Corrigé problème 2 série C Bacc 2023

PROBLEME 2

Partie A

$$f(x)=\begin{cases} x\ln|x|-x+2 & si\ x\prec 0 \\ (2-x)e^{x} & si\ x\geq 0 \end{cases},$$

$D_f=]-\infty;0[\cup[0;+\infty[=\mathbb{R}$ et on note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$;d'unité 1cm.

1)a- Montrons que f est continue en $x_0=0$

- $f(0)=2$
- $\lim\limits_{x\to O^-} f(x)=\lim\limits_{x\to O^-}(x\ln|x|-x+2)=\lim\limits_{x\to O^-}(x\ln(-x)-x+2)$

  On pose $X=-x \Leftrightarrow x=-X$

  $\lim\limits_{X\to O^+} f(x)=\lim\limits_{X\to O^+}(-X\ln X+X+2)=2$

- $\lim\limits_{x\to O^+} f(x)=\lim\limits_{x\to O^+}(2-x)e^{x}=2$

  Conclusion : f est continue en $x_0=0$

b-Etude de dérivabilité de f en $x_0=0$

$$\lim_{x\to O^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to O^-}\frac{x\ln|x|-x+2-2}{x}=\frac{0}{0}:FI$$

$\lim\limits_{x\to O^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to O^-}\dfrac{x\ln|x|-x}{x}=\lim\limits_{x\to O^-}\ln|x|-1=-\infty$: donc n'est pas dérivable à gauche de 0

$$\lim_{x\to O^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to O^+}\frac{(2-x)e^{x}-2}{x}=\lim_{x\to O^+}\frac{2(e^{x}-1)}{x}-e^{x}=2-1=1$$

Alors f est dérivable à droite de 0.

Interprétation

Comme $f_g'(0)\neq f_d'(0)$ donc f n'est pas dérivable au point d'abscisse 0 mais la courbe (C) admet deux demi-tangentes en $x_0=0$:

- A gauche du point d'abscisse 0 : demi- tangente verticale ou $(T):x=0$
- A droite du point d'abscisse 0 : demi-tangente de coefficient directeur 1 ou d'équation $(T):y=x+2$

2) a- *Variation de* f

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x\ln|x|-x+2)=\lim_{x\to-\infty}x(\ln|x|-1+\frac{2}{x})=-\infty$$

Dérivée

Pour $x\prec 0$: $f'(x)=\ln|x|$

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1$

x	$-\infty$	α	-1		0
$f'(x)$	$+$		0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	0 ↗	3	↘	2

Pour $x \geq 0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(2-x)e^{x} = -\infty$$

$f'(x) = (1-x)e^{x}$ et $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	2	↗	e	↘	$-\infty$

b-Tableau de variation de f sur $D_f =]-\infty;0[\cup[0;+\infty[= \mathbb{R}$

x	$-\infty$	α	-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+$			-	|	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	0 ↗	3	↘	2	↗	e	↘	$-\infty$

3-Comme est continue et strictement croissante sur $]-\infty;-1[$ ainsi que sur $[-5;-4]\subset]-\infty;-1[$ alors réalise une bijection sur $[-5;-4]$ vers $f([-5;-4])$ et

$$\begin{cases} f(-5) = -5\ln 5 + 7 \approx -1,04 \prec 0 \\ f(-4) = -4\ln 4 + +6 \approx 0,06 \succ 0 \end{cases}$$

$$f(-5)\times f(-4) \prec 0$$

D'après le Théorème des valeurs intermédiaures, il existe une unique $\alpha \in]-5;-4[$ solution de l'équation $f(x) = 0$

