Mathématiques 1S

Trigonométrie

CERCLE TRIGONOMETRIQUE

Partie II: CERCLE TRIGONOMETRIQUE

Objectifs d'apprentissages	Contenus	Observations
• Utiliser convenablement les formules trigonométriques face à une situation donnée.	• Cercles trigonométriques • Mesure principale d'un angle orienté. • Formules trigonométriques	Formules : - des angles associés - d'addition - de duplication

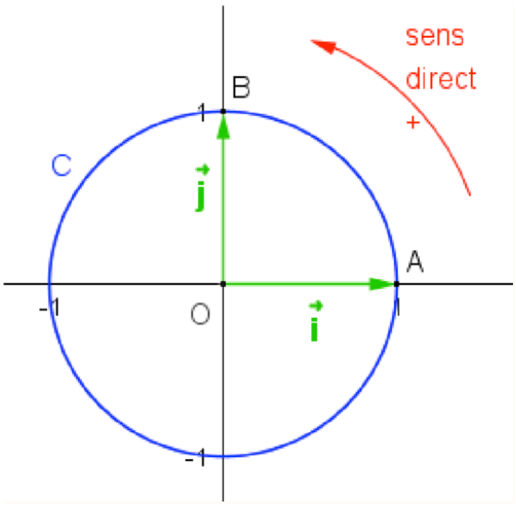
I. Cercle trigonométrique

1. Définition

Le cercle trigonométrique est un cercle qui permet d'illustrer et de définir des notions comme celles d'angle, de radian et les fonctions trigonométriques : cosinus, sinus, tangente. Il s'agit du cercle dont le rayon est égal à 1 et qui est centré sur l'origine du repère, dans le plan usuel muni d'un repère orthonormé.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ; i ; j) et orienté dans le sens direct, le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1.

Sur un cercle, on appelle sens direct, sens positif ou sens trigonométrique le sens contraire des aiguilles d'une montre.



2. Propriété :

Un angle plein (tour complet) mesure 2π radians.

Démonstration :

La longueur du cercle trigonométrique est égale à 2π.

En effet, son rayon est 1 donc $P = 2\pi R = 2\pi \times 1 = 2\pi$.

Or la longueur d'un arc et la mesure de l'angle qui l'intercepte sont proportionnelles. Comme 1 radian est la mesure de l'angle qui intercepte un arc de longueur 1 sur le cercle trigonométrique, on en déduit que la mesure de l'angle plein est égale à 2π radians.

3. Correspondance degrés et radians

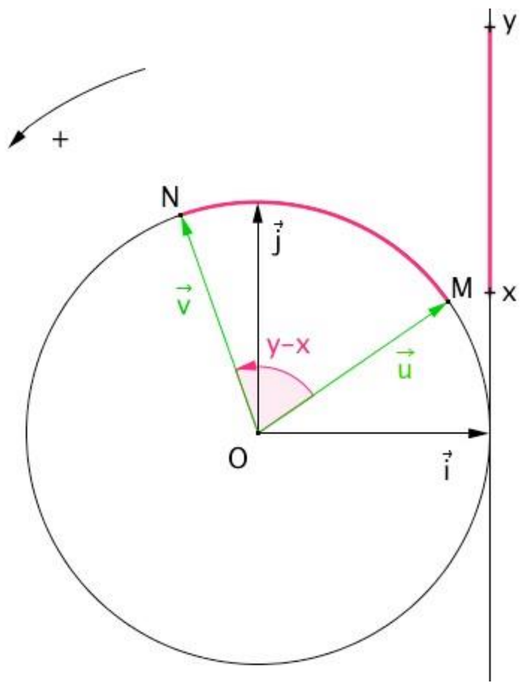
Ainsi, à 2π radians (tour complet), on fait correspondre un angle de 360°. Par proportionnalité, on obtient les correspondances suivantes :

Mesure en degrés	0	30°	45°	60°	90°	180°	360°
Mesure en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

II. Angle orienté

1. Mesures

a. Cas d'angles orientés de norme 1



On munit le plan d'un repère orthonormé (O ; i ; j) et orienté dans le sens direct.

On considère le cercle trigonométrique de centre O.

