ARITHMETIQUE ET MATRICE :

PGCD et PPCM

Table des matières

Première partie: Arithmétique

Chapitre IV : PPCM et PGCD

I. PPCM

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls et A l'ensemble des entiers naturels non nuls appartenant à $a\mathbb{Z}\cap b\mathbb{Z}$ (on a donc : $\mathbf{A=a\mathbb{Z}\cap b\mathbb{Z}\cap\mathbb{N}^*}$**).**

A est une partie non vide de $\mathbb{N}$ (car $|ab|\in A$), donc A admet un plus petit élément.

1. Définition

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls.

Le plus petit commun multiple de a et b, noté PPCM (a,b), est le plus petit élément strictement positif de $a\mathbb{Z}\cap b\mathbb{Z}$.

2. Théorème 1:

Soit a et b deux entiers naturels non nuls et μ leur PPCM.

On a : $\mathbf{a\mathbb{Z}\cap b\mathbb{Z}=\mu\mathbb{Z}}$.

Exemple :

2N= {0 ;2 ;4 ;6 ;8 ;10 ;12 ;14 ;…}

3N= {0 ;3 ;6 ;9 ;12 ;15 ;…}

2N∩3N={0 ;6 ;12 ;18…}

2N∩3N=6N

Donc PPCM (3 ;2)=6

Remarque : Cette propriété signifie qu'un entier c est multiple de a et de b si et seulement s'il est multiple de μ.

Exemple : On sait que :

PPCM (12 ;16) =48 ; donc **un nombre est multiple de 12 et de 16** si et seulement **s'il est multiple de 48**.

3. Théorème 2

Soit a, b et k trois entiers naturels non nuls.

On a: PPCM **(ka;kb)=kPPCM(a;b).**

Exemple : Déterminer le PPCM de 45 et 120

On a:

PPCM (45;120) =PPCM (15×3;15×8) =15×PPCM (3;8).

Or on a vu que :

PPCM (3 ;8) =24 donc :

P**PCM (45 ;120) =15×24=360**

II. PGCD

Soit a et b deux entiers relatifs non tous nuls.

On a vu que l'ensemble D(a;b) des diviseurs communs à a et b est non vide et borné, D(a;b) admet donc un plus grand élément.

1. Définition

Soit a et b deux entiers relatifs non tous nuls.

Le plus grand commun diviseur de a et b, noté PGCD (a;b), est le plus grand élément de D(a;b).

Exemples :

1. On a : D (12) = {−12 ; −6 ; −4 ; −3 ; −2 ; −1 ;1 ;2 ;3 ;4 ;6 ;12}

D (15) = {−15 ; −5 ; −3 ; −1 ;1 ;3 ;5 ;15}

D (12 ;15) = {−3 ; −1 ;1 ;3}

Donc : PGCD (12 ;15) =3.

2. D (7) = {−7 ; −1 ;1 ;7}

Donc le PGCD de 7et 24 est 7ou 1 ; mais 7 ne divise pas 24 ;

Donc : PGCD (7 ;24) =1.

Remarques :

1.Pour tous entiers relatifs non nuls a et b,on a:PGCD(a;b)=PGCD(|a|;|b|).

Dans une recherche de PGCD, on peut donc toujours se ramener à la recherche du PGCD de deux entiers naturels non nuls.

2.Pour tous entiers naturels non nuls a et b,on a :1≤PGCD(a;b)≤min{a;b}.

3. Pour tous entiers naturels non nuls a et b, on a : PGCD (a;b)=b ⇐⇒ b∈D(a).

4. Pour tout entier naturel non nul c, on a: PGCD(c;0)=c.

2. Théorème 1

Soit a et b deux entiers naturels non nuls et δ leur PGCD.

On a : D(a;b)=D(δ).

Exemple : D (12 ;15) = {−3 ; −1 ;1 ;3}

D (12 ;15) =D (3)

Remarque : Ce théorème signifie qu'un entier d divise a et b si et seulement s'il divise δ.

3. Théorème 2(MULTIPLICATIVITÉ DU PGCD)

Soit a, b et k trois entiers naturels non nuls.

On a: PGCD (ka;kb)=k PGCD(a;b).

Exemple : Déterminer le PGCD de 300 et 375.

On a:

PGCD (300;375) =PGCD (25×12;25×15) =25×PGCD (12;15)

On a vu que :

PGCD (12 ;15) =3 donc :

PGCD (300 ;375) =25×3=7

4. Théorème 3

Soit a et b deux entiers relatifs non tous nuls et δ leur PGCD.

Les nombres de la forme : au+bv (avec $u\in\mathbb{Z}$ et $v \in \mathbb{Z}$) ; sont les multiples de δ.

Exemple : PGCD (300 ;375) =75 et 225 est multiple de 75 ; donc il existe deux entiers relatifs u et v tels que :

225=300u + 375v.

En effet :225=300× (−3) +375×3 ou 225=4125−3900=300× (−13) +375× (11).

Remarque : En termes ensemblistes, le théorème peut s'écrire : $\delta\mathbb{Z} = \{au+bv \mid u\in\mathbb{Z} \text{ et } v \in\mathbb{Z}\}$.

5. Corollaire

Soit a et b deux entiers relatifs non tous nuls et δ leur PGCD.

Il existe deux entiers u et v tels que : δ=au+bv.

