LYCEE PHILIBERT TSIRANANA
Cde : 401 010 020

Année Scolaire 2022-2023
BAC BLANC

Epreuve de : MATHEMATIQUES
Classe : **TD**
Durée : 3h 15
Coeff : 4

:::

Exercice 1 : **(5 points)**

1° Soit f la fonction à variable complexe définie par $f(z)=\dfrac{z-4-4i}{z+3}$.

a. Résoudre l'équation $f(z)=z$ et mettre sous forme trigonométrique les solutions. (0,75-0,5)

b. En déduire sous forme trigonométrique les solutions de l'équation $z^3=-2+2i$ (0,5)

2° Dans le plan complexe d'origine O, on donne les points A, B et M d'affixes respectives $z_A=-3$; $z_B=4+4i$ et $z_M=z$.

a. Interpréter géométriquement le module et un argument de $f(z)$. (0,5)

b. En déduire que l'ensemble (Δ) des points M d'affixe z tel que $f(z)$ est réelle est une droite que l'on précisera. (0,25)

c. Soit C le point d'affixe z_C tel que $|f(z_C)|=2$ et $Arg\left[f(z_C)\right]=-\dfrac{\pi}{2}$.

- Quelle est la nature du triangle ABC ? (0,25)
- Déterminer l'affixe z_C du point C. (0,5)

3° Soit S la similitude directe définie par son expression analytique suivante : $S:\begin{cases}x'=-2x-2y-4\\y'=2x-2y-6\end{cases}$.

a. Déterminer les coordonnées du point A' l'image du point A par S. (0,25)

b. Déterminer la forme complexe et les éléments caractéristiques de S. (1 pt)

c. Déterminer et construire le cercle (Γ) dont son image par S est le cercle (Γ') d'équation :
$x^2+y^2-4x+24y+76=0$. (0,5)

Exercice 2 : **(5 points)**

Soit un disque (δ) divisé en 3 parties A, B, C et pouvant tourner autour d'un axe. Lorsqu'il s'arrête, l'une de ces parties se trouve en face d'une aiguille de repérage. Le disque (δ) n'est pas parfaitement équilibré de telle sorte que la probabilité de chacune des parties de se placer devant l'aiguille vérifie les égalités suivantes : $\dfrac{p_A}{3}=\dfrac{p_B}{2}=\dfrac{p_C}{4}$.

1° a. Montrer que $p_A=\dfrac{1}{3}$. (0,5pt)

b. En déduire p_B et p_C. (0,25pt-0,25pt)

2° Lors d'une épreuve $\mathcal{E}$ une personne fait tourner une fois le disque (δ).

- Si la partie A apparait, elle gagne
- Si la partie C apparait, elle perd
- Si la partie B apparait, elle fait tourner une deuxième fois le disque et :
  - Si la partie A apparait, elle gagne
  - Sinon elle perd.

On considère l'événement D : " Le joueur gagne le jeu". Montrer que $p(D)=\dfrac{11}{27}$ (0,75pt)

3° On répète l'épreuve "$\mathcal{E}$" 3 fois de suite et d'une manière indépendante. Soit X la variable aléatoire associée au nombre de réalisation de l'événement D après les épreuves

a. Donner l'univers image de X. (0,25pt)

b. Calculer la loi de probabilité de X. (1,25pts)

c. Calculer E(X) et V(X). (0,25pt-0,25pt)

4° On fait tourner $n-$fois de suite et de façon indépendante le disque (δ). Soit A_n un événement où l'aiguille s'arrête au moins une fois sur la partie A.

a. Calculer $p(A_n)$ en fonction de n. (0,5pt)

b. Déterminer le plus petit entier naturel n si $p(A_n) > 0,99$. (0,75pt)

PROBLEME **(10 points)**

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = -x+7-4e^x & si\ x \in]-\infty;0] \\ f(x) = x+3-x\ln x & si\ x \in]0;+\infty[\end{cases}$ et on note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(0;\vec{i};\vec{j}\right)$, d'unité 1cm.

1° a. Etudier la continuité de f au point d'abscisse 0. (0,25 – 0,25 – 0,25)

b. Etudier la dérivabilité de f au point d'abscisse 0. (0,5 – 0,5)

c. Donner l'interprétation des résultats obtenus. (0,25)

2° Etudier la variation de f et dresser son tableau de variations. (2,5 pts)

3° Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α et que $\alpha \in]4,97;4,98[$. (0,5)

4° a. Donner une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse e. (0,5)

b. Montrer que la droite (D) d'équation $(D): y = -x+7$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$. (0,5)

c. Construire $(\mathcal{C})$, (D) et (T) ; en précisant les deux demi-tangentes au point d'abscisse 0. (1,5)

5° a. Déterminer $S(\alpha)$, l'aire du domaine plan limité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axes des abscisses et les deux droites d'équations $x=1$ et $x=\alpha$ (α est solution de $f(x)=0$).

b. Montrer que $S(\alpha) = \dfrac{\alpha^2}{4} + \dfrac{3}{2}\alpha - \dfrac{15}{4}$. (0,5)

6° Soit g la restriction de sur l'intervalle $]-\infty;0]$.

a. Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} dont on précisera son ensemble de définition. (0,5)

b. Dresser le tableau de variation de g^{-1} et tracer $(\mathcal{C}')$; la courbe représentative de g^{-1} dans le même repère que $(\mathcal{C})$. (0,25 – 0,5)

c. Calculer $g(-1)$ et $\left(g^{-1}\right)'\left(8-\dfrac{4}{e}\right)$. (0,25 – 0,5)