l'on veut dès que x est suffisamment proche de 3.

La courbe de la fonction "se rapproche" de la droite d'équation $x = 3$ sans jamais la toucher.

Si on prend un intervalle $]a\ ;\ +\infty[$ quelconque, toutes les valeurs de la fonction appartiennent à cet intervalle dès que x est suffisamment proche de 3.



Définition : Si : $\lim_{x \to A} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \to A} f(x) = -\infty$, la droite d'équation $x = A$ est appelée **asymptote verticale** à la courbe de la fonction f.



Définitions :

- On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en A si tout intervalle $]a\,;\,+\infty[$, a réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de A et on note : $\lim_{x \to A} f(x) = +\infty$.

- On dit que la fonction f admet pour limite $-\infty$ en A si tout intervalle $]-\infty\,;\,b[$, b réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de A et on note : $\lim_{x \to A} f(x) = -\infty$.

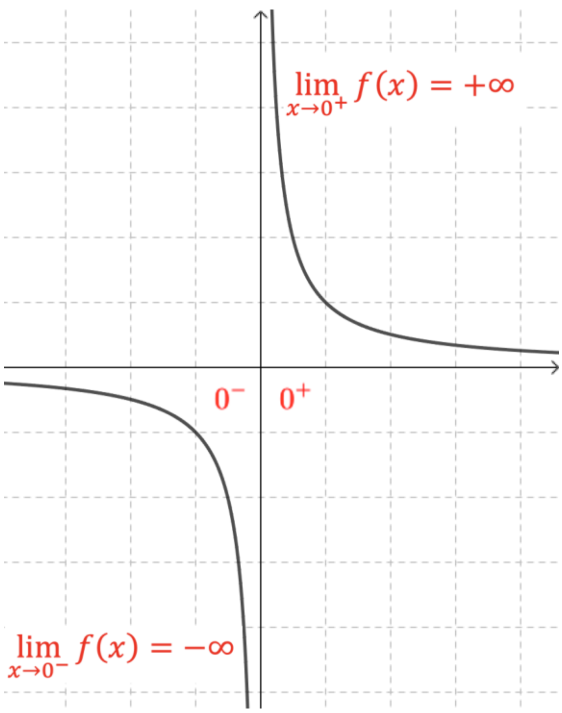
Limite à gauche, limite à droite :

Exemple :

Considérons la **fonction inverse** définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

La fonction f admet des limites différentes en 0 suivant les valeurs de x :

$x > 0$ ou $x < 0$.



● Si $x > 0$: Lorsque x tend vers 0, $f(x)$ tend vers $+\infty$ et on note :

$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

On parle de limite à gauche de 0

● Si $x < 0$: Lorsque x tend vers 0, $f(x)$ tend vers $-\infty$ et on note :

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$.

On parle de limite à droite de 0.

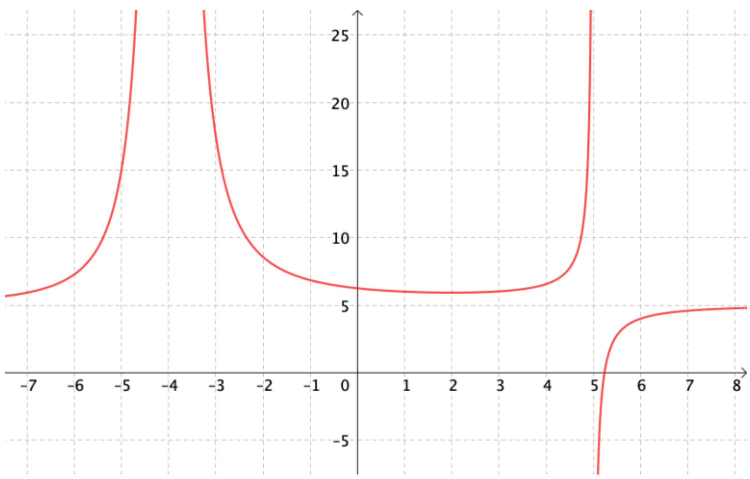
<u>Méthode :</u> Déterminer graphiquement des limites d'une fonction

On donne ci-dessous la représentation graphique de la fonction f.

a) Lire graphiquement les limites en $-\infty$, en $+\infty$, en -4 et en 5.

b) Compléter alors le tableau de variations de f.

x	$-\infty$	-4	2	5	$+\infty$
$f(x)$					



<u>Correction</u>

a) • $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 5$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 5$

La courbe de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 5$ en $-\infty$ et $+\infty$.

