SUITES NUMERIQUES : Suite arithmétique et géométrique

Table des matières

Chapitre II : suites arithmétiques et suites géométriques

I. Suite arithmétique

Lorsque pour une suite (u_n), on passe d'un terme u_n au suivant u_{n+1} en ajoutant toujours le même nombre fixe, on dit que la suite (u_n) est arithmétique.

1. Définition d'une suite arithmétique

Définition :
Une suite arithmétique (u_n) est dite arithmétique si et seulement s'il existe un réel r tel que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Le réel *r est* appelé raison de la suite (u_n)

Propriété 1 :

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r, alors :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \leq n$, on a

$$u_n = u_p + (n - p) \times r$$

- En particulier, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = u_0 + n \times r$$

Exemple : Soit (u_n) définie par $u_0 = 5$ et $r = 3$. Determineer u_1, u_2, u_3, u_4.

$u_1 = u_0 + r = 5 + 3 = 8$

$u_2 = u_0 + 2r = 5 + 2x3 = 11$

$u_3 = u_0 + 3r = 5 + 3x3 = 14$

$u_4 = u_0 + 4r = 5 + 3x4 = 17$

Propriété 2 :
Une suite est arithmétique lorsque la différence entre deux termes consécutifs est constante.
On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = r$

2. Comment reconnaître une suite arithmétique ?

Exemple :

Montrer que la suite définie par : $u_n = 2n + 3$ est arithmétique.

On calcule la différence entre deux termes consécutifs quelconques :

$u_{n+1} - u_n = 2(n+1) + 3 - (2n+3) = 2n + 2 + 3 - 2n - 3 = 2$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = 2$.

La suite (u_n) est une suite arithmétique de raison r=2 et de premier terme $u_0 = 3$.

Exemple :

La suite $u_n = n^2 + 1$ est -elle arithmétique ?

-Pour tout indice n, on a :
$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 + 1 + (n^2 + 1) = n^2 + 2n + 1 + 1 - n^2 - 1 = 2n + 1$

Le résultat $2n + 1$ varie en fonction de n donc la raison de la suite n'est pas constante.

Donc la suite (u_n) n'est pas arithmétique.

Vérification: $u_1 = 1^2+1 = 2$; $u_2 = 2^2+1 = 5$; $u_3 = 3^2+1=10$; $u_4 = 4^2+1=17$

$u_2 - u_1 = 5 - 2 = 3$; $u_3 - u_2 = 10 - 5 = 5$ ... donc $u_{n+1} - u_n$ n'est pas constante

3. Terme général d'une suite arithmétique

Propriété 2 :
Le terme général u_n d'une suite arithmétique s'exprime en fonction de n de la façon suivante :

- Si le premier terme est u_0, alors : $u_n = u_0 + n\,r$
- Si le premier terme est u_p, alors : $u_n = u_p + (n - p)\,r$

Exemple : Soit une suite arithmétique (u_n) de raison r.

On donne : $u_{17} = 24$ et $u_{40} = 70$. Trouver la raison r et le premier terme u_0.

-On exprime u_{40} en fonction de u_{17} :

$u_{40} = u_{17} + (40 - 17)\,r \Leftrightarrow u_{40} = u_{17} + 23\,r \Leftrightarrow 23r = u_{40} - u_{17} \Leftrightarrow r = \frac{70-24}{23} = 2$

-On peut alors trouver u_0.

$u_{17} = u_0 + 17\,r \Leftrightarrow u_0 = u_{17} - 17 \times r \Leftrightarrow u_0 = 24 - 17 \times 2 = -10$

La suite (u_n) est de premier terme u_0 = -10 et de raison r = 2

4. Sens de variation d'une suite arithmétique

Théorème :
Soit (u_n) est une suite arithmétique de raison r, alors :

- si $r > 0$, alors (u_n) est strictement croissante.
- si $r < 0$, alors (u_n) est strictement décroissante.
- Si $r = 0$, alors (u_n) est constante.

