Séquence 1 : Étude de quelques fonctions

1. Fonctions affines par intervalle

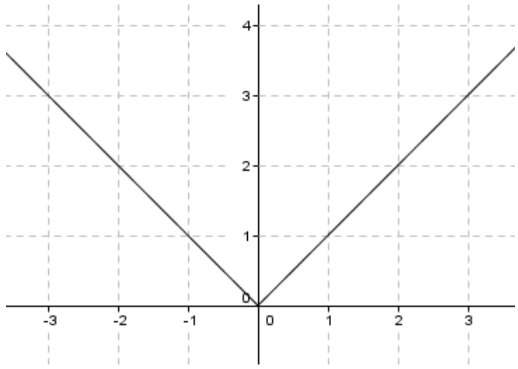
Une fonction est dite **affine par intervalle** si son ensemble de définition est partagé en intervalles sur chacun desquels son expression est une application affine.

Exemple :

f(x) = |x|. On écrit f sans le symbole de la valeur absolue :

$$f(x)=\begin{cases}-x, & \text{si } x<0\\ x, & \text{si } x\geq 0\end{cases}$$

La représentation graphique de cette fonction est donc la réunion de ces deux demi-droites.

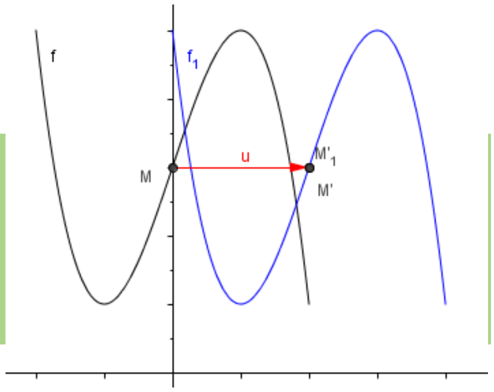


2. Représentations graphiques et transformations

2.1 Les fonctions x → f(x-a)

La courbe représentative de cette fonction est l'image de de la courbe représentative de f par la translation de vecteur :

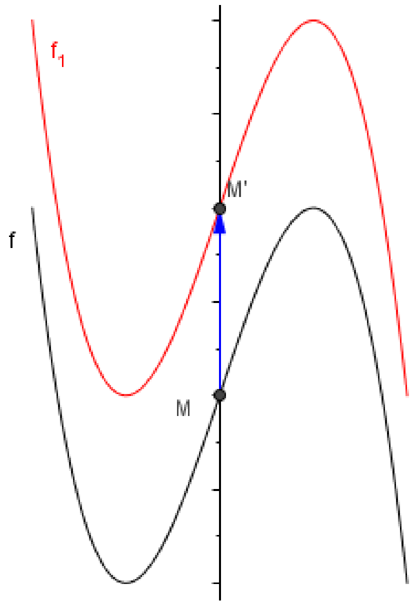
$$\vec{u}=a\,\vec{i}$$



2.2 Les fonctions x → f(x) + b

La courbe représentative de cette fonction est l'image de de la courbe représentative de f par la translation de vecteur :

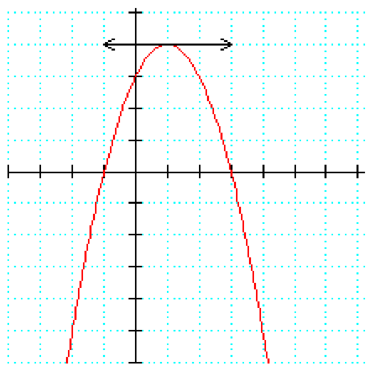
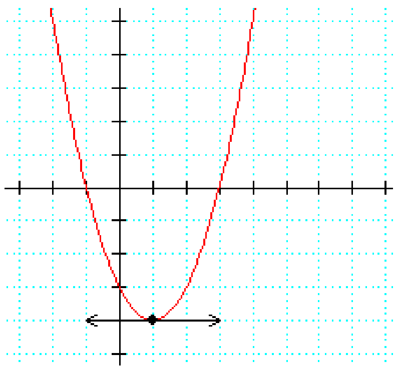
$$\vec{u}=b\,\vec{j}$$



3. Fonctions polynômes

3.1 Fonctions trinômes

f est de la forme : $f(x)=ax^2+bx+c,\ a\neq 0$.