- $\lim\limits_{x \to -4} f(x) = +\infty$

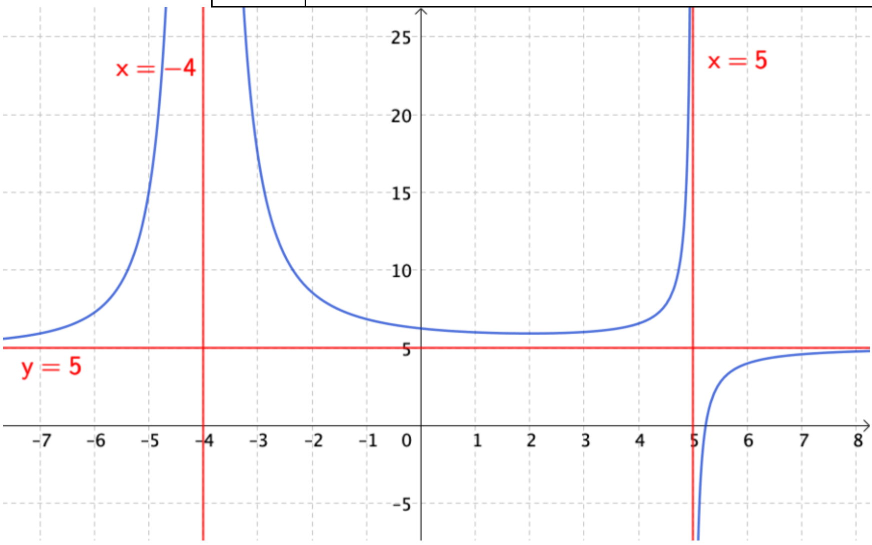
La courbe de f admet une asymptote verticale d'équation $x = -4$.

- $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 5^+} f(x) = -\infty$

La courbe de f admet une asymptote verticale d'équation $x = 5$.

b) Tableau de variation

x	$-\infty$		-4		2		5		$+\infty$
$f(x)$	5	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	6	$\nearrow$	$+\infty$ | $-\infty$	$\nearrow$	5



4. Opérations sur les limites

a) Utiliser les propriétés des opérations sur les limites

$le\ nombre\ \alpha$ désigne $+\infty$, $-\infty$ ou un nombre réel.

SOMME

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) + g(x) =$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.*

* Forme indéterminée : On ne peut pas prévoir la limite éventuelle.

PRODUIT (∞ désigne $+\infty$ ou $-\infty$)

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$	L	L	∞	0
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) =$	L'	∞	∞	∞
$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)\times g(x) =$	$L \times L'$	∞	∞	F.I.

On applique la règle des signes pour déterminer si le produit est $+\infty$ ou $-\infty$.

QUOTIENT (∞ désigne $+\infty$ ou $-\infty$)

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$	L	$L \neq 0$	L	∞	∞	0
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) =$	$L' \neq 0$	0	∞	L	∞	0
$\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)} =$	$\dfrac{L}{L'}$	∞	0	∞	F.I.	F.I.

On applique la règle des signes pour déterminer si le produit est $+\infty$ ou $-\infty$.

