Mathématiques 1S

Arithmétique

PPCM et PGCD

Partie III : PGCD et PPCM

1. Plus Grand Commun diviseur (PGCD)

Définition 1 : Soit a, b ≥ 0 deux entiers naturels. Le pgcd (Plus Grand Commun Diviseur) de a et b est le plus grand des entiers naturels k qui divisent à la fois a et b. On le note **pgcd (a ; b).**

Exemple **:** Calculons le PGCD de 12 et 15.

On peut systématiquement lister leurs diviseurs :

-Les diviseurs de 12 sont 1, 2, 3, 4, 6 et 12.

-Les diviseurs de 15 sont 1, 3, 5 et 15.

Seuls 1 et 3 divisent donc à la fois 12 et 15 : leur pgcd vaut 3. On note **pgcd (5 ;12) = 3**

Remarques :

-On sait que 1 divise tous les nombres. Ainsi, 1 est toujours un diviseur commun à a et b, donc le **pgcd est bien défini (et vaut au moins 1).**

-La définition rend évidente le fait que **pgcd (a, b) = pgcd (b ; a).**

Exemples **:**

- Si a ≥ 1 est un entier, le pgcd de 1 et a vaut 1.

En effet, 1 est le seul diviseur de 1 et donc, a fortiori, le seul diviseur commun à 1 et a.

-Si a est un multiple de b, le pgcd de a et b vaut b.

En effet, b est le plus grand diviseur de lui-même. Puisque a est un multiple de b, b est aussi un diviseur de a.

-Si **a ≥1, le pgcd (a; 0) = a.**

En effet, tous les nombres entiers sont des diviseurs de 0, donc les diviseurs communs à a et à 0 sont exactement les diviseurs de a et le plus grand est a lui-même. Par contre, tous les nombres étant des diviseurs de 0 mais le pgcd (0,0) est mal défini. On admet que **pgcd (0 ;0) = 0.**

Application 4. Calculer le pgcd de 67 et de 100.

Application 5. Calculer le pgcd de 9 et de 111111111111.

Application 6. Calculer le pgcd de 48 et de 60.

Application 7. On souhaite colorier une grille en regroupant les cases en carrés tous de la même taille mais de couleur différente. Voici par exemple une solution pour une grille de taille 9×6 :

Quel est le nombre minimal de couleurs nécessaires pour colorier de la sorte une grille 16×12 ?

Définition 2 : Soit a, b ≥ 1 deux entiers. On dit que **a et b sont premiers entre eux. Si le seul entier les divisant tous les deux est 1**. Par définition, cela équivaut au fait que leur pgcd vaut 1.

Application 8 : Soit p et q deux nombres premiers. À quelle condition p et q sont-ils premiers entre eux ?

Application 9 : Soit p un nombre premier et $1 \leq n < p$ un nombre entier. Montrer que n et p sont premiers entre eux.

2. Algorithme d'Euclide

L'algorithme d'Euclide repose sur la **propriété** suivante :

Soit a et b deux nombres entiers non nuls, avec a > b. Soit r le reste de la division euclidienne de a par b. Alors, pgcd (a, b) = pgcd (b, r)

Démonstration :

On note $a = bq + r$ la division euclidienne de a par b.

Soit d un diviseur commun à a et b.

Alors d divise a et b donc d divise $a-bq$, c'est à dire r.

Soit e un diviseur commun à r et b. Alors e divise r et b donc e divise $bq+r$, c'est à dire a.

Donc les diviseurs de a et b sont les mêmes que les diviseurs de b et r. Il en va de même pour le plus grand de ces diviseurs.

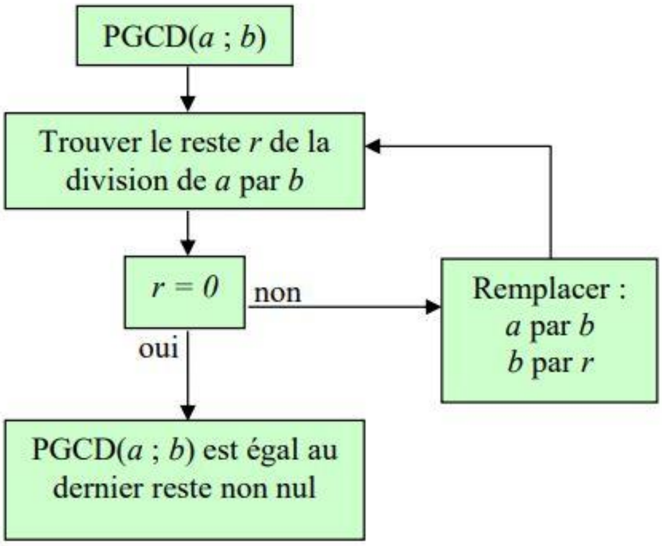
Comme son nom l'indique, l'algorithme d'Euclide est un algorithme, c'est-à-dire une suite d'opérations précises aboutissant au calcul du pgcd.

Application 10 : Déterminer le pgcd de 252 et 360

3. Détermination du pgcd par l'algorithme d'Euclide

Dans toute l'activité, a et b sont deux entiers positifs tel que : $\boldsymbol{a > b}$ et **$\boldsymbol{b}$ ne divise pas $\boldsymbol{a}$**.

Pour calculer le pgcd de deux entiers a et b avec l'algorithme d'Euclide, on utilise la succession d'opérations schématisée ci-contre.



Exemple : pgcd (36 ; 24)

a = 36 et b = 24

Le reste r de la division de 36 par 24 est 12

r = 12

en remplaçant : a = 24 et b = 12

Le reste r de la division de 24 par 12 est 0

r = 0

donc pgcd (36 ; 24) = 12 (le dernier reste non nul)

Application 11 **:**

On se propose de déterminer une solution particulière de l'équation : 567x+2854y =5.

1. Démontrer, en utilisant l'algorithme d'Euclide, que 567 et 2854 sont premiers entre eux.

2. Utiliser les calculs effectués à la question précédente pour déterminer deux entiers relatifs u et v tels que :

567u + 2854v =1.

3. Déterminer deux réels u′ et v′ tels que : 567u′+2854v′=5.

4. Plus petit commun multiple

Soient deux nombres a et b entiers, que nous pouvons supposer positifs. Existe-t-il un plus petit nombre positif M multiple à la fois de a et b? Nous pouvons être sûrs que la réponse est oui par le raisonnement suivant. On connaît ab comme multiple commun, donc il y a des multiples communs. Il suffit d'examiner un à un les entiers multiples de a entre a et ab, voir si ils sont multiples de b, pour trouver le plus petit multiple commun aux deux nombres a et b que nous notons ppcm(a,b).

Application 12 :Soit n un entier positif.Que vaut pgcd (n ; n+1) et ppcm (n ; n+1) ?