<table>
<tr><td></td><td>a < 0</td><td>a > 0</td></tr>
<tr><td>Domaine</td><td colspan="2">$D_f=]-\infty;+\infty[$</td></tr>
<tr><td>Limites</td><td>$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$</td><td>$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$</td></tr>
<tr><td>Dérivée</td><td colspan="2">$f'(x)=2ax+b.\ f'(x)=0$ si $x=-\dfrac{b}{2a}$</td></tr>
<tr><td>Signe de la dérivée</td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$-\dfrac{b}{2a}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>f'(x)</td><td colspan="2">+</td><td>-</td></tr></table></td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$-\dfrac{b}{2a}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>f'(x)</td><td colspan="2">-</td><td>+</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Tableau de variation</td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$-\dfrac{b}{2a}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>f'(x)</td><td colspan="2">+</td><td>-</td></tr><tr><td>f</td><td>$-\infty$ ↗</td><td></td><td>↘ $-\infty$</td></tr></table></td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$-\dfrac{b}{2a}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>f'(x)</td><td colspan="2">-</td><td>+</td></tr><tr><td>f</td><td>$+\infty$ ↘</td><td></td><td>↗ $+\infty$</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Courbes</td><td></td><td></td></tr>
</table>

3.2 Branches paraboliques

La courbe de f présente une **branche parabolique** suivant l'**axe des ordonnées** si :

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty$$

C'est le cas des fonctions trinômes et des fonctions polynômes en général.

La courbe de f présente une **branche parabolique** suivant l'**axe des ordonnées** si :

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0$$

C'est le cas de $f(x)=\sqrt{x}$.

3.3 Exemple de fonction polynôme de degré 3

Soit f la fonction définie par $f(x)=x^3-3x+1$.

Soit (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Déterminer l'ensemble de définition de f.

b) Calculer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.

2) a) Déterminer la fonction dérivée f' de f et étudier son signe.

b) Dresser le tableau de variations de f.

3) a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) en $x_0 = 0$.

b) Construire (T) et (C) dans le même repère.

Solution :

1) a) Ensemble de définition

f est une fonction polynôme donc $D_f=]-\infty;+\infty[$.

b) Limites

En prenant les limites des termes du plus haut degré, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

2) a) Dérivée et signe

$f(x)=x^3-3x+1,\ f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$. f'(x) = 0 si x = - 1 ou x = 1

On a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	0	+	

b) Tableau de variations

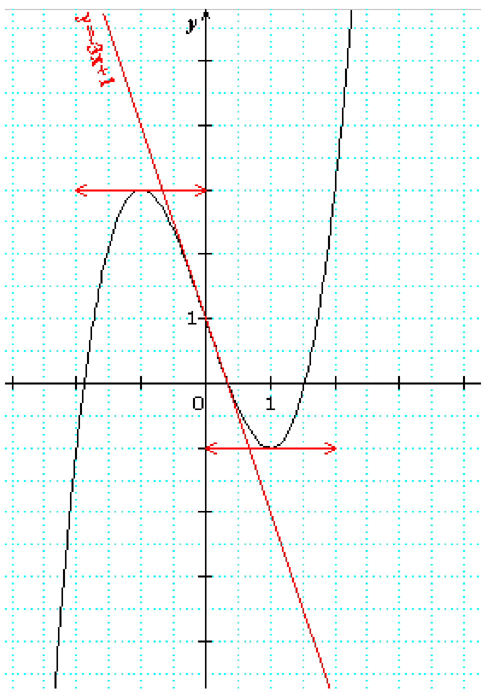
f(-1) = 3 et f(1) = -1

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	0	+	
f	- ∞	↗	3	↘	-1	↗	+ ∞

3) a) Équation de la tangente

$(T):\ y=f'(0)(x-0)+f(0).\ f'(0)=-3$ et $f(0)=1$

Finalement : $(T):\ y=-3x+1$.



Courbe représentative de f

4. Fonctions homographiques

4.1 Définition

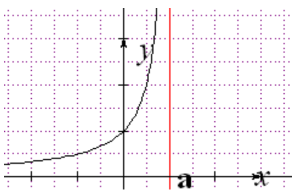
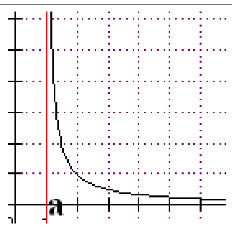
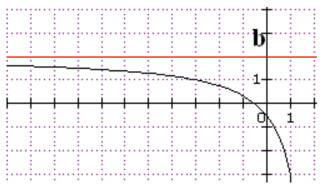
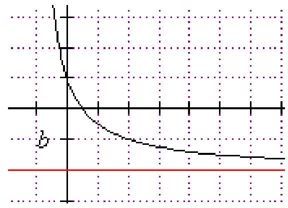
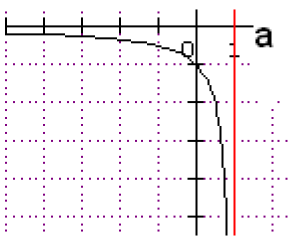
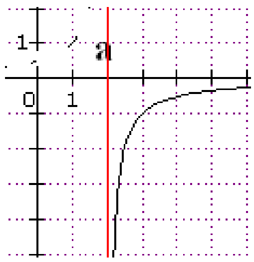
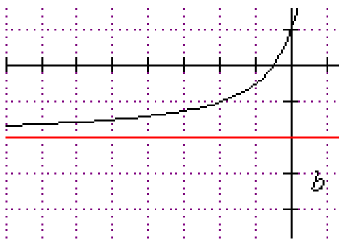
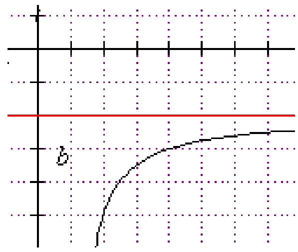
Les **fonctions homographiques** sont les fonctions de la forme $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, $c\neq 0$

