CHAPITRE 1 : MECANIQUE

CORRIGE DE L'EXERCICE 4

1. **L'équation différentielle du mouvement du solide (S).**

   Système : {solide (S)}

   Bilan des forces extérieures : $\vec{P}$, $\vec{T}$ et $\vec{R}$

   D'après la deuxième loi de Newton, $\vec{P} + \vec{T} + \vec{R} = m\vec{a}$

   En projetant cette relation vectorielle sur l'axe des x, on obtient :

   $-kx = m\,a$ avec $a = \ddot{x}$

   D'où l'équation différentielle, $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

2. **Vérifions que $x(t) = x_0 \sin(\omega t + \varphi)$ où x_0, ω et φ sont des constantes, est une solution de l'équation différentielle.**

   $\ddot{x}(t) = -x_0\,\omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$ et si on remplace $\ddot{x}(t)$ et $x(t)$ on a vraiment une somme nulle.

3. **L'expression de l'énergie mécanique du système { solide (S) + ressort + Terre} en fonction de x, v, k et m**

   $E_m = E_c + E_{pp} + E_{pe}$

   $E_c = \frac{1}{2} m\, v^2$

   $E_{pp} = 0$

   $E_{pe} = \frac{1}{2} k\, x^2$

   $\boxed{E_m = \frac{1}{2} m\, v^2 + \frac{1}{2} k\, x^2}$

   Montrons que cette énergie mécanique peut s'écrire en fonction de k et x_0.

   $x(t) = x_0 \sin(\omega t + \varphi)$

   $\dot{x}(t) = v(t) = x_0\,\omega \cos(\omega t + \varphi)$

   $E_m = \frac{1}{2} m\, v^2 + \frac{1}{2} k\, x^2 = \frac{1}{2} m\, x_0^2\, \omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2} k\, x_0^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$ or $\omega^2 = \frac{k}{m}$

   $E_m = \frac{1}{2} k\, x_0^2 [\cos^2(\omega t + \varphi) + \sin^2(\omega t + \varphi)] = \frac{1}{2} k\, x_0^2$

   $\boxed{E_m = \frac{1}{2} k\, x_0^2}$

   Donc l'énergie mécanique est une constante.