ARITHMETIQUE ET MATRICE :

Matrice rappel

Table des matières

Deuxième Partie : Matrice

Chapitre I : Rappel

I. I. Introduction

Une matrice est un tableau de données à deux entrées, auquel on peut appliquer diverses opérations.

On les utilise dans la vie quotidienne, surtouts dans la technologie, tous les appareils électroniques fonctionnent avec les matrices.

Exemple : Si je classe les quantités de pots de confiture à la fraise, à l'orange, à l'abricot et j'en passe dans une matrice, pour mieux me représenter mon stock ou mon inventaire de pots de confiture.

Ce qui consiste à dresser la liste des types de confitures et de mettre les quantités à côté.

La matrice est simple et efficace : je sais d'un coup d'œil combien j'en ai. Où j''en suis, je peux facilement ajouter l'information indiquant dans combien et dans quels pots on à mis les doigt

II. II. Definition

Une matrice m x n est un tableau de nombres à m lignes et n colonnes.

Les nombres qui composent la matrice sont appelés les éléments de la matrice (ou aussi les coefficients).

Une matrice à m lignes et n colonnes est dite matrice d'ordre (m,n) ou de dimension m×n.

L'ensemble des matrices à m lignes et n colonnes à coefficients réels se note Mm,n(<).

Notations :

– Les coefficients s’écrivent sans "séparation" verticale ou horizontale contrairement aux tableaux que vous connaissez. La matrice est "encadrée" par des parenthèses (ou des crochets dans certains exercices).

– Si A est une matrice de dimension m×n, on note généralement a_{ij} le coefficient qui se trouve à la $i^{ème}$ ligne et dans la $j^{ème}$ colonne de la matrice, où $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$.

Exemple :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

est une matrice de 3 lignes et 4 colonnes. $A \in M_{3,4}(R)$, et on a : $a_{13} = -1$ et $a_{31} = \sqrt{2}$.

Remarques :

- Une matrice A dont tous les éléments sont nuls est appelée matrice nulle :

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=0$$

– Une matrice ne contenant qu’une ligne (matrice 1×n) est appelée matrice-ligne, ou encore vecteur ligne.

Chapitre II : matrice carrée

III. I. Défintions

– Une matrice ne contenant qu'une colonne (matrice m ×1) est appelée matrice-colonne, ou encore vecteur-colonne.

– Une matrice ayant le même nombre de lignes et de colonnes (matricem×m) est appelée matrice carrée. L'ensemble des matrices carrées d'ordre m à coefficients réels se note $M_{m,m}(R)$ ou plus simplement $M_m(R)$

Dans une matrice carrée, la diagonale est constituée des éléments situés sur la diagonale de la matrice.

Soit

$$B=\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & -7 & 0 \\ \sqrt{5} & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

la diagonale de B est la suite des éléments en gras.

Une matrice carrée dont tous les éléments en dehors de la diagonale sont nuls (certains éléments de la diagonale peuvent aussi être nuls) est appelée matrice diagonale.

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

,est une matrice diagonale.

On appelle matrice identité d'ordre n, la matrice carrée dont les éléments de la diagonale sont égaux à 1 et tous les autres sont égaux à 0. On la note I_n.

Exemple :

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

IV. II-Opérations élémentaires

1. Addition de matrices

a) Définition

Soit M et N deux matrices ayant le même nombre de lignes et de colonnes. La somme des matrices M et N est la matrice de même dimension que M et N, dont chaque élément est la somme des éléments correspondants de M et N.

b) Exemple :

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

2. Produit de matrices

Soit A une matrice m × p et B une matrice p × n.

On peut effectuer le produit d'une matrice à m lignes et p colonnes par une matrice à p lignes et n colonnes.

On appelle produit A×B la matrice de dimension m×n obtenue en multipliant chaque ligne de A par chaque colonne de B. Plus précisément, le coefficient de la $i^{ème}$ ligne et de la $j^{ième}$ colonne de A×B est obtenu en multipliant la $i^{ème}$ ligne de A par la $j^{ième}$ colonne de B.

$A \in M_{m,p}(R)$, $B \in M_{p,n}(R) \Rightarrow C = A \times B \in M_{m,n}(<)$ et $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \times b_{kj}$

Exemple :

Soit A = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ et B= $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2x2 + 1x1 & 4x2 + 3x1 \\ 2x4 + (-2) & 4x2 + 3x(-2) \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 11 & 10 \end{bmatrix}$$

Remarque : Le produit de matrices n'est pas commutatif, c'est à dire que si A et B sont deux matrices quelconques, en général A×B 6= B×A.

En effet, le nombre de lignes et de colonnes des matrices A et B peuvent permettre d'effectuer le produit AB mais pas nécessairement le produit BA. De plus, même dans le cas où les deux produits existent, généralement AB n'est pas égal à BA.

3. Transposée d'une matrice

a) Définition

Soit M une matrice m×n.

La transposée de la matrice M est la matrice n×m notée TM dont les lignes sont les colonnes de M et les colonnes sont les lignes de M.

b) Exemple :

Soit D la matrice $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

La transposée de D est la matrice : ${}^{T}D = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$

4. Déterminant d'une matrice

À toute matrice carrée

correspond une valeur appelée le déterminant de, que l'on dénote par :

det(A) ou encore |A|

Calcul du déterminant pour une matrice

Considérons la matrice de dimension 2x2 : $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

Le déterminant de la matrice est défini par la relation

det (A)=$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$= $a_{11}\ a_{22} - a_{21}\ a_{12}$

Le résultat est donc obtenu en effectuant le produit des éléments opp osés et en calculant la différence entre ces deux produits… une recette en quelque sorte qu'il vous faudra retenir.

Exemple :

Soit la matrice A= $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

Le déterminant de A est ainsi :

det (A)= $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$

5. Inverse d'une matrice

Soit A une matrice carrée de taille n×n.

S'il existe une matrice carrée B de taille n×n telle que AB = I et BA= I, on dit que A est inversible.

On appelle B l'inverse de A et on la note A^{-1}.

On verra plus tard qu'il suffit en fait de vérifier une seule des conditions AB = I ou bien BA= I.

• Plus généralement, quand A est inversible, pour tout p∈N, on note :

$$A^{-p} = (A^{-1})^p = A^{-1} \underbrace{A^{-1} \cdots A^{-1}}_{\text{p facteurs}} .$$

• L'ensemble des matrices inversibles de $M_n(K)$ est noté $GL_n(K)$.

Exemple :

Soit A= $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

Étudier si A est inversible, c'est étudier l'existence d'une matrice B = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

coefficients dans K, telle que

AB = I et BA= IOr AB = I équivaut à : AB = I $\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$

$\begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ 3c & 3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$