DENOMBREMENTS ET PROBABILITES :

Dénombrements

Table des matières

Première partie :

Dénombrement

Chapitre 1 : Notion de dénombrement

I. Définitions :

● Un ensemble E est **fini** lorsqu'il admet un nombre fini d'éléments.

● Le nombre d'éléments de E est appelé le **cardinal** de l'ensemble et il est noté : $Card(E)$ ou $|E|$.

● **Dénombrer**, c'est compter le nombre d'éléments que contient un ensemble fini, c'est à dire en déterminer le cardinal.

Exemples :

● L'ensemble E des joueurs d'une équipe de foot est un ensemble fini. Alors $Card(E) = 11$.

● L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels n'est pas un ensemble fini.

On dit que deux ensembles sont **disjoints**, s'ils ont aucun élément en commun.

II. Principe additif

1. Propriété

Soit $E_1, E_2, \ldots, E_p$, p ensembles finis deux à deux disjoints.

Alors $Card(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_p) = Card(E_1) + Card(E_2) + \cdots + Card(E_p)$

Exemple :

Soit $E_1 = \{a\,; b\,; c\,; d\}$ et $E_2 = \{\alpha\,; \beta\,; \gamma\}$

Alors E_1 et E_2 sont disjoints et on a :

$Card(E_1 \cup E_2) = Card(E_1) + Card(E_2) = 4 + 3 = 7$

2. Méthode

Dénombrer en utilisant un diagramme

Dans une classe, deux options sont proposées : latin et théâtre.

On sait que, 16 élèves pratiquent le latin, 14 le théâtre, 5 pratiquent les deux options et 8 n'en pratiquent aucune.

Calculer le nombre d'élèves de cette classe.

Correction

Soit L l'ensemble des élèves pratiquant le latin et T l'ensemble des élèves pratiquant le théâtre.

On a alors : $Card(L) = 16$

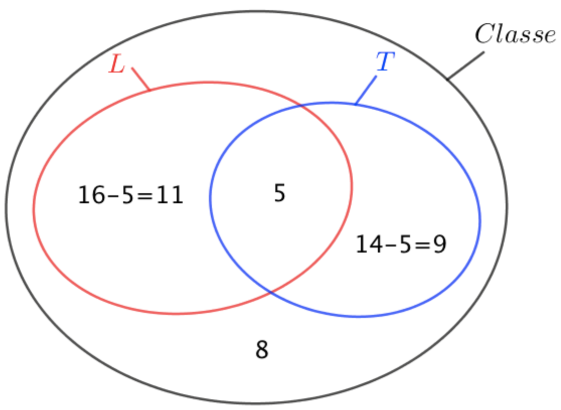
$Card(T) = 14$

$Card(L \cap T) = 5$

$Card(\bar{L} \cap \bar{T}) = 8$

On ne peut pas utiliser le principe additif car les ensembles L et T ne sont pas disjoints.

On schématise alors la situation à l'aide d'un diagramme :



On en déduit le nombre d'élèves de la classe en utilisant le principe additif sur des ensembles disjoints, soit : $11 + 5 + 9 + 8 = 33$.

III. Principe multiplicatif

Exemple :

On considère les 3 ensembles suivants :

$E_1 = \{renard\ roux, renard\ noir, renard\ blanc\}$

$E_2 = \{femme\ rousse, femme\ brune, femme\ blonde\}$

$E_3 = \{robe\ rouge, robe\ noire, robe\ blanche\}$

Les femmes choisissent une robe et un renard de façon aléatoire.

On appelle produit cartésien $E_1 \times E_2 \times E_3$, l'ensemble de tous les triplets formés d'un élément de E_1, d'un élément de E_2 et d'un élément de E_3.

La photo présente 3 triplets, de gauche à droite :

$(renard\ blanc, femme\ brune, robe\ rouge)$

$(renard\ roux, femme\ blonde, robe\ noire)$

$(renard\ noir, femme\ rousse, robe\ blanche)$

Intuitivement, on peut penser qu'il existe $3 \times 3 \times 3 = 27$ triplets différents.