Au point d'abscisse x de la droite d'enroulement, on fait correspondre le point M du cercle.

Au point d'abscisse y de la droite d'enroulement, on fait correspondre le point N du cercle

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont les vecteurs de norme 1 tels que $\vec{u} = OM$ et $\vec{u} = ON$.

Définition : Une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ est $y - x$.

Propriété : On note α une mesure de l'angle orienté (u , v).

Toute mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ est de la forme $\alpha + 2k\pi$ où k est un entier relatif.

Exemple : On fait correspondre le point M du cercle à deux points d'abscisses x et x' de la droite d'enroulement.

On a : $x' = x + 2k_1\pi$ où k_1 est un entier relatif.

On fait correspondre le point N du cercle à deux points d'abscisses y et y' de la droite d'enroulement.

On a : $y' = y + 2k_2\pi$ où k_2 est un entier relatif.

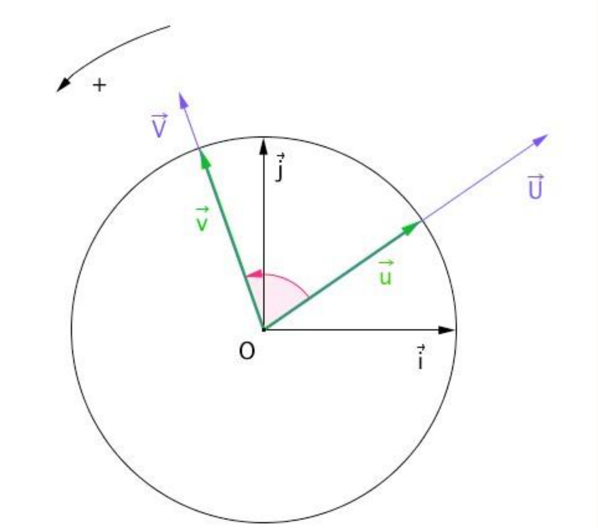
Alors $y - x$ et $y' - x'$ sont deux mesures de l'angle orienté (u ; v).

Et on a : $y' - x' = y - x + 2(k_2 - k_1)\pi = y - x + 2k\pi$ en posant $k = k_2 - k_1$.

b. Cas d'angle orientés quelconques (et non nuls)

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de norme 1 et respectivement colinéaires à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.



Définition : Une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ est égale à une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$

c. Mesure principale d'un angle orienté

La mesure principale d'un angle orienté est la mesure, qui parmi toutes les autres, se situe dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$.

Exemple : Une mesure d'un angle orienté est 5π.

D'autres mesures sont : $5\pi - 2\pi$; $5\pi - 4\pi$; $5\pi - 6\pi$; … soit : 3π ; π ; $-\pi$; … π est donc la mesure principale de cet angle orienté.

2. Propriété

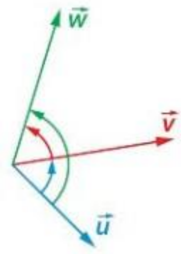
a. Angle nul, angle plat

Propriétés : Pour tout vecteur non nul $\vec{u}$, on a :

- $(\vec{u}, \vec{u}) = 1$
- $(\vec{u}, -\vec{u}) = \pi$

b. Relation de Chasles

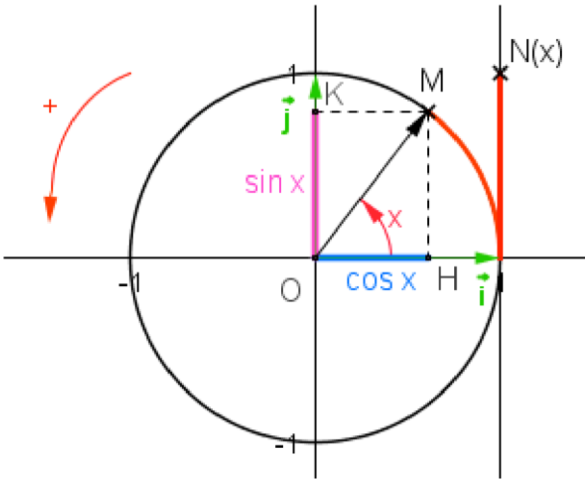
Propriété : Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ non nuls, on a: $(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w})$



3. Cosinus et sinus d'un angle

a. Définition

Dans le plan muni d’un repère orthonormé (O ; i ; j) et orienté dans le sens direct, on considère un cercle trigonométrique de centre O.



