ALGEBRE : Equation du second degré

Table des matières

Partie I : Equation du second degré

Objectifs d'apprentissage	Contenus	Observations
• Résoudre des équations du second degré sans/avec paramètre d'une manière performante	• Equations du second degré sans paramètre • Equations du second degré avec paramètre	• La résolution d'une équation bicarrée doit être traitée sous forme d'exercices. • On déterminera aussi les racines d'une équation du second degré sachant leur somme et leur produit.

I. Définition

On appelle équation du second degré toute égalité définie sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme: $ax^2 + bx + c = 0$ où les coefficients a, b et c sont des réels donnés avec $a \neq 0$.

Exemples et contre-exemples :

$$\left.\begin{array}{l} 3x^2 - 7x + 3 = 0 \\ \frac{1}{2}x^2 - 5x + \frac{3}{5} = 0 \\ 4 - 2x^2 = 0 \\ (x-4)(5-2x) = 0 \end{array}\right\} \text{ sont des équations du second degré.}$$

$5x - 3 = 0$ est une équation du premier degré

$5x^4 - 7x^3 + 3x - 8 = 0$ est une équation de degré 4.

II. Equation du seconde degré sans paramètre

1. Forme canonique

Propriété : Tout équation du second degré défini sur $\mathbb{R}$ par $ax^2 + bx + c = 0$ peut s'écrire sous la **forme canonique** : $a(x-\alpha)^2 + \beta = 0$, où α et β sont deux nombres réels.

Démonstration :

$ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$

Cette équation est donc équivalente à :

$$a\left[x^2 + \frac{b}{ax}\right] + c = 0$$

$$a[x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2\ ] + c = 0$$

$$a[(x+\frac{b}{2a})^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2]+c=0$$

$$a[(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{a\,b^2}{4a^2}]+c=0$$

$$a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2}{4a}+c=0$$

$$a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=0$$

$\boldsymbol{a(x-\alpha)^2+\beta=0}$ **avec** $\boldsymbol{\alpha=-\frac{b}{2a}}$ **et** $\boldsymbol{\beta=-\frac{b^2-4ac}{4a}}$**.**

Application 1: Soit l'équation définie par : $2x^2-20x+10=0$.

Exprimer l'équation sous sa forme canonique

2. Résolution d'une équation du second degré

a) Résolution par discriminant

Définition : On appelle **discriminant** de ax^2+bx+c, le nombre $\boldsymbol{\Delta=b^2-4ac}$**.**

Propriété :

Soit Δ le discriminant de ax^2+bx+c.

- **Si $\Delta<0$** : L'équation $ax^2+bx+c=0$ n'a pas de solution réelle.

- **Si $\Delta=0$** : L'équation $ax^2+bx+c=0$ a une unique solution : $x_0=\frac{-b}{2a}$.

- **Si $\Delta>0$** : L'équation $ax^2+bx+c=0$ a deux solutions distinctes :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Démonstration :

On a vu que l'équation définie sur $\mathbb{R}$ par $ax^2+bx+c=0$ peut s'écrire sous sa forme canonique :

$a(x-\alpha)^2+\beta$ avec $\alpha=-\frac{b}{2a}$ et $\beta=-\frac{b^2-4ac}{4a}$.

Donc :

$ax^2+bx+c=0$ peut s'écrire :

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=0$$

$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}=0$

$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a}$

$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2}$ car a est non nul.

- Si Δ < 0 : Comme un carré ne peut être négatif $\left(\frac{\Delta}{4a^2}<0\right)$, alors l'équation $ax^2+bx+c=0$ n'a pas de solution.

- Si Δ = 0 : L'équation $ax^2+bx+c=0$ peut s'écrire :

$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$. Alors, l 'équation n'a qu'une seule solution : $x_0=\frac{-b}{2a}$

- Si Δ > 0 : L'équation $ax^2+bx+c=0$ est équivalente à :

$x+\frac{b}{2a}=-\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$ ou $x+\frac{b}{2a}=\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$

$x+\frac{b}{2a}=-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x+\frac{b}{2a}=\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x=-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}-\frac{b}{2a}$ ou $x=\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}-\frac{b}{2a}$

$x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

L'équation a deux solutions distinctes : $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

<u>Exemple :</u>

Résoudre les équations suivantes :

a) $2x^2-x-6=0$ b) $2x^2-3x+\frac{9}{8}=0$ c) $x^2+3x+10=0$

<u>Correction</u>

a) Calculons le discriminant de l'équation $2x^2-x-6=0$:

$a=2$, $b=-1$ et $c=-6$ donc $\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\times2\times(-6)=49$.

