ALGEBRE : Système d'équation

Table des matières

Partie IV : Système d'équation

Objectifs d'apprentissage	Contenus	Observations
• Analyser et modéliser un problème concret sous la forme d'un système d'équations (maximum à 4 inconnues)	• Système d'équations à 4 inconnues	• Méthode recommandée : Pivot de Gauss

I. Introduction

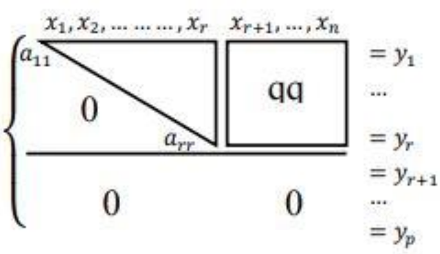
Un système linéaire de n équations à p inconnues est un ensemble d'équations dont chacun des équations a p inconnues.

II. Technique du pivot de Gauss

La méthode du pivot de Gauss permet la résolution générale des systèmes d'équations linéaires à n Équations et p inconnues. Elle s'utilise notamment pour leur résolution numérique à l'aide d'un programme informatique, et permet la résolution de systèmes comptant un grand nombre d'inconnues et d'équations (plusieurs centaines, voire plusieurs milliers). Dans tous les cas, la méthode du pivot de Gauss permet de déterminer si le système a des solutions ou non (et notamment de savoir s'il est un système de Cramer lorsque n = p). Lorsque le système a des solutions, la méthode du pivot permet de les calculer. Notamment, si n = p et si le système a une solution unique (système de Cramer), on peut la calculer de manière beaucoup plus économique (en nombre d'opérations) que par les formules de Cramer. Lorsque la solution du système n'est pas unique, la méthode du pivot permet d'exprimer les solutions à l'aide des inconnues principales.

1. Systèmes échelonnés

Systèmes de la forme



a) Propriétés clés :

Le système échelonné (S) possède des solutions si et seulement si les *équations de compatibilité* $0 = y_{r+1} = y_{r+2} = y_p$ sont satisfaites (portant sur les données).

Si ces conditions sont satisfaites alors toute donnée des *inconnues non principales* x_{r+1} , … , x_n détermine une *unique* solution de (S) .

⇔ Les solutions de (S) sont paramétrées par les inconnues principales.

Les inconnues $x_1, \dots, x_r$ s'appellent les *inconnues principales*, ou *pivots*.

b) Preuve

On fait passer les inconnues non principales dans le second membre et on résout le système triangulaire de Cramer en $x_1, \dots, x_r$.

2. La méthode du pivot

a) Théorème de Gauss-Jordan

Tout système linéaire se ramène à un système échelonné équivalent en utilisant trois types d'opérations élémentaires :

- Intervertir deux équations : $L_i \leftrightarrow L_j$,
- Intervertir l'ordre des inconnues,
- Remplacer une équation L_i par $L_i + \lambda L_j$.

b) La technique du pivot :

On décrit l'algorithme qui permet d'échelonner un système linéaire quelconque.

$$(S) = \begin{cases} \boxed{a_{11}} x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1 & L_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = y_2 & L_2 \\ \cdots & \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n = y_p & L_p \end{cases}$$

- Si $a_{11} \neq 0$, on garde L_1 et on utilise en *pivot*.

On remplace L_2 par $L_2 - \dfrac{a_{p1}}{a_{11}} = L'_2$ … jusqu'à $L_p - \dfrac{a_{p1}}{a_{11}} L_1 = L'_p$.

Et on continue avec le sous système $L'_2, \dots, L'_p$ avec les inconnues $x_2, \dots, x_n$.

- Si $a_{11} = 0$, on intervertit 2 lignes ou 2 inconnues pour ramener un coefficient différent de 0 en haut à gauche. Cela s'arrête quand le 1er membre du système restant à traiter est nul.

Les systèmes restent *équivalents* : ils ont même espace des solutions, car chaque opération élémentaire s'inverse.

Attention : Il est essentiel de pouvoir faire ses opérations de manière *séquentielle*, et non simultanément, pour conserver l'espace de solution et avoir ainsi des systèmes équivalents. Par exemple un système à trois équations :

(S) : L1, L2, L3 implique (S') : $L'_1 = L_1 - L_2$, $L'_2 = L_2 - L_3$, $L'_3 = L_3 - L_1$,

mais (S') n'implique pas (S) en général : on ne peut pas revenir aux équations de départ en partant des L'_i. Ces nouvelles équations sont liées car $L'_1 + L'_2 + L'_3 = 0$!

Application 5 :

Résoudre les systèmes linéaires suivants en utilisant la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$$