BAC C 2019

<u>Exercice 1</u> : (4 points)

<u>Arithmétique</u>

I. Dans ℤ x ℤ, on considère deux équations : $(E_0): 39x-17y=1$ et $(E): 39x-17y=4$.

1° Justifier que l'équation (E_0) admet une solution dans ℤ x ℤ (sans résoudre l'équation (E_0)).

2° a. Par l'algorithme d'Euclide relatif aux nombres 39 et 17, trouver une solution particulière de (E_0).

b. En déduire une solution particulière de (E).

c. Achever la résolution dans ℤ x ℤ de l'équation (E).

II. Soit n un entier naturel.

1° Montrer que si n est impair, alors 10^n+1 est divisible par 11.

2° Dans le cas n pair, donner le reste de la division euclidienne de 10^n+1 par 11.

<u>Probabilité</u> :

Une roulette truquée comporte quatre secteurs différents numérotés 1, 2, 3 et 4. Quand on lance la roulette, c'est-à-dire lorsqu'on la fait tourner, un index fixe pointe sur l'un des quatre secteurs à l'arrêt.

Après un lancement, on note P_k la probabilité pour que l'index pointe le secteur numéroté k où $k \in \{1; 2; 3; 4\}$.

On admet qu'il existe un réel strictement positif α tel que $P_k = k\alpha$.

1° Un joueur lance la roulette une fois.

a. Déterminer le réel α. En déduire les probabilités P_1, P_2, P_3 et P_4.

b. Soit l'événement A : "L'index pointe sur un secteur portant un numéro impair"

Montrer que la probabilité de l'événement A est $\frac{2}{5}$.

2° Soit n un entier naturel non nul.

Un autre joueur lance la roulette n fois de suite et d'une manière indépendante.

Soit q_n la probabilité de l'événement : "L'index pointe au moins une fois sur un secteur portant un numéro pair"

a. Calculer q_n en fonction de n.

b. Déterminer le plus petit entier naturel n vérifiant l'inégalité $q_n \geq 0{,}99$.

<u>PROBLEME 1</u> : (7 points)

Dans un plan orienté ($\mathcal{P}$), on considère le triangle direct ABC, isocèle et rectangle en A tel que AB = 3cm.

On désigne par : ($\mathcal{D}$) la droite passant par B et perpendiculaire à (BC),

r_A la rotation de centre A, d'angle $\frac{\pi}{2}$,

r_B la rotation de centre B, d'angle $-\frac{\pi}{2}$,

h l'homothétie de centre B, de rapport $\frac{1}{2}$,

$s_{(\mathcal{D})}$ la symétrie orthogonale d'axe ($\mathcal{D}$),

$s_{(AB)}$ la symétrie orthogonale d'axe (AB).

<u>Partie A :</u>

1° Construire le triangle ABC et tracer la droite ($\mathcal{D}$).

2° Déterminer et construire le barycentre G des points A, B et C affectés des coefficients respectifs – 1 ; 1 et 1.

3° a. Discuter suivant les valeurs du paramètre réel k l'existence et la nature de l'ensemble ($\mathcal{E}_k$) des points M du plan ($\mathcal{P}$) tels que $-MA^2 + MB^2 + MC^2 = 18 - k^2$.

b. Construire l'ensemble ($\mathcal{E}_3$).

Partie B :

Soit $f = r_A \circ r_B$.

1° a. Donner la nature de la transformation f. Justifier la réponse.

b. Déterminer l'image du point B par f. Caractériser f.

2° On pose $\mathcal{S} = f \circ \mathcal{S}_{(\mathcal{D})}$. En décomposant f en produit de deux symétrie orthogonales, montrer que $\mathcal{S}$ est une symétrie orthogonale dont-on déterminera l'axe.

3° Soit $T = h \circ \mathcal{S}_{(AB)}$.

a. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de T.

b. Placer le point E image de C par la transformation T.

Partie C :

La plan ($\mathcal{P}$) est rapporté au repère orthonormé direct $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

1° Donner les affixes des points A, B, C et G.

2° a. Déterminer l'expression complexe de chacune des transformations r_A, r_B, f et $\mathcal{S}_{(AB)}$.

b. En déduire l'expression complexe de la transformation $g = f \circ \mathcal{S}_{(AB)}$.

c. Donner la nature et les éléments caractéristiques de g.

PROBLEME 2 : **(9 points)**

Soit f la fonction définie sur $]-\infty ;1[$ par : $\begin{cases} f(x) = (x-1)^2 e^x - 1 & si\ x \in]-\infty ;0] \\ f(x) = \dfrac{1}{2} ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) & si\ x \in]0;1[\end{cases}$.

On désigne par ($\mathcal{C}$) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2cm.

Partie A :

1° Montrer que la fonction f est continue en $x_0 = 0$.

2° a. Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = 0$.

b. Donner une interprétation géométrique.

3° a. Déterminer la fonction dérivée de f sur chacun des intervalles $]-\infty ;0[$ et $]0;1[$.

b. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $]-\infty ;1[$.

4° Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $]-\infty ;-1]$.

Vérifier que : $\alpha \in]-2,7\ ;\ -2,4[$.

5° Tracer la courbe ($\mathcal{C}$), préciser la tangente ou les demi-tangentes à l'origine du repère.

Partie B :

Pour une valeur fixe de x sur l'intervalle $\left]0; \dfrac{1}{2}\right]$, on considère la suite $\left(I_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$I_0(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1-t^2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2} dt$, on pose $g(x) = \dfrac{1}{2} ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

1° Montrer que $I_0(x) = g(x)$.

2° a. Montrer que pour tout $t \in \left[0; \dfrac{1}{2}\right]$, on a : $0 \le \dfrac{1}{1-t^2} \le \dfrac{4}{3}$.

b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \le I_n(x) \le \dfrac{4x^{2n+1}}{3(2n+1)}$

c. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n(x)$.

3° a. Exprimer $I_0(x) - I_1(x)$ en fonction de x.

b. Généraliser le résultat précédent pour tout entier naturel n ; c'est-à-dire exprimer en fonction de x et n, l'expression $I_n(x) - I_{n+1}(x)$.

c. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(x) = P_n(x) + I_{n+1}(x)$ où P_n est une fonction polynôme à déterminer.

4° Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $S_n = \dfrac{1}{1\text{x}2^1} + \dfrac{1}{3\text{x}2^3} + \dfrac{1}{5\text{x}2^5} + \ldots + \dfrac{1}{(2n+1)\text{x}2^{2n+1}}$.

A l'aide des résultats des questions précédentes, montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\dfrac{ln3}{2}$.