On a déjà vu en classe de seconde la fonction inverse, qui est un cas particulier de fonction homographique.

4.2 Asymptote verticale, Asymptote horizontale

Asymptote verticale	Asymptote horizontale
Lorsque f a une limite infinie à droite ou à gauche de a, on dit que la droite d'équation x=a est une **asymptote verticale** à la courbe de f.	Lorsque f a une limite finie b en $-\infty$ ou en $+\infty$, on dit que la droite d'équation y = b est **asymptote horizontale** à la courbe de f.

Différents types de graphique

 $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$	 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$	 $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=b$ et f décroissante	 $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=b$ et f décroissante
 $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$	 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$	 $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=b$ et f croissante	 $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=b$ et f croissante

4.3 Étude d'exemple

Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$.

Soit (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Déterminer l'ensemble de définition de f.

b) Calculer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.

2) a) Déterminer la fonction dérivée f' de f et étudier son signe.

b) Dresser le tableau de variations de f.

3) a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) en $x_0 = 0$.

b) Construire (T) et (C) dans le même repère.

Solution :

1) a) Ensemble de définition

[$D_f =]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$

b) Limites

En prenant le rapport des termes du plus haut degré, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$ et $\lim_{x\to 2} f(x)=\frac{3}{0}$.

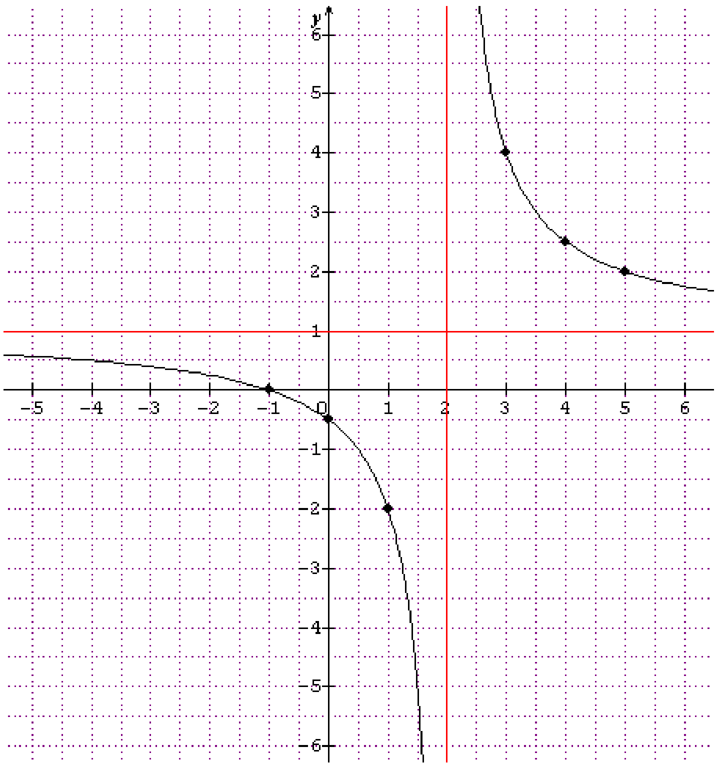
En étudiant le signe de $\frac{3}{x-2}$, on obtient $\lim_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$.

2) a) Dérivée et signe

$$f(x)=\frac{u(x)}{v(x)},\quad f'(x)=\frac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{v(x)^2}=\frac{-3}{(x-2)^2}$$ donc f'(x) < 0.

b) Tableau de variations

x	- ∞	2	+ ∞
f'(x)	–	‖	–
f	2 ↘ - ∞	‖	+∞ ↘ 2



3) a) Tableau des valeurs

x	-1	0	1	3	4	5
f(x)	0	0,5	-2	4	2,5	2

b) Courbe représentative ci-contre