Démonstration :

Soit un une suite arithmétique de raison r, de premier terme u_0, alors, pour tout entier n :

$u_{n+1} = u_n + r$ (par définition de la suite arithmétique)

D'où: $u_{n+1} - u_n = (u_n + r) - u_n = u_n + r - u_n = r$

Propriété :

- si $r > 0$, alors $u_{n+1} - u_n > 0$, donc $u_{n+1} > u_n$: la suite est strictement croissante.
- si $r < 0$, alors $u_{n+1} - u_n < 0$, donc $u_{n+1} < u_n$: la suite est strictement décroissante

5. Somme de k-termes consécutifs d'une suite arithmétique

Théorème :

Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r, alors, pour tout $n \in N$, on a :

$$u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2}$$

Egalité qui s'écrit aussi : $S_k = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2}$

-**Remarque** : $(n+1)\frac{u_0 + u_n}{2} = (n+1)\left(u_0 + \frac{nr}{2}\right)$

-**Cas particulier** : $0 + 1 + 2 + 3 + ...+ n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Exercice : calculer la somme des 10 premiers entiers naturels à partir de 0

C'est la somme des 10 premiers termes d'une suite arithmétique de premier terme $u_0=0$ et de raison $r = 1$

soit : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; ... ; 9

$S_{10} = 0+1+2+...+9$

$S_{10} = \frac{9 \times 10}{2} = 45$ Vérifions: 0+1+2+3+4+5+6+7+8+9= 45

6. Représentation graphique d'une suite arithmétique

> **Théorème :**
> La représentation graphique des termes d'une suite arithmétique est un ensemble de points isolés **alignés**.

Démonstration :

Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0, alors pour tout naturel n, $u_n = u_0 + nr$

C 'est l'expression d'une *fonction affine de n avec* $u_n = a_n\, r + u_0$

Tous les points $(n\,; u_n)$ se trouvent donc sur la droite d d'équation $y = rn + u_0$

La représentation graphique d'une suite arithmétique est donc formée de points alignés

Exemples :

Un est la suite arithmétique telle que :

$U_0 = 1$ et $r = \frac{1}{2}$

La droite d est la droite d'équation

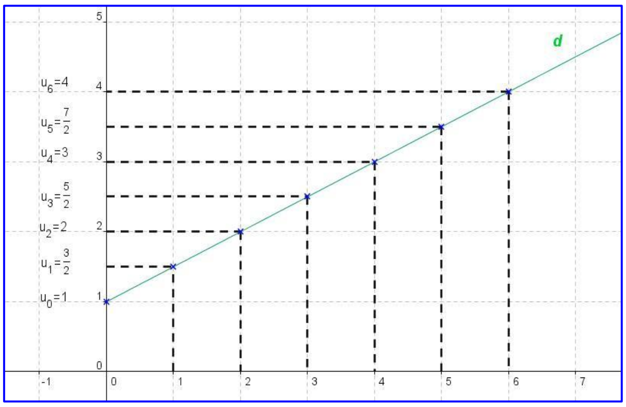
$y = \frac{1}{2}x + 1$.

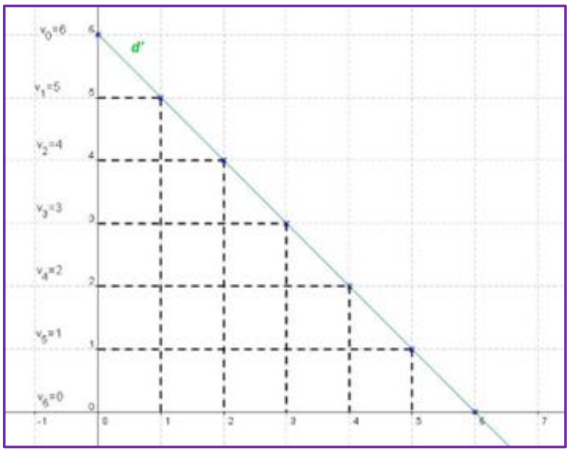
Un est la suite arithmétique telle que :

$U_0 = 6$ et $r = -1$

La droite d est la droite d'équation

$y = -x + 6$.





II. Suite géométrique

1. Définition d'une suite géométrique

Lorsque pour une suite (u_n), on passe d'un terme u_n au suivant u_{n+1} en multipliant toujours par le même nombre positif fixe, on dit que la suite (u_n) est géométrique.

Définition :
Une suite (u_n) est dite géométrique s'il existe un réel q non nul tel que , pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

le réel q est appelé raison de la suite (u_n)

2. Comment reconnaître une suite géométrique ?

Exemple : Montrer que la suite définie par : $u_n = 2^{n+5}$ est géométrique.