<u>Méthode :</u> Calculer la limite d'une fonction à l'aide des formules d'opération

Déterminer les limites suivantes : a) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x-5)(3+x^2)$ b) $\lim\limits_{x\to3^-} \frac{1-2x}{x-3}$

<u>Correction:</u>

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x-5)(3+x^2) = ?$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} x-5 = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \; donc \; \lim\limits_{x\to-\infty} 3+x^2 = +\infty \end{cases}$$

Comme limite d'un produit : $\lim\limits_{x\to-\infty} (x-5)(3+x^2) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x\to3^-} \frac{1-2x}{x-3} = ?$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to3^-} 1-2x = 1-2\times3 = -5 \\ \lim\limits_{x\to3^-} x-3 = 0^- \end{cases}$$

Une limite de la forme « $\frac{5}{0}$ » est égale à « ∞ ».

Donc, d'après la règle des signes, une limite de la forme « $\frac{-5}{0^-}$ » est égale à « $+\infty$ ».

D'où, comme limite d'un quotient : $\lim\limits_{x \to 3^-} \frac{1-2x}{x-3} = +\infty$.

b) Cas des formes indéterminées

Comme pour les suites, on rappelle que :

Les quatre **formes indéterminées** sont, par abus d'écriture :

$\infty - \infty$ $\qquad$ $0 \times \infty$ $\qquad$ $\frac{\infty}{\infty}$ $\qquad$ $\frac{0}{0}$

<u>Méthode :</u> Lever une forme indéterminée à l'aide de factorisations (1)

Calculer : $\lim\limits_{x \to +\infty} -3x^3 + 2x^2 - 6x + 1$

<u>Correction</u>

$\lim\limits_{x \to +\infty} -3x^3 + 2x^2 - 6x + 1 = ?$

• $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} -3x^3 = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} 2x^2 = +\infty. \end{cases}$

On reconnait une forme indéterminée du type "$\infty - \infty$".

• Levons l'indétermination en factorisant par le monôme de plus haut degré :

$$-3x^3 + 2x^2 - 6x + 1 = x^3\left(-3 + \frac{2}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)$$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{6}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^3} = 0.$

Donc, par limite d'une somme :

$$\lim_{x \to +\infty} -3 + \frac{2}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x^3} = -3$$

• $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} -3 + \frac{2}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x^3} = -3 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty \end{cases}$

Donc, par limite d'un produit :

$$\lim_{x \to +\infty} x^3\left(-3 + \frac{2}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = -\infty$$

Soit : $\lim\limits_{x \to +\infty} -3x^3 + 2x^2 - 6x + 1 = -\infty.$

Méthode : Lever une forme indéterminée à l'aide de factorisations (2)

Calculer: a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^2-5x+1}{6x^2-5}$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3x^2+2}{4x-1}$

Correction

a) • En appliquant la méthode précédente pour le numérateur et le dénominateur cela conduirait à une forme indéterminée du type "$\frac{\infty}{\infty}$".

• Levons l'indétermination en factorisant les monômes de plus haut degré :

$$\frac{2x^2-5x+1}{6x^2-5} = \frac{x^2}{x^2} \times \frac{2-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{6-\frac{5}{x^2}} = \frac{2-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{6-\frac{5}{x^2}}$$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5}{x^2} = 0$.

Donc, comme limite de sommes :

$$\lim_{x \to +\infty} 2-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2} = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} 6-\frac{5}{x^2} = 6$$

• Donc, comme limite d'un quotient :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{6-\frac{5}{x^2}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Soit : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^2-5x+1}{6x^2-5} = \frac{1}{3}$.

b) • Il s'agit d'une forme indéterminée du type "$\frac{\infty}{\infty}$".

• Levons l'indétermination en factorisant les monômes de plus haut degré :

$$\frac{3x^2+2}{4x-1} = \frac{x^2}{x} \times \frac{3+\frac{2}{x^2}}{4-\frac{1}{x}} = x \times \frac{3+\frac{2}{x^2}}{4-\frac{1}{x}}$$

• $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2}{x^2} = 0$

Donc, comme limite de sommes :

$$\lim_{x \to -\infty} 3+\frac{2}{x^2} = 3 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} 4-\frac{1}{x} = 4$$

• Donc, comme limite d'un quotient :

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3+\frac{2}{x^2}}{4-\frac{1}{x}} = \frac{3}{4}$$

• De plus, $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$, donc, comme limite d'un produit :

$$\lim_{x \to -\infty} x \times \frac{3 + \frac{2}{x^2}}{4 - \frac{1}{x}} = -\infty$$

Soit : $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3x^2+2}{4x-1} = -\infty$.