Comme Δ > 0, l'équation possède deux solutions distinctes :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-1)-\sqrt{49}}{2\times2}=-\frac{3}{2}$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-1)+\sqrt{49}}{2\times2}=2$$

b) Calculons le discriminant de l'équation $2x^2-3x+\frac{9}{8}=0$:

$a = 2$, $b = -3$ et $c = \frac{9}{8}$ donc $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times \frac{9}{8} = 0$.

Comme $\Delta = 0$, l'équation possède une unique solution :

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2\times 2} = \frac{3}{4}$$

c) Calculons le discriminant de l'équation $x^2 + 3x + 10 = 0$:

$a = 1$, $b = 3$ et $c = 10$ donc $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times 10 = -31$.

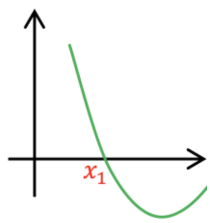
Comme $\Delta < 0$, l'équation ne possède pas de solution réelle.

Définition des racines d'une équation ou d'une fonction polynôme :

Pour une fonction polynôme f du second degré de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$, **les solutions de l'équation** $ax^2 + bx + c = 0$ s'appelle les **racines** de f.

Remarque : Dans la pratique, une racine x_1 de f vérifie $f(x_1) = 0$.

La courbe de f coupe l'axe des abscisses en x_1.



b) Résolution par somme et produit des racines

Propriété : La somme S et le produit P des racines d'une équation du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$ sont donnés par : $S = -\frac{b}{a}$ **et** $P = \frac{c}{a}$.

Exemple:

Soit l'équation du second degré défini sur $\mathbb{R}$ par $-2x^2 + x + 1 = 0$.

1) Montrer que $x_1 = 1$ est une racine de f.

2) Déterminer la deuxième racine.

Méthode :

1) x_1 est une racine si elle vérifie $-2x^2 + x + 1 = 0$.

$-2 \times 1^2 + 1 + 1 = 0$. Donc x_1 est bien une racine.

2) En utilisant le produit des racines, on a :

$P = x_1 \times x_2 = 1 \times x_2 = x_2$

De la formule de $P = \frac{c}{a}$. On obtient $P = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$ Donc $x_2 = -\frac{1}{2}$

D'où : f admet $x_2 = -\frac{1}{2}$ comme deuxième racine.

3. Factorisation et signe d'une équation

a) Factorisation

Propriété : Soit f une équation du second degré défini sur $\mathbb{R}$ par : $ax^2 + bx + c = 0$.

- **Si $\Delta = 0$** : $ax^2 + bx + c = \boldsymbol{a(x - x_0)^2}$**,** avec x_0 est une racine.

- **Si $\Delta > 0$** : $ax^2 + bx + c = a(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_1})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_2})$, avec x_1 et x_2 sont des racines.

Remarque : Si **$\Delta < 0$, il n'existe pas de forme factorisée.**

Méthode :

Exemple 1 : Déterminer les équations du second degré, s'annulant en deux nombres réels distincts On considère le polynôme du second degré s'annulant en -1 et 2 et si $x = 3$, $y = -2$. Déterminer une expression factorisée du polynôme.

Correction exemple 1 :

● Comme l'équation s'annule en -1 et 2, on peut affirmer que -1 et 2 sont des racines.

Et donc : $a(x - (-1))(x - 2) = a(x + 1)(x - 2) = 0$.

● De plus, si $x = 3$, $y = -2$

Donc : $a(3 + 1)(3 - 2) = -2$

$$a \times 4 \times 1 = -2$$

$$a = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

● On en déduit que : $-\frac{1}{2}(x + 1)(x - 2) = 0$.

Exemple 2 : Factoriser les équations suivantes : a) $4x^2 + 19x - 5 = 0$ b) $9x^2 - 6x + 1 = 0$

Correction exemple 2 :

a) On cherche les racines de l'équation $4x^2 + 19x - 5 = 0$:

Calcul du discriminant : $\Delta = 19^2 - 4 \times 4 \times (-5) = 441$

Les racines sont : $x_1 = \frac{-19-\sqrt{441}}{2\times4} = -5$ et $x_2 = \frac{-19+\sqrt{441}}{2\times4} = \frac{1}{4}$

On a donc :

$$4x^2 + 19x - 5 = 4(x - (-5))\left(x - \frac{1}{4}\right) = 4(x + 5)\left(x - \frac{1}{4}\right).$$

b) On cherche les racines de $9x^2 - 6x + 1 = 0$:

Calcul du discriminant : $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 9 \times 1 = 0$

La racine unique est : $x_0 = -\frac{-6}{2\times 9} = \frac{1}{3}$ On a donc :

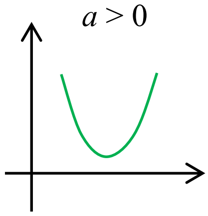
$$9x^2 - 6x + 1 = 9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2$$

b) Signe d'une équation

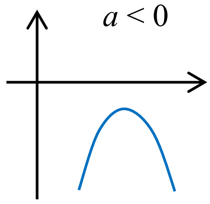
Propriété : Soit une équation du second degré défini sur $\mathbb{R}$ par $ax^2 + bx + c = 0$.