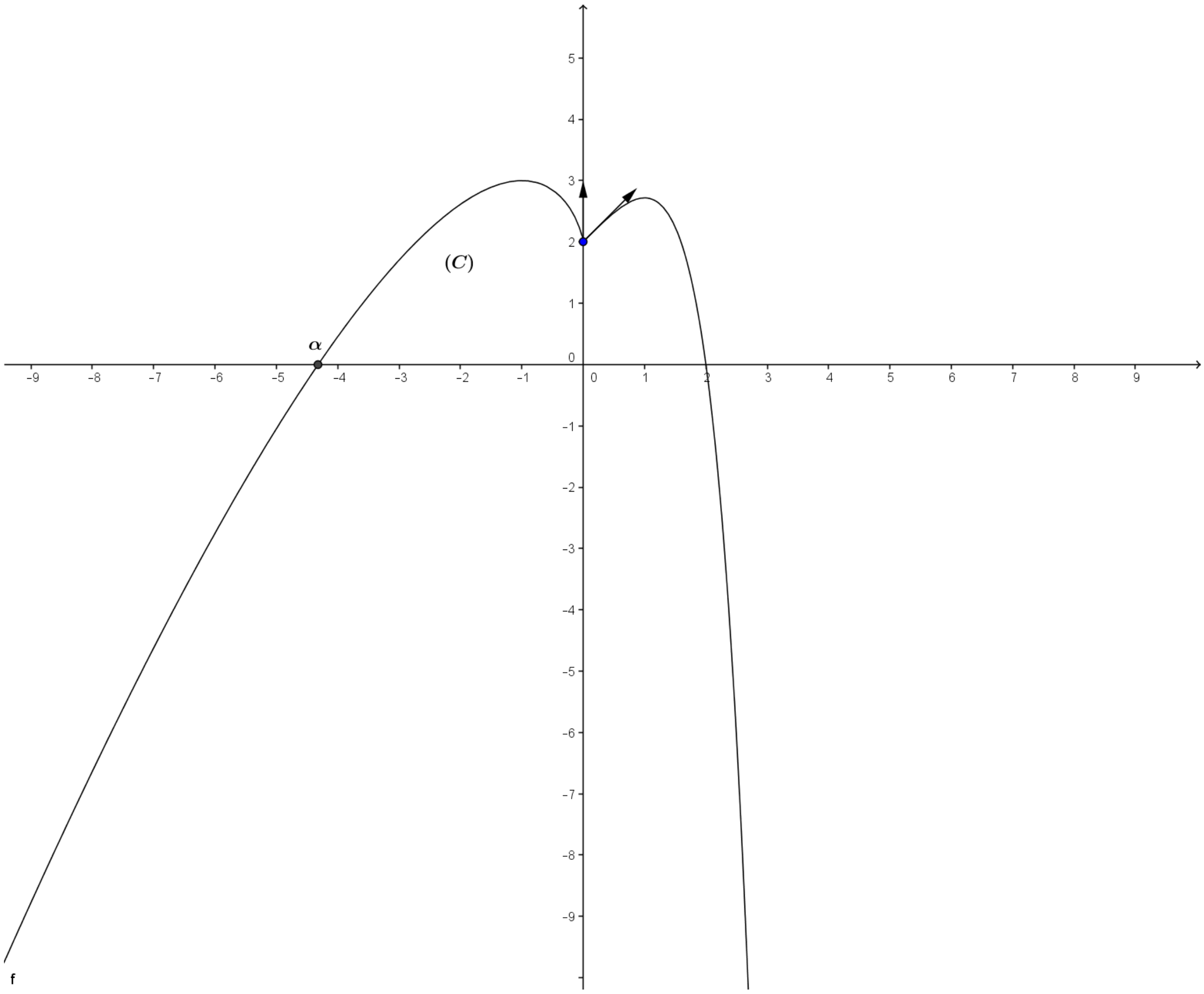
4) Construction de (C)

Etude de branches infinies

Au voisinage de $-\infty$:

$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\ln|x|-1+\frac{2}{x}\right)=-\infty$: On a une branche parabolique de direction asymptotique suivant $y'0y$.

$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}-1\right)e^{x}=-\infty$: On a une branche parabolique de direction asymptotique suivant $y'0y$.