1. Définitions

Soit p ensembles finis $E_1, E_2, \dots, E_p$.

- Le produit cartésien $E_1 \times E_2$ est l'ensemble des **couples** (a_1, a_2) où $a_1 \in E_1$ et $a_2 \in E_2$.

- Le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times E_3$ est l'ensemble des **triplets** (a_1, a_2, a_3) où $a_1 \in E_1$, $a_2 \in E_2$ et $a_3 \in E_3$.

- Le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$ est l'ensemble des ***p*-uplets** $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ où $a_1 \in E_1$, $a_2 \in E_2$ … $a_p \in E_p$.

2. Propriété

Soit p ensembles finis $E_1, E_2, \dots, E_p$. Alors on a :

$$Card\left(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p\right) = Card(E_1) \times Card(E_2) \times \dots \times Card\left(E_p\right)$$

3. Méthode

Appliquer le principe multiplicatif pour dénombrer

Un restaurant propose sur sa carte 3 entrées, 4 plats de résistance et 2 desserts.

a) Combien de menus différents composés d'une entrée, d'un plat et d'un dessert peut-on constituer ?

b) Même question si le dessert est une tarte aux pommes imposée.

Correction

a) Soit E l'ensemble des entrées, P celui des plats et D celui des desserts.

On considère alors les triplets de la forme (entrée, plat, dessert) éléments de $E \times P \times D$.

D'après le principe multiplicatif, on a :

$Card(E \times P \times D) = Card(E) \times Card(P) \times Card(D) = 3 \times 4 \times 2 = 24.$

Il existe 24 menus différents.

b) $Card(E \times P) = Card(E) \times Card(P) = 3 \times 4 = 12$

Il existe 12 menus différents dont le dessert est une tarte aux pommes.

Chapitre II: k-uplets et permutations

I. Dénombrement des k-uplets

Ici, l'ordre des éléments compte et les éléments peuvent se répéter.

Exemple :

Si on effectue un produit cartésien d'un ensemble sur lui-même, on note $E \times E = E^2$.

On lance par exemple deux dés à six faces. On note $E = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$ l'ensemble des résultats possibles pour un dé.

Alors E^2 est l'ensemble des couples possibles correspondants aux résultats du lancer de deux dés. On a par exemple :

$$(1,2) \in E^2$$

$$(6,3) \in E^2$$

$$(5,5) \in E^2$$

D'après le principe multiplicatif, il existe $6 \times 6 = 6^2$ couples possibles.

1. Propriété

Soit un ensemble fini E à n éléments.

Alors le nombre de k-uplets est égal à :

$$Card(E^k) = n^k$$

2. Méthode

Dénombrer le nombre de k-uplets

« Il y avait pour entrer juste un digicode

Deux lettres et dix chiffres incommodes

Un détail que t'avais surement oublié

4 milliards de possibilités »

Le refrain de la chanson « Digicode » de l'artiste *Oldelaf* comporte une erreur à corriger en considérant que le code est constitué de 2 lettres (parmi A, B, C, … Z) suivies de 10 chiffres (parmi 0, 1, 2, … 9).

Par exemple, RT 49903 42472 pourrait être un code à composer sur le digicode.

Correction

Soit A l'ensemble des lettres de l'alphabet et N l'ensemble des chiffres.

On a alors : $Card(A) = 26$ et $Card(N) = 10$.

Pour le choix des 2 lettres, on compte le nombre de couples de A :

$Card(A^2) = 26^2 = 676$ possibilités.

Pour le choix des 10 chiffres, on compte le nombre de 10-uplets de N :

$Card(N^{10}) = 10^{10}$ possibilités.

Nombre de possibilités du digicode :

$Card(A^2 \times N^{10}) = Card(A^2) \times Card(N^{10}) = 676 \times 10^{10} = 6\,760\,000\,000\,000$

Soit environ 7 000 milliards de possibilités et non pas 4 milliards comme dans la chanson.

