# ANALYSE

## Table des matières

# Partie I : GENERALITES SUR LES FONCTION

| Objectifs d'apprentissage | Contenus | Observations |
| --- | --- | --- |
| • Etudier la continuité, la dérivabilité et la variation d'une fonction. | • Etude complète d'une fonction numérique d'une variable réelle :<br>- ensemble de définition<br>- Parité<br>- Périodicité | Utiliser l'étude d'une fonction dans des problèmes concrets. |

## I. Introduction

En mathématiques, une fonction permet de définir un résultat (le plus souvent numérique) pour chaque élément d'un ensemble appelé domaine. Ce résultat peut être obtenu par une suite de calculs arithmétiques ou par une liste de valeurs, notamment dans le cas de relevé de mesures physiques, ou encore par d'autres procédés comme les résolutions d'équations ou les passages à la limite.

Exemple: Dans un théâtre, l'achat d'un abonnement à 20000Ar permet d'avoir un tarif réduit sur les places de spectacle et de la payer 12000Ar.

Prix du spectacle pour :

$2$ places : $20000 + 2 \times 12000 =$ $44000$Ar

$4$ places : $20000 + 4 \times 12000 =$ $68000$Ar

$10$ places : $20000+10 \times 12000=140000$Ar

$x$ places : $20000 + x \times 12000 = 20000 + 12000x$ Ar

Pour un nombre de places donné, on fait correspondre le prix à payer.

Par exemple :

$2 \longmapsto 44000$

$10 \longmapsto 140000$

De façon générale, pour $x$ élèves, on note : $x \longmapsto 20000 + 12000x$

$x \longmapsto 20000 + 12000x$ se lit « à $x$, on associe $20000 + 12000x$ ».

La correspondance qu'on a établie entre $x$ et $20000 + 12000x$ peut porter un nom.

On va l'appeler $f$, et on note : $\boxed{f : x \longmapsto 20000 + 12000x}$

$f$ est appelée une **fonction**. C'est une « machine » mathématique qui, à un nombre donné, fait correspondre un autre nombre.

$x$ est appelée la **variable**.

On note également : $\boxed{f(x) = 2000 + 12000x}$

$f(x)$ se lit « $f$ de $x$ ».

$f \quad : \quad 10 \longmapsto 140000$ peut donc s'écrire : $f(10) = 140000$

On peut résumer les résultats précédents dans un tableau qui s'appelle ***tableau de valeurs***.

| $x$ | *2* | *4* | *10* |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | **44000** | **68 000** | **140000** |

# II. Définition

Le terme fonction est la notation $y = f(x)$.

Une fonction f : A → B est la donnée de deux ensembles A (le domaine) et B (l'image) et d'un procédé qui à tout $x \in$ A associe un (et un seul) y ∈ B.

On écrit : $y = f(x)$ ou x → $f(x)$.

On dit que $y$ est l'image de $x$ et que $x$ est un antécédent de $y$.

Une fonction est un procédé qui permet d'associer à un nombre $x$ appartenant à un ensemble $D$ un nombre $y$

On note : $f$ : $x$ α f(x) ou $x \rightarrow f \quad y$ ou encore $y = f(x)$

On dit que $y$ est l'image de $x$ par la fonction $f$ et que $x$ est un antécédent de $y$ par $f$.

Exemple :

$f(x) = x^2 – 2x – 15$

L'image de 7 par $f$ est $f(7) = 7^2 – 2x7 – 15 = 49 – 14 – 15 = 20$.

0 a deux antécédents : – 3 et 5 car $f(–3) = f(5) = 0$. 2 est un antécédent de –15.

# III. Domaine de définition

Pour une fonction *f(x)* donnée, on appelle ensemble de définition l'ensemble $D$ des valeurs de $x$ pour lesquelles on peut calculer cette expression.

En général, on indique seulement le procédé $x \rightarrow f(x)$, il s'agit alors déterminer le domaine de définition de f que l'on note ***Df***. On travaillera (essentiellement) sur des intervalles (ou des unions d'intervalles) de :

[a,b] = {$x \in \mathbb{R}$ / a $\leq x \leq$b} (segment), ]a,b[= {$x \in \mathbb{R}$ / a < $x$ < b} (intervalle ouvert borné), [a,+∞[= {x $\in \mathbb{R}$ / a

Exemples :

$f(x) = \frac{2x+7}{3x-4}$

Il faut que $3x - 4 \neq 0$ donc : $Df = \mathbb{R} - \{ \frac{4}{3} \} = ]-\infty ; \frac{4}{3}[ \cup ]\frac{4}{3} ; +\infty[$

On dit aussi que $\frac{4}{3}$ est une valeur interdite pour la fonction *f*.