<u>Méthode :</u> Lever une forme indéterminée à l'aide de l'expression conjuguée

Calculer: a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ b) $\lim\limits_{x \to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$

<u>Correction</u>

a) • $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type "$\infty - \infty$".

• Levons l'indétermination à l'aide de l'expression conjuguée :

$$\begin{aligned}\sqrt{x+1} - \sqrt{x} &= \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{x})^2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}\end{aligned}$$

• Comme limite d'une somme : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} + \sqrt{x} = +\infty$.

Et donc, comme limite d'un quotient : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = 0$.

Soit $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = 0$.

b) • $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 5} \sqrt{x-1} - 2 = \sqrt{5-1} - 2 = 0 \\ \lim\limits_{x \to 5} x - 5 = 5 - 5 = 0 \end{cases}$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type "$\frac{0}{0}$".

• Levons l'indétermination à l'aide de l'expression conjuguée :

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} &= \frac{(\sqrt{x-1}-2)(\sqrt{x-1}+2)}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)} \\ &= \frac{x-1-4}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}\end{aligned}$$

$$= \frac{x-5}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x-1}+2}$$

• $\lim\limits_{x \to 5} \sqrt{x-1}+2 = \sqrt{5-1}+2 = 4$

Donc, comme limite d'un quotient, on a : $\lim\limits_{x \to 5} \frac{1}{\sqrt{x-1}+2} = \frac{1}{4}$.

Soit : $\lim\limits_{x \to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} = \frac{1}{4}$.

<u>Méthode :</u> Déterminer une asymptote

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{-2}{1-x}$.

Démontrer que la courbe représentative de la fonction f admet des asymptotes dont on précisera la nature et les équations.

<u>Correction</u>

● $\lim\limits_{x \to +\infty} 1-x = -\infty$ donc comme limite d'un quotient, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-2}{1-x} = 0$.

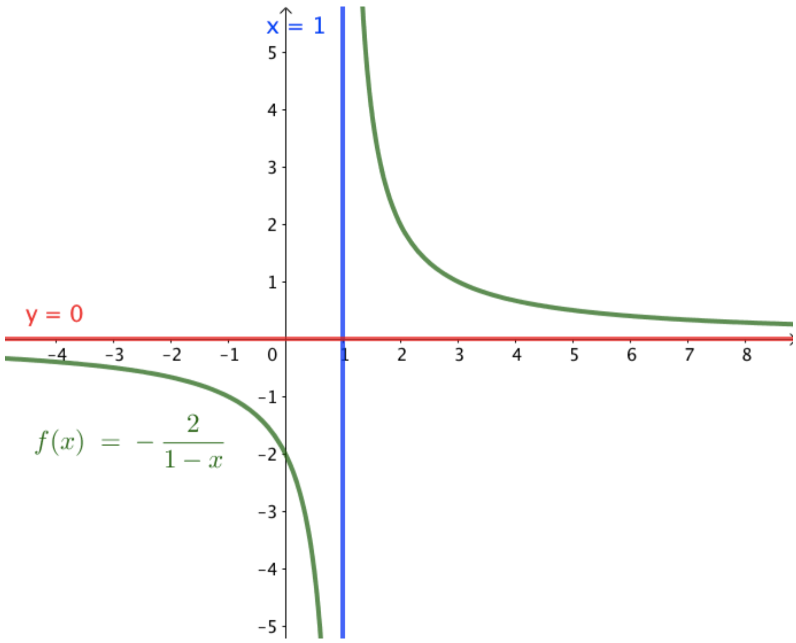
On prouve de même que : $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-2}{1-x} = 0$.