A noter :

En pratique, un digicode contient généralement deux lettres possibles (A et B) et le code est souvent composé d'une lettre suivie de 4 chiffres. Par exemple : B5633

Dans ce cas : $Card(A \times N^4) = Card(A) \times Card(N^4) = 2 \times 10^4 = 20\,000$.

Pour retrouver les 4 milliards de la chanson, il faudrait utiliser un tel digicode avec un code composé de deux lettres suivies de 9 chiffres.

$Card(A^2 \times N^9) = Card(A^2) \times Card(N^9) = 2^2 \times 10^9 = 4\,000\,000\,000$!

II. Dénombrement des k-uplets d'éléments distincts

Ici, l'ordre des éléments compte et les éléments ne se répètent pas.

Exemple :

On considère l'ensemble $E = \{a\,;b\,;o\,;p\,;r\}$.

- (b, o, a) et (r, a, p) sont des triplets d'éléments distincts de E.
- (b, a, r, b, a, r) n'est pas un 6-uplet d'éléments distincts de E car des éléments se répètent.
- (p, r, o, b, a) est un 5-uplet différent de (b, a, p, r, o). L'ordre des éléments est à prendre en compte.

Calculons par exemple le nombre de triplets d'éléments distincts de E.

- Il existe 5 choix pour la 1ère lettre.
- La 1ère lettre étant fixée, il existe 4 choix pour la 2e lettre. Car il n'y a pas répétition d'éléments.
- Les deux premières lettres étant fixées, il existe 3 choix pour la 3e lettre.

En appliquant le principe multiplicatif, le nombre de triplets d'éléments distincts de E est égal à : $5 \times 4 \times 3 = 60$.

1. Définition

Soit E un ensemble à n éléments. Et $k \leq n$.

Un ***k*-uplets d'éléments distincts** de E est un k-uplet pour lequel tous les éléments sont différents.

Un k-uplets d'éléments distincts est également appelé **arrangement** de k éléments parmi n.

On appelle **factorielle *n*** le produit de tous les nombres entiers de 1 à n. Et on note :
$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$

Remarque : $n!$ se lit « factorielle n ».

Exemples :

$5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$

$100! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times 99 \times 100$

$1! = 1$

$0! = 1$ par convention

Propriété : Soit E un ensemble à n éléments.

Le nombre de k-uplet d'éléments distincts de E est égal à :

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

2. Méthode :

Dénombrer le nombre de k-uplets d'éléments distincts (arrangements)

Pour nettoyer un appareil électrique, Fred débranche les 3 prises qui se trouvent à l'arrière de l'appareil.

Mais au moment d'effectuer à nouveau les branchements, il se rend compte qu'il existe 12 positions différentes pour les 3 prises.
Comme il n'a pas pris soin de noter les positions respectives des 3 prises et qu'il n'y connait rien en électronique, il décide d'effectuer les branchements au hasard.
Quelle est la probabilité qu'il retrouve le bon branchement.

Correction

Fred doit choisir 3 positions parmi 12. L'ordre a une importance, on voit que les prises sont de différentes couleurs.
Il existe 12 positions possibles pour la $1^{\text{ère}}$ prise. Celle-ci étant fixée, il existe alors 11 positions pour la 2^{e} et ainsi 10 positions pour la 3^{e} prise.
En appliquant le principe multiplicatif, le nombre de postions possibles est égal à : $12 \times 11 \times 10 = 1320$.

On peut également considérer les triplets d'éléments distinct (arrangements de 3 éléments parmi 12), soit :

$$\frac{12!}{(12-3)!} = \frac{12!}{9!} = \frac{1 \times 2 \times \ldots \times 12}{1 \times 2 \times \ldots \times 9} = \frac{1 \times 2 \times \ldots 9 \times 10 \times 11 \times 12}{1 \times 2 \times \ldots \times 9} = 10 \times 11 \times 12$$
$$= 1320$$

Parmi les 1320 positions, une seule est la bonne. La probabilité que Fred retrouve le bon branchement est égal à : $\frac{1}{1320}$.