<u>Application 1</u>: Donnez le domaine de définition des fonctions suivantes:

a($x$) = $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}$

b($x$) = $\sqrt{x - 1}$

# IV. Variation d'une fonction

Soit I un intervalle (ouvert ou fermé, borné ou non). $a, b \in$ I

Soit *f* une fonction définie sur I. On dit que :

- *f* est croissante sur I si, et seulement si : $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$
- *f* est décroissante sur I si, et seulement si : $a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$
- *f* est monotone sur I si, et seulement si *f* est croissante ou décroissante sur I.

<u>Remarque</u> :

Une fonction croissante conserve la relation d'ordre et une fonction décroissante inverse la relation d'ordre.

Pour montrer la monotonie d'une fonction sur I, on prendra deux réels $a, b \in$ I tel que $a > b$ et l'on étudiera le signe de $f(a) - f(b)$. Si le signe est positif la fonction est croissante, si le signe est négatif la fonction est décroissante.

<u>Exemple</u> :

La fonction affine *f* définie par : $f(x) = 2x + 3$ est croissante sur R car son coefficient directeur est positif.

La fonction $g$ définie par $g(x) = \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0 ; +\infty[$ ou $]-\infty ; 0[$.

# V. Parité d'une fonction

## 1. Fonction Paire

On dit qu'un fonction *f* est paires si et seulement si l'on a :

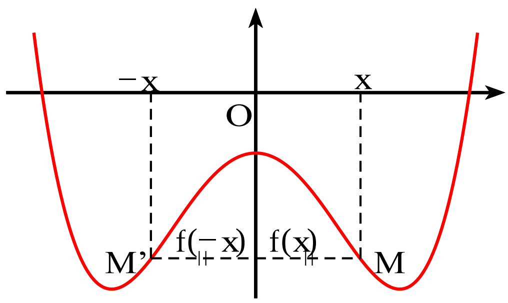
Son ensemble de définition *Df* est symétrique par rapport à l'origine.

$\forall x \in Df$ , $f(-x) = f(x)$

La courbe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Exemples : Les fonctions suivantes sont paires sur leur ensemble de définition :

$f(x) = x^2$, $f(x) = 5x^4 + 3x^2 - 1$, $f(x) = |x|$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$




Remarque : Ces fonctions sont dites « paires » car les fonctions polynômes qui ne contiennent que des puissances paires sont paires.

## 2. Fonction impaire

On dit qu'un fonction *f* est impaire si et seulement si l'on a :

Son ensemble de définition *Df* est symétrique par rapport à l'origine.

$\forall x \in Df$ , $f(-x) = -f(x)$

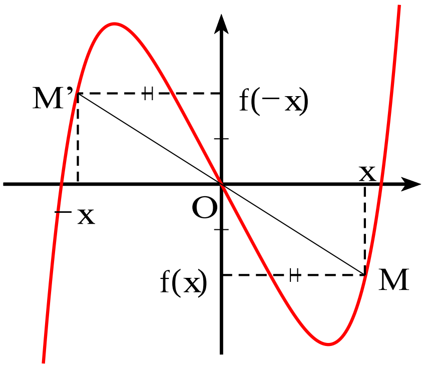
La courbe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.

Exemples :

Les fonctions suivantes sont impaires sur leur ensemble de définition :

$f(x) = x^3$, $f(x) = 4x^3 - 3x$ , $f(x) = \frac{1}{x}$ , $f(x) = \sin x$, $f(x) = \tan x$

**Remarque :** Ces fonctions sont dites « impaires » car les fonctions polynômes qui ne contiennent que des puissances impaires sont impaires.




Application 2 : Étudier la parité de $f(x) = \sin(3x)$

# VI. Periodicité d'une fonction

Soit D un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur D et T $\in\mathbb{R}$ un nombre réel donné. On dit que f est périodique de période T lorsque les 2 conditions suivantes sont vérifiées :

- Pour tout $x\in\mathbb{R}$ : [ $x\in D$ ssi $x+T \in D$ ]
- et pour tout $x\in D$ : [ $f(x+T) = f(x)$ ]

Remarque : Pour construire la courbe d'une fonction périodique f de période T $\in\mathbb{R}$ , on construit (une portion de) la courbe sur un intervalle de longueur T, puis on duplique indéfiniment cette portion à droite et à gauche.

On dit qu'on a réduit le domaine d'étude à un intervalle de longueur T de *Df*.

Exemple : Pour construire sur $\mathbb{R}$ la fonction périodique de période T = 2 et définie pour $x \in[-1 ;+1]$ par : $f(x)=1-x2$ , il suffit de construire la courbe de f sur un intervalle de longueur une période, ici $[-1 ;+1]$ , puis dupliquer indéfiniment.