-On calcule le rapport entre deux termes consécutifs quelconques :

$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1+5}}{2^{n+5}} = 2^{n+1+5-n-5} = 2^1 = 2$

Donc la suite (u_n) est une suite géométrique : raison $q = 2$ et premier terme $u_0 = 2^5 = 32$

3. Expression du terme général en fonction de *n*

Propriété 1 :

- La suite commence à u_0.

Pour obtenir le terme suivant, en fonction du précédent, on multiplie par q.

Pour obtenir u_n on a multiplié n fois par q à partir de u_0.

On a donc : $\mathbf{u_n = q^n . u_0}$

- La suite commence à u_p.

De u_p à u_n, on a multiplié $(n-p)$ fois par q, donc : $\boldsymbol{u_n = q^{n-p}.u_p}$

Propriété 2 :

Le terme général u_n d'une suite géométrique s'exprime en fonction de n de la façon suivante :

- Si le premier terme est $\mathbf{u_0}$ alors : $\mathbf{u_n = q^n u_0}$
- Si le premier terme est $\mathbf{u_p}$ alors : $\mathbf{u_n = q^{n-p} u_p}$

Exemple : Soit une suite (u_n) géométrique de raison q. On donne : $u_5 = 93312$ et $u_3 = 2592$.

Trouver la raison q, le premier terme u_0 et u_{10} sachant que la raison est positive.

$$u_5 = q^{5-3} u_3 \Leftrightarrow u_5 = q^2 u_3 \Leftrightarrow q^2 = \frac{u_5}{u_3} \Leftrightarrow q^2 = \frac{93312}{2592} = 36 \text{ soit } q=6 \text{ (pour } q>0)$$

On peut alors trouver u_0 puis u_{10}

$$u_3 = q^3 u_0 \Leftrightarrow u_0 = \frac{u_3}{q^3} = \frac{2592}{6^3} = \frac{2592}{216} = 12$$

$$u_{10} = q^{10} u_0 \Leftrightarrow u_{10} = 6^{10} \text{x } 12 = 725\,594\,112$$

Exercice :

On place un capital de 5 000 Ar sur un compte dont les intérêts annuels s'élèvent à 2 %.

Donner la nature de la suite formées par le nouveau capital à la fin de chaque année.

Puis calculer la somme disponible au bout de 5 ans de placement.

Chaque année, le capital c = 5 000 Ar augmente de 2%

A la fin de chaque année :

Le nouveau capital s'écrit $c1 = c + \frac{2}{100}xc = c(1,02)$. Le capital est donc multiplié par 1, 02.

On obtient une suite géométrique (c_n) de premier terme c et de raison 1,02

Terme général de cette suite : $c_n = 5000.\ 1{,}02^n$

Capital placé c	Capital au bout d'1 an c_1	Capital après 2 ans c_2	Capital après 3 ans c_3	Capital après 4 ans c_4	Capital après 5 ans c_5
5 000 Ar	5 000 x 1,02 = 5 100 Ar	5 000 x $1{,}02^2$= 5 202 Ar	5 000 x $1{,}02^3$ = 5 306,04 Ar	5 000 x $1{,}02^4$ = 5 412,16 Ar	5000x$1{,}02^5$= 5 520,40 Ar

Somme disponible au bout de 5 ans : $c_5 = 5000.\ 1{,}02^5 = 625\,000$ Ar

4. Sens de variation d'une suite géométrique

Propriété :

(u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 strictement positif.

- Si $q > 1$ alors la suite (u_n) est croissante.
- Si $q = 1$ alors la suite (u_n) est constante.
- Si $0 < q < 1$ alors la suite (u_n) est décroissante.

Exemple :

Déterminer le sens de variation de la suite géométrique $u_n = 312 \times 1{,}3^n$

- La suite géométrique (u_n) définie par $u_n = 312 \times 1{,}3^n$

Donc $q = 1{,}3$ soit $q > 1$. Cette suite géométrique est croissante.

Exemple 2 :

Déterminer le sens de variation de la suite géométrique $\begin{cases} v_0 = 48\,000 \\ v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n \end{cases}$

La raison q = $\frac{1}{2}$ soit 0<q <1. La suite géométrique (v_n) est donc décroissante.

5. Somme des k-termes d'une suite géométrique

Si (u_n) est une suite géométrique de raison $q \neq 1$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n = \dfrac{u_{n+1} - u_0}{q-1}$ égalité qui s'écrit aussi : $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} u_k = \frac{u_{n+1} - u_0}{q-1}$

Remarque : $\dfrac{u_{n+1} - u_0}{q-1} = u_0\left(\dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}\right)$

Cas particulier somme des n premières puissances entières de q :

$1 + q + q^2 + q^3 + ...+ q^n = \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}$.

