ARITHMETIQUE ET MATRICE :

Numération et base

Table des matières

Première partie: Arithmétique

Chapitre 1 : Numération et base

Nous savons tous compter en base 10 depuis la maternelle.
Pour cela nous utilisons dix chiffres : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
Lorsque nous avons compté jusqu'à 9, nous savons qu'il faut passer à 10, 11 … Ce sont les mêmes chiffres avec une position en plus. Ici les dizaines. Il s'agit de notre numération décimale dite de position

I. Définition

La numération est une technique qui permet d'écrire un entier naturel non nul donné dans une base précise B ($B \in \mathbb{N}$ et $B > 1$)
Exemple
Le nombre $N=\overline{3235}10$ (base 10 ou système décimal) correspond à
N=3x103+2x102+3x10+5x100 = 3 000+200+30+5

Tout nombre entier naturel N s'écrit de manière unique comme somme de puissances de 10 pour les nombres décimaux, et puissances de B pour toute base B.
$N = a_nB^n + a_{n-1}B^{n-1} + \ldots + a_1B_1 + a_0B_0$
Les coefficients a_i sont nuls ou compris entre 0 et B, « **a »** indique le chiffre et « ***i* »** indique son rang de position dans le nombre.
Ces coefficients sont **les restes de la division** par B de N, puis des quotients successifs jusqu'à ce que **le quotient** des divisions successives soit nul.
Remarque :
Si tous les coefficients sont nuls, alors N = 0; sinon le premier coefficient a0 est différent de 0.

Avec cette écriture et dans cette base, le nombre N est unique.

Pour une base donnée, à chaque jeu de coefficients correspond un nombre unique et, réciproquement, chaque nombre se développe d'une seule façon avec cette base.

Dans une base « B », les chiffres utilisés ont tous une valeur inférieure à « B ». Ex : en base 5, les chiffres utilisés sont 0, 1, 2, 3, 4. La suite des nombres de la base 5 sera donc : 1, 2, 3, 4, 10, 11, 12, 13, 14, 20, etc.

II. Les systèmes de numération

Un système de numération est un ensemble de règles permettant de représenter les nombres. Dans les systèmes numériques, on utilise principalement les systèmes suivants :

Le système de numération décimale

Utilise les dix chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Le système de numération binaire

Utilise exclusivement les deux chiffres 0 et 1. (appelé Binary Digit ou **bit**)

Le système de numération **hexadécimale**

Utilise les seize chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F

III. Le système décimal (ou à base 10)

Habituellement, en mathématiques, on utilise le système décimal. Par exemple, si on a le nombre 3249, on l’écrit sous cette forme :

$3\,249=3\times1\,000+2\times100+4\times10+9=2\times10^3+2\times10^2+4\times10^1+9\times10^0$

En rappel : $a^0 = 1$ si a n'est pas nul

Dans ce système, **on utilise 10 chiffres** (c'est pour cela qu'on l'appelle décimal).

Ces chiffres sont : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Les groupements se font par 10 : avec 10 unités on forme une dizaine, avec 10 dizaines on forme une centaine...

Exemple :

$12\,005 = 1\times10\,000 + 2\times1\,000 + 0\times100 + 0\times10 + 5\times1$

$\quad = 1\times10^4+2\times10^3+0\times10^2+0\times10^1+5\times10^0$

On peut également faire un regroupement par 5.

Les chiffres utilisés sont alors 0 ;1 ;2 ;3 ;4

Exemple: $\overline{1304}^5$ (base 5) correspond à $1\times5^3+3\times5^2+0\times5^1+4\times5^0$

$=1\times125+3\times25+0\times5+4\times1$

$=204$ (base 10)

Le nombre qui s'écrit $\overline{1304}$ en base 5 est 204 en base 10

IV. Le système binaire (numération en base 2)

Dans ce système, on utilise 2 chiffres (c'est pour cela qu'on l'appelle binaire).

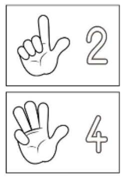
Ces chiffres sont : 0 et 1

Les machines (ordinateurs, calculateurs, mémoires, périphériques réseaux, …) traitent et mémorisent les informations au moyen de circuits logiques binaires car leurs entrées et sorties se caractérisent uniquement par deux états : l'état logique bas symbolisé par 0 et l'état logique haut symbolisé par 1.

Après le 1 on utilise $\overline{10}$; $\overline{11}$;100 ;101 …

Base 10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Base 2	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{100}$	$\overline{110}$	$\overline{111}$	$\overline{1000}$	$\overline{1001}$	$\overline{1010}$

Remarques :



Les chiffres sont des dessins, des symboles pour représenter les nombres.