On en déduit que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

● $\lim\limits_{x \to 1^-} 1-x = 0^+$ donc comme limite d'un quotient, on a : $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{-2}{1-x} = -\infty$

Et $\lim\limits_{x \to 1^+} 1-x = 0^-$ donc comme limite d'un quotient, on a : $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{-2}{1-x} = +\infty$

On en déduit que la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à la courbe représentative de f.



Limite d'une fonction composée

<u>Méthode :</u> Déterminer la limite d'une fonction composée

Soit la fonction f définie sur $\left]\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$ par : $f(x) = \sqrt{2-\frac{1}{x}}$

Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

<u>Correction</u>

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 2-\frac{1}{x} = 2$

Donc, comme limite d'une fonction composée : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2-\frac{1}{x}} = \sqrt{2}$

En effet, si $x \to +\infty$, on a : $X = 2-\frac{1}{x} \to 2$ et donc : $\lim\limits_{X\to 2}\sqrt{X} = \sqrt{2}$.

<u>Application 3</u>: Soit la fonction f définie sur IR par $f(x)= x^2-2x+5$. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

II. Continuité

1. Continuité en un point

a) <u>Définition</u>

On considère une fonction f définie (au moins) sur un intervalle I et x_0 un point de I (on peut supposer pour l'instant que x_0 n'est pas une extrémité de I). On dira que f est continue en x_0 si :

La quantité $|f(x) - f(x_0)|$ peut être rendue aussi petite que l'on veut si $|x - x_0|$ est suffisamment petite.

Cela s'écrit : $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in I,\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Regarder si f est continue en x_0, revient à étudier les images réciproques d'intervalles de la forme $]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[$.

c) b.) Propriétés

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant a.

- f est continue en un point a si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

- On dit que f est continue à droite de a si et seulement si $\lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$
- On dit que f est continue à gauche de a si et seulement si $\lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$
- f est continue sur l'intervalle I si f est continue en tout point a de I.

- Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle est continue sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition.
- Les fonctions sinus et cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction racine carrée est continue sur $[0;+\infty[$.

d) Prolongement par continuité

Si $x_0 \notin Df$, alors f n'est pas continue en x_0 ($f(xo)$ n'existe pas).

Il se peut que f admet une limite finie en x_0, on dit alors que f est prolongeable par continuité en x_0 et la fonction y définie par :

$$\begin{cases} g(x) = f(x) \text{ pour } x \neq x_0 \\ g(x_0) = \lim_{x \to x0} f(x) \end{cases}$$

Cette fonction s'appelle prolongement par continuité de f en x_0

Exemple : Soit $f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{x-2}$

Montrez que f est prolongeable par continuité en 2 et déterminer son prolongement par continuité en g.

$x-2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$

$Df =]-\infty ; 2[U]2 ; +\infty[$

f n'est pas continue en $x_0=2$ car $2 \notin Df$

$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \dfrac{x^2-3x+2}{x-2} = \dfrac{0}{0}$

$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)} = 1$: finie

Alors, f est prolongeable par continuité en 2

$$\begin{cases} g(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-2} \\ g(2) = 1 \end{cases}$$

2. Continuité sur un intervalle

f est continue sur l'intervalle *I* si *f* est continue en tout point a de *I*.

Si *u* et *v* sont continues sur l'intervalle *I*, alors $u + v$, $u \times v$ et u^n (n entier naturel non nul) sont continues sur *I*.

$\frac{u}{v}$ est continue sur les intervalles où elle est définie.

Application 4: Soit *f* la fonction numérique définie par : $\begin{cases} x^2 - 1 & si\ x \leq 2 \\ 5 - x & si\ x > 2 \end{cases}$.Etudier la continuité de *f* sur son ensemble de définition.

III. Dérivabilité

1. Dérivabilité en un point

On dit que f est dérivable en x_0 ; $x_0 \in Df$ si et seulement si :

$$\lim_{x\to x0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \text{ existe et finie}$$

Dans ce cas, on l'appelle (la limite) dérivée de *f* en x_0, que l'on note $f'(x_0)$.