Exemple : L'équation : 21x−63y =36 a-t-elle des solutions dans $\mathbb{Z}^2$?

21 et 63 sont deux multiples de 7. Pour tous entiers x et y le premier membre de l'équation est multiple de 7 alors que 36 n'est pas multiple de 7, l'équation n'a donc pas de solutions dans $\mathbb{Z}^2$.

6. Théorème de Bézout

Soit a et b deux entiers relatifs.

a et b sont premiers entre eux si et seulement si il existe deux entiers relatifs u et v tels que : au+bv =1.

Exemples :

1. On a : $632\times9+47\times(-121)=1$; donc :**632 et 47 sont premiers entre eux**.
2. **Deux entiers consécutifs n et n+1 sont premiers entre eux**. En effet, **on a :$1(n+1)-1\times n=1$.**

7. Théorème de Gauss

Soit a, b et c trois entiers relatifs non nuls.

Si a divise bc et si a et b sont premiers entre eux, alors a divise c.

Exemple :

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $7x-3y=0$ (I.3)

Soit (x,y) une solution de (I.3) .

On a :

$7x=3y$.7 divise 3y et est premier avec 3, donc, d'après le théorème de Gauss, y est multiple de 7.

Il existe donc un entier relatif k tel que : $y=7k$.

On en déduit que : $x=3k$.

Réciproquement, pour tout entier relatif k, on a :

$7(3k)-3(7k)=0$; donc le couple (3k ;7k) est solution de (I.3).

L'ensemble des solutions est donc : $\{(3k;7k) \mid k\in\mathbb{Z}$.

8. Équations diophantiennes

L'objectif de cette partie est de montrer comment résoudre des équations diophantiennes de degré1 à deux inconnues ; c'est-à-dire les équations du type : $ax+by=c$ où les inconnues sont les entiers x et y et où a, b, c sont des paramètres entiers.

Par exemple, résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation :$2x+3y=7$. Nous allons d'abord étudier des exemples simples, nous constaterons alors que résoudre une telle équation il faut souvent trouver une solution puis on déduit les autres solutions de cette solution particulière. Nous verrons donc comment déterminer une solution particulière dans le cas où les coefficients sont compliqués.

Exemples de résolutions

1-Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $25x+15y = 7$.

Pour tous entiers x et y, $25x+15y$ est multiple de 5 (car 25 et 15 sont multiples de 5) alors que 7 ne l'est pas, donc l'équation n'a pas de solution.

2-Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation :$25x+15y = 35$. (I.4)

On a :

(I.4) $\Longleftrightarrow 5x+3y = 7$.

On a :

$5\times 2+3\times(-1) = 10-3 = 7$; donc $(2 ; -1)$ est une solution particulière de (I.4).

D'où : (I.4) $\Longleftrightarrow 5x+3y = 5\times 2+3\times(-1) \Longleftrightarrow 3(y+1) = -5(x-2)$.

Raisonnons maintenant par conditions nécessaires.

Soit $(x;y)$ une solution.

3 divise $-5(x-2)$ et est premier avec -5 donc, d'après le théorème de GAUSS ,3 divise $x-2$.

Soit k le quotient, on a donc :

$x-2=3k$ et $x=3k+2$.

En substituant $x-2$ par $3k$ dans le dernier membre de la dernière équivalence, il vient :

$3(y+1) = -5\times 3k$; d'où : $y = -5k-1$. On en déduit que toutes les solutions de (I.4) sont de la forme :

$(3k+2 ; -5k-1)$ (avec $k\in Z$).

Réciproquement, les couples de cette forme sont-ils tous solutions de (I.4) ?

Soit $k\in Z$, considérons le couple $(3k+2 ; -5k-1)$.

On a:

$5(3k+2) +3(-5k-1) = 15k+10-15k-3 = 7$; donc:

$S = \{(3k+2; -5k-1) \mid k \in Z\}$.

Détermination d'une solution particulière

On se propose de déterminer une solution particulière de l'équation : $567x+2854y = 5$.

1. Démontrer, en utilisant l'algorithme d'Euclide, que 567 et 2854 sont premiers entre eux.
2. Utiliser les calculs effectués à la question précédente pour déterminer deux entiers relatifs u et v tels que :

$567u + 2854v = 1$.

3. Déterminer deux réels u' et v' tels que : $567u'+2854v'=5$.

On a :

$2854=5\times567+19$ donc : PGCD (2854 ;567) =PGCD (567 ;19).

On a :

$567=29\times19+16$; donc : PGCD (567 ;19) =PGCD (19 ;16).

On a :

$19=16+3$; donc : PGCD (19 ;16) =PGCD (16 ;3).

On a :

$16=5\times3+1$; donc : PGCD (16 ;3) =PGCD (3 ;1) =1.

Les nombres 567 et 2854 sont donc premiers entre eux.

Utilisons les divisions Euclidiennes précédentes, de la dernière à la première.

On a : $1 =16-5\times3 =16-5(19-16) =-5\times19+6\times16 =-5\times19+6(567-29\times19) =6\times567-179\times29$ $=6\times567-179(2854-5\times567) =901\times567-179\times2854$

On peut donc prendre : $u=901$ et $v =-179$. 3. En multipliant membre à membre le dernière égalité par5, nous obtenons : $4505\times567-895\times2854=5$.

On peut donc prendre : $u'=4505$ et $v'=-895$.