Un nombre peut s'écrire avec un ou plusieurs chiffres, il peut s’écrire en lettres…

Exemples :

- Quatre, 4, IV, four sont différentes manières de représenter le même nombre.
- 1 345 est un nombre de quatre chiffres :

1 est le chiffre des mille ; 1 est le nombre de mille

3 est le chiffre des centaines,13 est le nombre de centaines ;

4 est le chiffre des dizaines,134 est le nombre de dizaines ;

5 est le chiffre des unités,1345 est le nombre d’unités.

V. Système hexadécimal

Pour écrire un nombre en base16 on **utilise 16 chiffres**.

L’ensemble des chiffres utilisé est :

{0 ;1 ;2 ;3 ;4 ;5 ;6 ;7 ;8 ;9 ; A ; B ; C ; D ; E ; F}

Les chiffres A, B, C, D, E et F représentent respectivement les nombres 10 ;11 ;12 ;13 ;14 et 15.

VI. Détermination pratique

1. Comment passer de la base 2 à la base 10 ?

Le nombre $\overline{11111}$ (base 2) $=1\times2^4+1\times2^3+1\times2^2+1\times2^1+1\times2^0$

$=16+8+4+2+1 = 31$

Le nombre $\overline{11111}$ (base 2) est 31 en base 10

2. Comment passer de la base 10 à la base 2 ?

a) On peut utiliser les puissances de 2

Le nombre 25 (base 10) $=16+8+1=1\times2^4+1\times2^3+0\times2^2+0\times2^1+1\times2^0$

$= \overline{11001}$ (base 2)

Le nombre 25 (base10) s'écrit $\overline{\mathbf{11001}}$ en base 2

b) On peut aussi utiliser les restes des divisions successives par 2

On divise 25 par 2, quotient 12 et reste 1

On divise 12 par 2, quotient 6 et reste 0

On divise 6 par 2, quotient 3 et reste 0

On divise 3 par 2, quotient 1 et reste 1

On divise 1 par 2, quotient 0 et reste *1*

L'écriture en base 2 est composée des restes successifs de la division par 2 en commençant par le dernier.

Le nombre 25 (base10) s'écrit $\overline{\mathbf{11001}}$ en base 2

3. Comment passer de la base 16 à la base 10 ?

On utilise les puissances de 16

Exemple : Convertir en base 10 le nombre $\overline{BAC}^{16}$(base 16)

$\overline{\mathrm{BAC}}^{16}$ (base 16) $= 11\times16^2+10\times16^1+12\times16^0$

$\overline{BAC}^{16}$(base 16) = 2816+160+12

$\overline{\mathrm{BAC}}^{16}$ **= 2988**

Le nombre $\overline{BAC}^{16}$ (base 16) s'écrit $\overline{\mathbf{11001}}$ en base 2

VII. Cas général

1. Écrire en base 10 un nombre donné en base « B »

- Tableau de numération
- Écrire la composition du nombre dans le tableau de numération.
- Effectuer les calculs en base 10.
- Exemple : Ecrire le nombre $\overline{\mathbf{2012}}^{\mathbf{3}}$ (base trois) en base 10.

3^3=27	3^2=9	31=3	3^0=1
2	0	1	2

$\overline{2012}^3$= 2×3^3 +0 ×3^2 + 1×3^1 + 2×3^0 = 2×27 + 0 + 3 + 2 = 59

Réponse : $\overline{\mathbf{2012}}^{\mathbf{3}}$ ***= 59***

2. Ecrire en base « B » un nombre donné en base 10

<u>Méthode 1</u> : divisions successives par B

- Diviser le nombre a (base 10) par la base « B ».
- Diviser le quotient obtenu par « B ».

Recommencer avec les nouveaux quotients jusqu'à obtenir un quotient inférieur à « B ». L'écriture en base B est composée des restes successifs de la division par B en commençant par le dernier.

- Exemple : Ecrire 144 (base 10) en base 5.

44 / 5 = 28 avec un reste **4**. Ce reste 4 constitue le chiffre des unités.
28 / 5 = 5 avec un reste **3**. Ce reste 3 est le chiffre des cinquaines (et non des dizaines !)
5 / 5 = 1 avec un reste **0**

1/5 = 0 avec un reste **1**

*Réponse :**144 =*** $\overline{\mathbf{1034}}^{5}$

Méthode 2 : Puissances de B

- Créer le tableau de numération de la base « B ».
- •Dans le nombre donné en base 10, chercher combien de fois on a la **plus grande puissance possible de « B ».**
- Recommencer avec les restes successifs et remplir le tableau.
- Exemple : Ecrire 144 (base 10) en base 5.

5^4=625	5^3=125	5^2=25	5^1=5	5^0=1
	1	**0**	**3**	**4**

144 = **1** ×125 +19 soit 144 =**1** × 5^3 + 19. Donc le plus grand chiffre du nombre en base 5 est **1**

19 =3 × 5 +4 donc 19 =**3** × 5^1 + 4

4 = **4** × 5^0

Il reste à remplir le tableau par un zéro quand la puissance de B n'est pas utilisée.

- *Réponse :**144 =*** $\overline{\mathbf{1034}}^{5}$