- Si $\Delta < 0$: $ax^2 + bx + c$ ne possède pas de racine. Donc il ne s'annule pas.

$a > 0$



$a < 0$

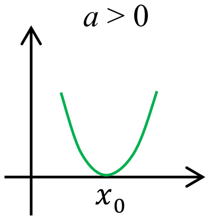


x	$-\infty$	$+\infty$
Signe	$+$	

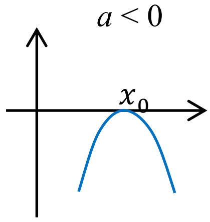
x	$-\infty$	$+\infty$
Signe	$-$	

- Si $\Delta = 0$: $ax^2 + bx + c$ possède une unique racine x_0. Donc il s'annule en x_0.

$a > 0$



$a < 0$

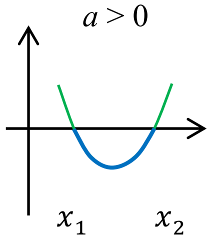


x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
Signe	$+$	0	$+$

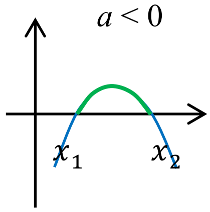
x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
Signe	$-$	0	$-$

- Si $\Delta > 0$: $ax^2 + bx + c$ possède deux racines x_1 et x_2. Donc il s'annule en x_1 et x_2.

$a > 0$



$a < 0$



x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
Signe	$+$	O	$-$	O	$+$

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
Signe	$-$	O	$+$	O	$-$

III. Equation du seconde degré avec paramètre

1. Définition

Soit m un nombre réel et (E) une équation du second degré. On dit que l'équation (E) dépend du paramètre m si et seulement si les coefficients a, b, et c dépendent de m.

On note $a(m)$, $b(m)$ et $c(m)$ les expressions des coefficients en fonction de m. L'équation (E) sera donc notée (E_m) et peut s'ecrire **: (E_m) : $a(m)x^2 + b(m)x + c(m) = 0$**

On obtient une infinité d'équations dépendant de m.

2. Exemple

Déterminer le nombre de solutions de l'équation paramétrique suivante selon les valeurs de m, puis visualiser les résultats obtenus. Montrer que toutes les courbes passent par un point que l'on déterminera.

(E_m) : $(m - 1)x^2 - 2mx + m + 3 = 0$

Pour que cette équation soit du second degré, il faut que le coefficient devant x^2 soit non nul. Sinon l'équation est du premier degré.

1. Si $m = 1$, alors l'équation est du premier degré.
2. Si $m \neq 0$, l'équation est du second degré. On détermine alors le discriminant en fonction de m.

$\Delta = 4m^2 - 4(m - 1)(m + 3)$

$= 4(m^2 - m^2 - 3m + m + 3)$

$= 4(-2m + 3)$

Le nombre de solutions est fonction du signe de Δ. Il faut donc déterminer le signe du discriminant.

$\Delta = 0 \Leftrightarrow -2m + 3 = 0$ soit $m = \frac{3}{2}$

On fait alors un tableau de signe, en indiquant le nombre de solutions

m	$-\infty$	1		$\frac{3}{2}$	$+\infty$
Δ	+	||	+	0	−
Nombre de solutions	2 solutions x' et x''	1er degré 1 sol	2 solutions x' et x''	1 sol double x_0	pas de solution

3. Pour que cette équation admette deux solutions, il faut que :

$$m \in]-\infty;1[\cup 1;\frac{3}{2}[$$

<u>Application 2 :</u>

Des ouvriers d'une entreprise en difficulté ne voulant pas perdre leur emploi décident d'un commun accord de racheter leur outil de travail et de se mettre en auto-gestion. Le montant global du rachat est fixé à 240 millions d'Ariary par l'ancien propriétaire. Mais au moment de la signature du contrat de cession, quatre d'entre eux se désistent, obligeant ainsi les autres à devoir payer cent mille Ariary de plus chacun.

Quel est le nombre X d'ouvriers initialement consentants ?

En déduire la charge financière qui revient à chacun d'eux avant et après le désistement de quatre autres.

<u>Application 3:</u>

On appelle équation bicarrée une équation du type aX4+bX2+c=0 ($a \neq 0$) ; c'est donc une équation du second degré en X, en posant x^2=X. On est donc ramené à la résolution du système : Résoudre dans IR l'équation $X^4+5X^2+4=0$