III. Dénombrement des permutations

Ici, l'ordre des éléments compte et les éléments ne se répètent pas.

Exemple : On considère l'ensemble $E = \{1\,; 2\,; 3\,; 4\,; 5\}$.

$(1, 3, 2, 5, 4)$ et $(5, 1, 2, 3, 4)$ sont des 5-uplets qui utilisent tous les éléments de E.

On les appelle des permutations de E.

1. Définition

Soit E un ensemble à n éléments.

Une **permutation** de E est un n-uplet éléments distincts de E.

Remarque : Une permutation d'un ensemble à n élément est un n-uplet d'un ensemble à n éléments. Pour une permutation, on a $k = n$.

2. Propriété

Soit E un ensemble à n éléments.

Le nombre de permutations de E est égal à $n!$.

Exemple :

Il existe $3! = 6$ façons différentes que 3 personnes s'assoient sur un banc à 3 places.

3. Méthode

Dénombrer le nombre de permutations

Pour une conférence, on a invité 12 scientifiques, 6 hommes et 6 femmes renommés, qui seront placés au premier rang de la salle qui comprend 12 places. On attend 5 mathématiciens, 3 physiciens et 4 biologistes.

C’est le moment de prendre place, l’organisateur demande aux scientifiques de s’installer.

- Les mathématiciens proposent que chacun choisisse une place au hasard.
- Les physiciens préfèrent rester ensemble et qu’ainsi tous les physiciens soient assis côte à côte.
- Les biologistes disent que dans ce cas, il serait mieux que les hommes se placent ensemble et que les femmes en fassent de même.

Calculer le nombre de façons différentes de s’assoir pour chaque proposition.

Correction

- Proposition des mathématiciens :

Le nombre de façons de placer ces 12 scientifiques est égal au nombre de permutations dans un ensemble à 12 éléments, soit :

$12! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times 11 \times 12 = 479\,001\,600$.

- Proposition des physiciens :

Le groupe des physiciens est composé de 3 personnes. Vu qu’ils souhaitent s’assoir côte à côte, le groupe dispose de 10 positions possibles :

Les places 1-2-3 ou 2-3-4 ou 3-4-5 ou … ou 10-11-12.

Au sein du groupe des physiciens, le nombre de façons de s’assoir est égal au nombre de permutations d’un ensemble à 3 éléments, soit : $3! = 6$.

Au sein du groupe formé par les autres scientifiques, le nombre de façons de s’assoir est égal au nombre de permutations d’un ensemble à $12 - 3 = 9$ éléments, soit : $9! = 362\,880$.

Donc, d’après le principe multiplicatif, le nombre total de façons de s’assoir selon les physiciens est égal à : $10 \times 6 \times 362\,880 = 21\,772\,800$.

- Proposition des biologistes :

Le nombre d'ordres possibles pour placer le groupe des femmes et des hommes est égal à 2 : hommes-femmes ou femmes-hommes.

Au sein du groupe des femmes, le nombre de façons de s'assoir est égal au nombre de permutations d'un ensemble à 6 éléments, soit : $6! = 720$.

De même pour le groupe des hommes : $6! = 720$.

Donc, d'après le principe multiplicatif, le nombre total de façons de s'assoir selon les biologistes est égal à : $2 \times 720 \times 720 = 1\,036\,800$.

Chapitre III : Combinaisons

I. Nombre de combinaisons

Ici, l'ordre des éléments n'a pas d'importance et les éléments ne se répètent pas.

Exemple :

On considère l'ensemble $E = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\}$.

Le sous-ensemble $\{1\,;2\,;3\}$ est appelée une combinaison de E à 3 éléments.

Le sous-ensemble $\{2\,;5\}$ est appelée une combinaison de E à 2 éléments.

Pour une combinaison, l'ordre n'a pas d'importance. Ainsi $\{1\,;2\}$ et $\{2\,;1\}$ correspondent à la même combinaison de E.

