FONCTIONS NUMERIQUES D'UNE VARIABLE REELLE

Table des matières

Partie 7 : Equations differentielles

Chapitre I :Equation différentielle de forme y ’=ay (a réel)

I. Définition

Une fonction solution sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ de l’équation différentielle $y'=ay$ est une fonction f, dérivable sur I telle que pour tout x de I : $f'(x) = a\,f(x)$.

II. Fonctions solutions

Les fonctions solutions de l’équation différentielle $y'=ay$(a réel donné)sont les fonctions : $x \to C\,e^{ax}$ (où C est une constante réelle).

III. Unicité de la solution

Il existe une **unique solution** de l’équation différentielle $y' = ay$ vérifiant la condition initiale $\mathbf{y(x_0) = y_0}$ (x_0, y_0 réels donnés). L’unique solution est la fonction : $x \to y_0\, e^{a(x - x_0)}$.

IV. Exemple

Trouver la solution f de l’équation différentielle $y' + 2y = 0$ telle que $f(0) = 2$.

On écrit d’abord l’équation sous la forme $y'= - 2\,y$. Les solutions dans $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions $f_C(x) = C\,e^{-2x}$ où C est un réel.

On sait qu’il existe une unique solution telle que : $f(0) = 2$.

Ainsi : $2 = C\,e^0$ d’où $C = 2$.

En conclusion, la solution f de l’équation différentielle $y' + 2y = 0$ telle que $f(0) = 2$ est d’équation : $f(x) = 2e^{-2x}$.

Chapitre II : Equation différentielle de forme y ’ = ay + b (a et b réels)

I. Définition

Une fonction solution sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ de l’équation différentielle

y'=ay +b est une fonction f, dérivable sur I telle que pour tout x de I:

$f'(x) = a\, f(x) + b$.

II. Fonctions solutions

Les fonctions solutions de l’équation différentielle $y' = ay + b$ (a et b réels donnés) sont les fonctions : $x \rightarrow C\, e^{ax} - \frac{b}{a}$ (où C est une constante réelle).

III. Unicité de la solution

Il existe une unique solution de l’équation différentielle $y' = ay + b$ vérifiant la condition initiale $y(x_0) = y_0$ (x_0, y_0 réels donnés).

IV. Exemple

Trouver la solution f de l’équation différentielle $y' + 2y = 2$ telle que $f(0) = 2$

On écrit d’abord l’équation sous la forme $y' = -2y + 2$.

Les solutions dans $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions $f_C(x) = C\, e^{-2x} + 1$ où C est un réel.

On sait qu’il existe une unique solution telle que : $f(0) = 2$.

Ainsi : $2 = C\, e^{0} + 1$ d’où $C = 1$.

En conclusion, la solution f de l’équation différentielle $y' + 2y = 2$ telle que $f(0) = 2$ est d’équation : $f(x) = e^{-2x} + 1$

Chapitre III : Equation différentielle du type y'- ay = g(x)

Ce type d'équation différentielle peut être étudié dans un exercice. Des indications sont alors données pour pouvoir résoudre l'exercice. On traite dans ce chapitre un exemple.

Résolution de (E_1) : $y' - 2y = e^x$.

On vérifie que la fonction h : $x \to - e^x$ est solution de (E_1) : $h'(x) - 2h(x) = e^x$.

On a trouvé une solution particulière h de (E1).

Soit f une solution de (E_1). Donc, pour tout réel x, on a : $f'(x) - 2f(x) = e$ et $h'(x) - 2h(x) = e$.

On remarque que :

$f'(x) - 2f(x) = h'(x) - 2h(x) \Leftrightarrow f'(x) - h'(x) - 2[f(x) - h(x)] = 0$

$\Leftrightarrow f - h$ est solution de $y' - 2y = 0$

Si f est solution de (E_1), on a vérifie que f-h est solution de l'équation sans second membre $y' - 2y = 0$.

Or, les solutions de l'équation $y' - 2y = 0$ sont les fonctions $x \to Ce^{2x}$ (C constante réelle).

Donc les solutions de (E_1) sont les fonctions : $x \to Ce^{2x} - e^x$ (C réel).

Solutions de (E_1) = (Solution équation sans second membre) + (Solution particulière).

Si on cherche les solutions telles que f(0) = 1, on résout l'équation $1 = C\,e^0 - e^0$ d'où C = 2.