Partie.B

Soit l'intégrale définie par :pour tout $n\geq1$: $I_n=\frac{1}{n!}\int_0^2(2-x)^n e^x dx$

1) En utilisant l'I.P.P, calcul de $I_1=\int_0^2(2-x)e^x dx$

   On pose $\begin{array}{l} u(x)=2-x\Rightarrow u'(x)=-1 \\ v'(x)=e^x\Rightarrow v=e^x \end{array}$

   Alors $I_1=\int_0^2(2-x)e^x dx=\Big[(2-x)e^x\Big]_0^2+\int_0^2 e^x dx=e^2-3$

   Interprétation

   $I_1\times ua$ est l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=2$

2)Pour $n \geq 1$, montrons que $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n!} 2^n (e^2 - 1)$

Soit $n \geq 1$, $x \in [0;2] \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2$

$-2 \leq -x \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq 2 - x \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq (2-x)^n \leq 2^n \Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{n!}(2-x)^n e^x \leq \frac{1}{n!} 2^n e^x$

Par passage à l'intégrale on a : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n!} 2^n (e^2 - 1)$

3)démontrons que pour tout $n \geq 1 : I_{n+1} = \frac{-2^{n+1}}{(n+1)!} + I_n$

$$I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \int_0^2 (2-x)^{n+1} e^x dx$$

On pose $u(x) = (2-x)^{n+1} \Rightarrow u'(x) = (n+1)(2-x)^n$ et $v'(x) = e^x \Rightarrow v(x) = e^x$

$$I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \left[(2-x)^{n+1} e^x \right]_0^2 + \frac{(n+1)}{(n+1)!} \int_0^2 (2-x)^n e^x dx$$

$$= \frac{-2^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{(n+1)}{(n+1)n!} \int_0^2 (2-x)^n e^x dx$$

D'où $I_{n+1} = \frac{-2^{n+1}}{(n+1)!} + I_n$

4)Montrons en utilisant le raisonnement par récurrence que $n \geq 1 : 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + ... + \frac{2^n}{n!} + I_n = e^2$

Pour n = 1 , on a : $1 + \frac{2}{1!} + I_1 = 3 + e^2 - 3 = e^2$: vraie

Supposons jusqu'au rang n que $1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + ... + \frac{2^n}{n!} + I_n = e^2$ et démontrons qu'au rang $n+1$;

on a : $1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + ... + \frac{2^n}{n!} + \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} + I_{n+1} = e^2$

Or :

$$1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + ... + \frac{2^n}{n!} + \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} + I_{n+1}$$

$$= 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + ... + \frac{2^n}{n!} + \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} + I_n = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + ... + \frac{2^n}{n!} + I_n = e^2$$

D'où pour tout $n \geq 1 : 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + ... + \frac{2^n}{n!} + I_n = e^2$

5)Soit (U_n) une suite définie par : $U_n = \frac{2^n}{n!}$ pour $n \geq 1$

a) Expression de $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ en fonction de n

$$\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}}=\frac{2}{n+1}$$

Montrons que $n\geq 3.$; $U_{n+1}\leq\frac{1}{2}U_n$

$n+1\geq 4\Leftrightarrow\frac{1}{n+1}\leq\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{2}{n+1}\leq\frac{1}{2}$. D'où $\frac{U_{n+1}}{U_n}\leq\frac{1}{2}\Leftrightarrow U_{n+1}\leq\frac{1}{2}U_n$

b) Montrons que $n\geq 3\,,0\leq U_n\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}.U_3$

$$\left.\begin{array}{l} n=3;\quad 0\leq U_4\leq\frac{1}{2}U_3\\ \qquad 0\leq U_5\leq\frac{1}{2}U_3\\ \qquad ..\\ \qquad .\\ \qquad 0\leq U_n\leq\frac{1}{2}U_{n-1}\end{array}\right\}\text{Multiplication membre à membre}$$

$$0\leq U_n\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}\times U_3$$

c) Déduction de limites

Comme $0\prec\frac{1}{2}\prec 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=0$ et que $0\leq I_n\leq\frac{1}{n!}2^n(e^2-1)\Leftrightarrow 0\leq I_n\leq U_n(e^2-1)$, passage à la limite on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$

d) Vérification

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+...+\frac{2^n}{n!}+I_n\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+...+\frac{2^n}{n!}\right)+\lim_{n\to+\infty}I_n$$

$$=\lim_{n\to+\infty}e^2=e^2$$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+...+\frac{2^n}{n!}+I_n\right)=e^2$