Pour tout nombre réel x, considérons le point N de la droite orientée d’abscisse x.

À ce point, on fait correspondre un point M sur le cercle trigonométrique.

On appelle H et K les pieds respectifs des perpendiculaires à l’axe des abscisses et à l’axe des ordonnées passant par M.

- Le cosinus du nombre réel x est l’abscisse de M et on note **cos**x
- Le sinus du nombre réel x est l’ordonnée de M et on note **sin**x.

b. Valeurs remarquables des fonctions sinus et cosinus :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et x une mesure de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$.

On a : $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \cos x$ et $\sin(\vec{u}, \vec{v}) = \sin x$.

Le cosinus (respectivement le sinus) de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ est le cosinus (Respectivement le sinus) d'une de ses mesures.

c. Propriétés

Pour tout nombre réel x, on a :

1) $-1 \leq \cos x \leq 1$ 2) $-1 \leq \sin x \leq 1$ 3) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

4) $\cos x = \cos(x + 2k\pi)$ où k entier relatif 5) $\sin x = \sin(x + 2k\pi)$ où k entier relatif

4. Cosinus et sinus d'angles associés

a. Définition

Deux angles sont dits associés s'ils admettent des cosinus et des sinus égaux ou opposés.

b. Propriétés

Pour tout nombre réel x, on a :

1) $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$

2) $\cos(\pi + x) = -\cos x$ et $\sin(\pi + x) = -\sin x$

3) $\cos(\pi - x) = -\cos x$ et $\sin(\pi - x) = \sin x$

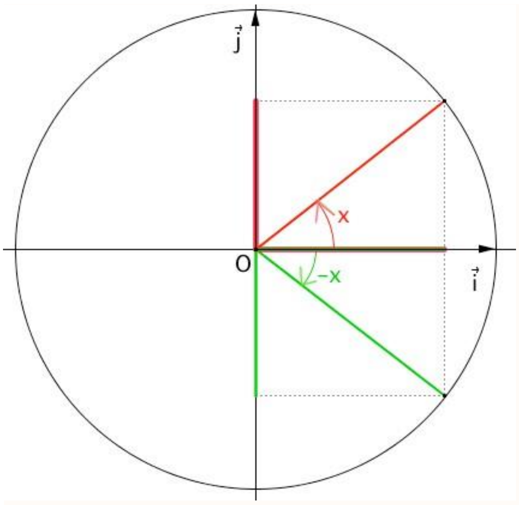
4) $(\cos \frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$ et $\sin \frac{\pi}{2} + x = \cos x$

5) $(\cos \frac{\pi}{2} - x) = \sin x$ et $\sin \frac{\pi}{2} - x) = = \cos x$

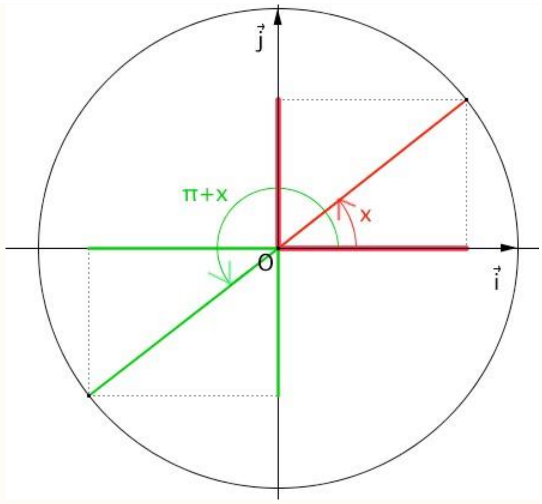
Démonstrations :

Par symétries, on démontre les résultats :