Exemple : Somme des 10 premières puissances de 2 à partir de 1

Cela revient à calculer la somme des 10 premiers termes d' une suite géométrique de premier terme 1 et de raison q=2

Soit : 1 ;1x2 = 2^1 ; 2^2 ; 2^3 ; 2^4 ; 2^5 ; 2^6 ; 2^7 ; 2^8 ; 2^9

$S_{10} = \frac{2^{10}-1}{2-1} = \frac{2^{10}-1}{1} = 2^{10}-1 = 1024 - 1 = 1023$

Vérifions : 1+2+4+8+16+32+64+128+256+512-1=1023

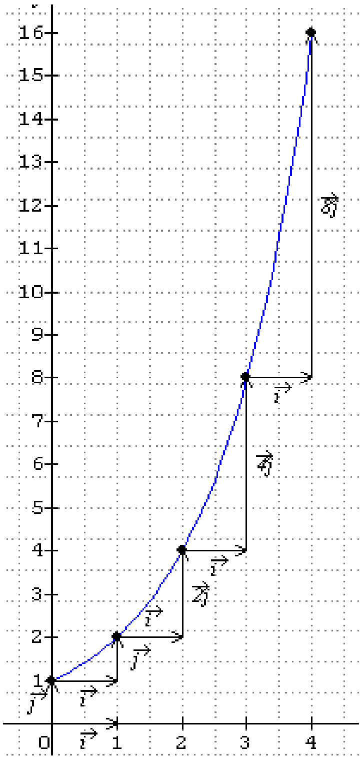
6. Représentation graphique d'une suite géométrique

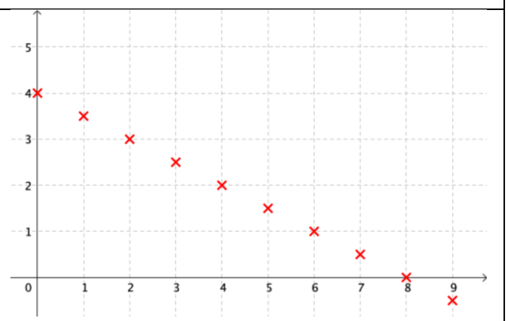
La suite des puissances d'un nombre réel a non nul, de terme général $\mathbf{u_n = a^n}$ est la suite géométrique de premier terme $U_0 = 1$ et de raison a.

La représentation graphique d'une suite géométrique de raison différente de 1 est donc formée de points qui ne sont pas alignés (ils sont situés sur une courbe exponentielle).

Exemple : représentation graphique de la suite $(u_n) = 2^n$

n	0	1	2	3	4
u_n	$2^0=1$	$2^1=2$	$2^2=4$	$2^3=8$	$2^4=16$



A retenir sur les suites arithmétiques	Suite arithmétique (u_n) - de raison r - de premier terme u_0.	Exemple $r = -0{,}5$ et $u_0 = 4$
Définition	$u_{n+1} = u_n + \mathrm{r}$ r est la raison de la suite	$u_{n+1} = u_n - 0{,}5$ La différence entre un terme et son précédent est égale à $-0{,}5$.
Terme général	$u_n = u_0 + nr$	$u_n = 4 - 0{,}5n$
Sens de variation	Si $r > 0$: (u_n) est croissante. Si $r < 0$: (u_n) est décroissante.	$r = -0{,}5 < 0$ La suite (u_n) est décroissante.
Représentation graphique	Remarque : Les points de la représentation graphique sont alignés. La croissance est linéaire.	

A retenir sur les suites géométriques	(u_n) une suite géométrique de raison q positive de premier terme u_0 positif.	Exemple : $q = 2$ et $u_0 = 4$
Définition	$u_{n+1} = q \times u_n$	$u_{n+1} = 2 \times u_n$ Le rapport entre un terme et son précédent est égal à 2.
Terme général	$u_n = u_0 \times q^n$	$u_n = 4 \times 2^n$
Sens de variation	Si $q > 1$: (u_n) est croissante. Si $0 < q < 1$: (u_n) est décroissante	$q = 2 > 1$ La suite (u_n) est croissante.
Représentation graphique	Les points de la représentation graphique forment une courbe. On parle de croissance exponentielle.