1. Définition

Soit E un ensemble à n éléments. Et $k \leq n$.

Une **combinaison** de k éléments de E est un sous-ensemble de E.

2. Propriété

Soit E un ensemble à n éléments.

Le nombre de combinaisons de k éléments de E est égal à :

$$\frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Ce nombre se note : $\binom{n}{k}$.

<u>Cas particuliers :</u> Pour tout entier naturel n : $\binom{n}{0} = 1$ $\binom{n}{n} = 1$ $\binom{n}{1} = n$

3. <u>Méthode</u>

Dénombrer le nombre de combinaisons

Une classe composée de 18 filles et 16 garçons va élire les 4 délégués. Dans cet exercice, on ne distingue pas les délégués et les délégués-adjoints.

a) Combien existe-t-il de possibilités pour cette élection ?

b) Emma dit qu'elle ne souhaite pas être élue si Bastien est élu. Dans ces conditions, combien existe-t-il de possibilités ?

Correction

a) On compte le nombre de combinaisons de 4 élèves parmi $18 + 16 = 34$ élèves, soit :

$$\binom{34}{4} = \frac{34!}{4!\,(34-4)!} = \frac{34!}{4!\,30!} = \frac{31 \times 32 \times 33 \times 34}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 46376$$

b) On commence par compter le nombre de possibilités tel que Emma et Bastien sont élus.

Si Emma et Bastien sont élus, il reste à choisir 2 élèves parmi 32, soit le nombre de combinaisons de 2 élèves parmi 32 élèves, soit encore :

$$\binom{32}{2} = \frac{32!}{2!\,(32-2)!} = \frac{32!}{2!\,30!} = \frac{31 \times 32}{1 \times 2} = 496$$

Ainsi dans ce cas, le nombre de possibilités est égal à $46376 - 496 = 45880$.

II. Coefficients binomiaux

Le nombre $\binom{n}{k}$ de combinaisons de k parmi n porte également le nom de **coefficient binomial** en référence à une loi de probabilité : la loi binomiale qui est définie à l'aide des coefficients $\binom{n}{k}$. Celle-ci sera étudiée dans le chapitre « Variables aléatoires ».

<u>Propriété de symétrie :</u> Pour tout entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n$: $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$

<u>Propriété du triangle de Pascal :</u> Pour tout entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n$:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Démonstration au programme :

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!} \\
&= \frac{n!}{k!\,(n-k-1)!\,(n-k)} + \frac{n!}{k!\,(k+1)(n-k-1)!} \\
&= \frac{n!}{k!\,(n-k-1)!}\left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1}\right) \\
&= \frac{n!}{k!\,(n-k-1)!}\left(\frac{k+1+n-k}{(n-k)(k+1)}\right) \\
&= \frac{n!}{k!\,(n-k-1)!}\left(\frac{n+1}{(n-k)(k+1)}\right) \\
&= \frac{n!\,(n+1)}{k!\,(k+1)(n-k-1)!\,(n-k)} \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n-k)!} \\
&= \binom{n+1}{k+1}
\end{aligned}$$

<u>**Méthode**</u>

Calculer des coefficients binomiaux

Calculer : a) $\binom{25}{24}$ b) $\binom{4}{2}$

Correction

a) $\binom{25}{24} = \binom{25}{25-24}$ par symétrie

$= \binom{25}{1}$

$= 25.$

b) $\binom{4}{2} = \binom{3}{1} + \binom{3}{2}$ d'après la propriété du triangle de Pascal

$= 3 + \binom{3}{2}$

$= 3 + \binom{2}{1} + \binom{2}{2}$ d'après la propriété du triangle de Pascal

$= 3 + 2 + 1 = 6$

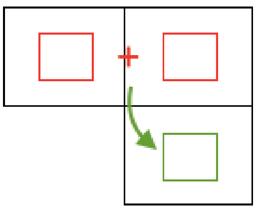
<u>Avec la calculatrice :</u> Il est possible de vérifier les résultats à l'aide d'une calculatrice.