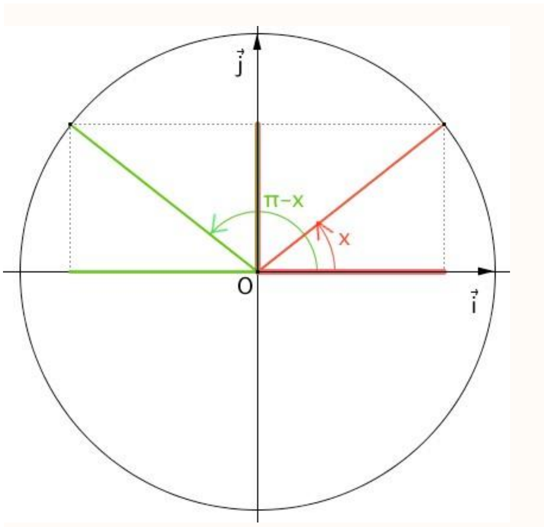
1)



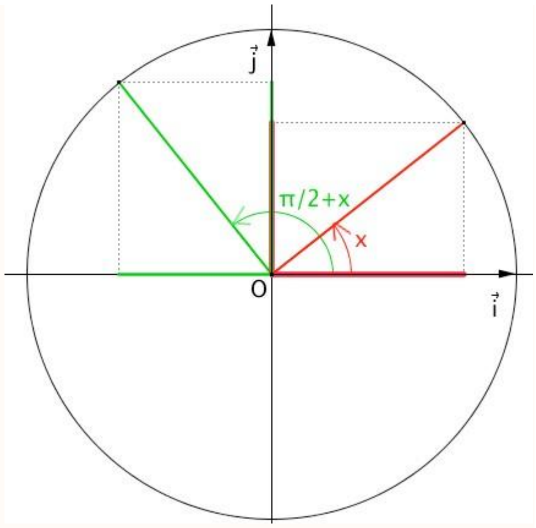
2)



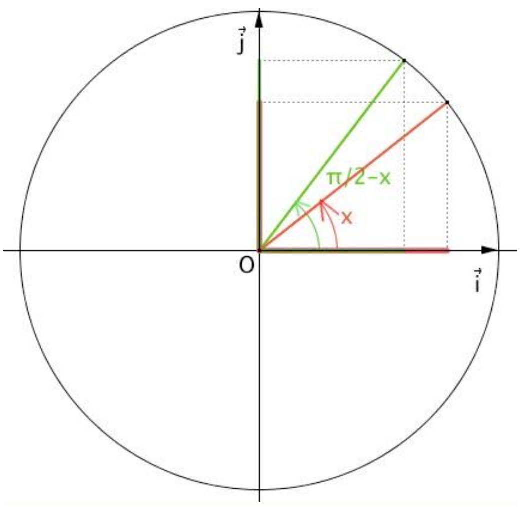
3)



4)



5)



III. Formule trigonometrique

1. Produit scalaire

a. Définition

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls quelconques du plan.

On pose $(\widehat{\vec{u} \text{ et } \vec{v}} = \alpha(\alpha\epsilon[0\ ;\pi])$.

On a : $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \|\vec{u}\| x\ \|\vec{v}\| \text{x} \cos\alpha$

b. Propriété

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls du plan orienté. θ est une mes ure en radians de l'angle orienté $(\vec{u}\,.\vec{v})$

On a : $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \|\vec{u}\| x\ \|\vec{v}\| \text{x} \cos\alpha$

$\vec{u}\,.\,\vec{v} = \|\vec{u}\| x\ \|\vec{v}\| \text{x} \cos(\vec{u}\,.\,\vec{v})$

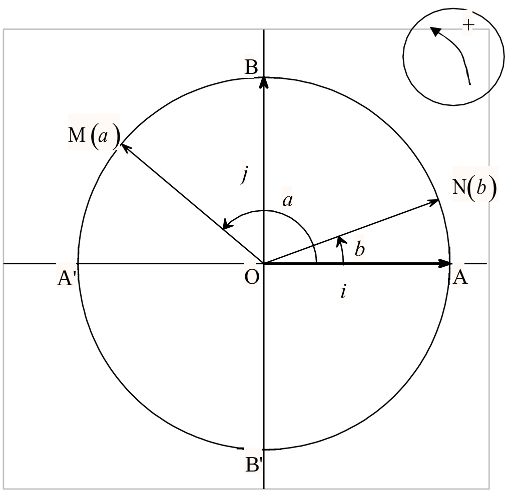
2. Formule d'addition

a. Cosinus

<u>Cosinus de la différence de deux réels</u>

<u>Hypothèses :</u>

Le plan orienté est muni d'un repère orthonormé direct (O ; i ; j), a et b sont deux réels quelconques. M est l'image de a sur le cercle trigonométrique. N est l'image de b sur le cercle trigonométrique.