On pose $x-x_0 = h$, soit $x=x_0+h$. Si $x\to 0$ alors $h\to 0$

D'où la définition équivalente :

f est dérivable en x_0 si et seulement si :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x)-f(x_0)}{h} \text{ existe et finie}$$

- *f* est dérivable à gauche de x_0 si et seulement si :

$$\lim_{x\to x0-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \text{ existe et finie}$$

Dans ce cas, on la note $f'_g(x_0)$ (dérivé à gauche en x_0)

- *f* est dérivable à droite de x_0 si et seulement si :

$\lim\limits_{x \to x0+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et finie

Dans ce cas, on la note $f'_d(x_0)$ (dérivé à droite en x_0)

$\Rightarrow$ *f* est dérivable en x_0 si et seulement si elle l'est à gauche et à droite de x_0 et $f'_g(x_0)= f'_d(x_0)$ que l'on note tout simplement $f'(x_0)$

<u>Exemple</u> : La fonction valeur absolue d'équation $f(x) = x$ est définie sur $\mathbb{R}$. On a $f(x) = - x$ sur l'intervalle $]-\infty ; 0]$ et $f(x) = x$ sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

On obtient par calcul de limites : $f_g'(0) = -1$ et $f_d'(0) = +1$.

Ainsi la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

2. Dérivabilité sur un intervalle

a) Définition

On dit que *f* est dérivable sur un intervalle $I \in Df$ si et seulement si :
f est dérivable en tout point de *I*, c'est-à-dire $\forall x_0 \in I$, *f* est continue en x_0.

b) Propriété

- Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- La somme et le produit, le composé des fonctions dérivables est dérivable.
- Le quotient de deux fonctions dérivables est dérivable là où le dénominateur diffère de 0.

3. Fonction dérivée

a) Définition

On définit sur *I* la fonction $f: x \mapsto f'(x)$. Cette fonction f' est appelée la fonction dérivée de la fonction *f* sur *I*.

b) Dérivées usuelles

Formule de dérivation

Fonction f définie par	Fonction dérivée f' définie par
$f(x)=c$	$f'(x) = 0$
$f(x)=x$	$f'(x) =1$
$f(x)=ax$	$f'(x) = a$
$f(x)=x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x)=ax^n$	$f'(x) = anx^{n-1}$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$u=f^n$	$u' = (f^n)'=n\times f^{n-1}\times f'$
$f=u+v$	$f' = (u+v)'=u'+v'$
$f=u\times v$	$f'=(u\times v)'=u'v+v'u$
$f=\frac{u}{v}$	$f'=\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$
$f(x)=\sqrt{u(x)}$	$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$f(x)=u(ax+b)$	$f'(x)=a\times u'(ax+b)$

Dérivées des fonctions circulaires

$f(x)=\sin x$	$f'(x)=\cos x$
$f(x)=\cos x$	$f'(x)=-\sin x$
$f(x)=\sin(ax+b)$	$f'(x)=a\cos(ax+b)$
$f(x)=\cos(ax+b)$	$f'(x)=-a\sin(ax+b)$
$f(x)=tgx$	$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}=1+tg^2x$
$f(x)=\cot gx$	$f'(x)=\frac{-1}{\sin^2 x}=-(1+\cot g^2x)$

4. Variation et dérivées

Soit f une fonction définie et dérivable sur un **intervalle** I.

$f'(x) = 0$ pour tout x de I ⇔ f constante sur I .

$f'(x) \geq 0$ pour tout x de I ⇔ f croissante sur I .

$f'(x) \leq 0$ pour tout x de I $\Leftrightarrow$ f décroissante sur I .

Si $f'(x) > 0$ pour tout x de I alors f est strictement croissante sur I .

Si $f'(x) < 0$ pour tout x de I alors f est strictement décroissante sur I

Application 5 : Calculer le dérivé des fonctions suivantes :

- $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + x - 7$
- $g(x) = \dfrac{4x - 1}{7x + 2}$
- $h(x) = 4 \sin x + \cos(2x)$