La fonction se nomme "***combinaison***" ou "***nCr***".

Pour calculer $\binom{25}{24}$, on saisit : 25***combinaison***24 ou 25***nCr***24

<u>Avec un tableur :</u> La fonction se nomme "***COMBIN***". Pour calculer $\binom{25}{24}$, on saisit =***COMBIN***(25;24)

III. Le triangle de Pascal



Le grand tableau qui suit s'appelle le triangle de Pascal.

Il se complète de proche en proche de la manière ci-cont

On a, par exemple, dans le tableau : 10 + 5 = 15

Le triangle de Pascal peut être utilisé pour lire rapidement les coefficients binomiaux.

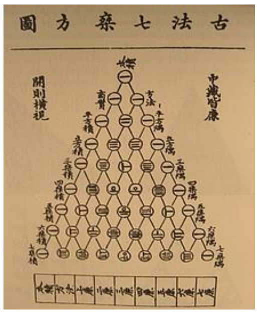
Par exemple, pour $n = 4$ et $k = 2$, on a : $\binom{n}{k} = \binom{4}{2} = 6$.

k \ n	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	$\binom{4}{2} = 6$	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

On retrouve la propriété du triangle de Pascal :

$$\binom{5}{3} + \binom{5}{4} = \binom{6}{4}$$

Et de façon générale, on a : $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$



Blaise Pascal (1623 ; 1662) fait la découverte d'un triangle arithmétique, appelé aujourd'hui "triangle de Pascal". Son but est d'exposer mathématiquement certaines combinaisons numériques dans les jeux de hasard et les paris. Cette méthode était déjà connue des perses mais aussi du mathématicien chinois *Zhu Shi Jie* (XIIe siècle).

Ci-contre, le triangle de *Zu Shi Jie* extrait de son ouvrage intitulé *Su yuan zhian* (1303).

IV. Parties d'un ensemble

<u>Propriété :</u> Soit E un ensemble à n éléments.

Le nombre de sous-ensemble de E est égal à :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Démonstration au programme :

- Le nombre de sous-ensemble de E est égal à la somme des sous-ensembles à 0 éléments, à 1 éléments, à 2 éléments, …, à n éléments. Soit : $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}$

- Par ailleurs, pour construire un sous-ensemble de E, on considère n étapes où à chaque élément de E, on décide de le choisir ou de ne pas le choisir pour l'inclure dans le sous-ensemble.

Il y a donc deux possibilités par étape et il y a n étapes.

Il y a donc $2 \times 2 \times ... \times 2$ (n facteurs) possibilités d'obtenir un sous-ensemble de E, soit 2^n.

Exemple : Soit : $E = \{1, 2, 3\}$. Alors toutes les parties de E sont :

$\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$, $\{1,2,3\}$.

Elles sont au nombre de 8. En effet, ici $n = 3$ et $2^3 = 8$.

Exemple 1

Nombre de mots composés de 3 lettres de l'alphabet ?

ORDONNÉ - RÉPÉTITION

→ Nombre de triplet d'un ensemble à 26 éléments = 26^3.

Exemple 2

Nombre de mots composés de 3 lettres de l'alphabet toutes différentes ?

ORDONNÉ – PAS RÉPÉTITION

→ Nombre de triplets d'éléments tous distincts (arrangements) d'un ensemble à 26 éléments = $26 \times 25 \times 24$.

Exemple 3

Nombre d'anagrammes du mot « MDR ».

ORDONNÉ – PAS RÉPÉTITION

→ Nombre de permutations à 3 éléments = 3!

Exemple 4

Nombre de possibilités de tirer simultanément 3 jetons parmi 6 jetons marqués de 6 lettres toutes différentes.

NON ORDONNÉ – PAS RÉPÉTITION

→ Nombre de combinaisons à 3 éléments parmi 6 = $\binom{6}{3}$.