But :

Calculer de deux manières le produit scalaire $\overrightarrow{ON}\,.\overrightarrow{OM}$

1ère manière : $\overrightarrow{ON}\,.\overrightarrow{OM}$= ON . OM . cos(ON ; OM)

$\overrightarrow{ON}\,.\overrightarrow{OM}$= ($\overrightarrow{ON}\,.\overrightarrow{OA}$) + ($\overrightarrow{OA}\,.\overrightarrow{OM}$) (relation de Chasles pour les angles orientés)

$\overrightarrow{ON}\,.\overrightarrow{OM}$= – b + a = a - b

On a donc $\overrightarrow{ON}\,.\overrightarrow{OM}$= cos = (a - b).

2ème manière :

On utilise le repère orthonormé direct (O, ,i j)

M$\left|\begin{matrix} x_{M=} cos\ a \\ y_{M=}\ sin\ a \end{matrix}\right.$ N$\left|\begin{matrix} x_{N=} cos\ b \\ y_{N=}\ sin\ b \end{matrix}\right.$

On a donc $\overrightarrow{ON}\,.\overrightarrow{OM}$= cos a x con b + sin a x sin b = (expression analytique du produit scalaire).

Cos (a – b) = cos a x con b + sin a x sin b

Cosinus de la somme de deux réels

Cos (a+b) = cos a[a – (-b)]

= cos a . cos (-b) + sin a . sin (-b)

= cos a . cos b +sin a . (-sin b)

Cos (a + b) = cos a . con b - sin a . sin b

b. Sinus

Sinus de la somme de deux réels

Sin (a+b) = cos [$\frac{\pi}{2}$ – (a + b)]

= cos [($\frac{\pi}{2}$ – a) - b] or cos [($\frac{\pi}{2} - x$) = sin x

= cos ($\frac{\pi}{2}$ – a) . cos b + sin [($\frac{\pi}{2}$ – a) . sin b

Sin (a + b) = sin a. cos b + sin b. cos a

Sinus de la différence de deux réels

Sin (a – b) = sin [a+ (-b)]

= sin a . cos(-b) + sin (-b) . cos a

= sin a . cos b + (-sin b) . cos a

Sin (a – b) = sin a . cos b - sin b . cos a

3. Formule de duplication

a. Rappel

Relation fondamentale: $\forall x \in \mathbb{R}$ $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$\cos^2 x = (\cos x)^2$

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

b. Cosinus du double d'un réel

$a \in \mathbb{R}$

Astuce de départ : $\cos 2^a = \cos (a + a)$

1ère expression: formule d'addition

$\text{Cos } 2a = \cos a \,.\, \cos a - \sin a \,.\, \sin a$

$= \cos^2 a - (\sin^2 a)$

2ème expression :

On utilise l'égalité $\sin^2 a = 1 - \cos^2 a$

$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$

3ème expression:

On utilise l'égalité $\cos^2 a = 1 - \sin^2 a$

$\cos 2a = 1 - \sin^2 a$

c. Sinus du double d'un réel

Sin 2a = sin (a + a)

Sin 2a = sin a . cos a + sin a.cos a

Sin 2a = 2sin a.cos a

On a **sin 2a = 2sin a. cos a**

2sin a. cos a désigne le produit de 2 par sin a par cos a.

Dans un produit, les facteurs peuvent être écrits dans n'importe quel ordre donc on peut tout aussi bien écrire sin 2a = 2cos a. sin a.

Application 2:

A l'aide des formules trigonométriques, calculer :

- : $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$
- $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\sin \frac{\pi}{8}$