Séquence Logique

1. Rappels

1.1 Proposition

1.1.1 Rappel de définition

Une proposition est une phrase qui n'a qu'une seule valeur : vraie ou bien fausse

Exemples :

- Dans l'ensemble IR,1+1 =2 est une proposition vraie.
- Les hommes peuvent être enceintes est une proposition fausse

1.1.2 Négation d'une proposition

La négation d'une proposition p notée ¬p ou $\bar{p}$ est la nouvelle proposition qui est fausse si p est vraie et vraie si p est fausse.

Exemples :

- La négation de p ,« 3 > 4 » est ¬p « 3 ≤ 4 »
- La négation de q ,« le soleil se couche à l'ouest » est ¬q « le soleil ne se couche pas à l'ouest »

1.2 Les connecteurs logiques

1.2.1 Le connecteur « et »

Pour deux propositions p et q, la proposition p et q noté p ∧ q est la proposition qui est vraie si p et q le sont et fausse dans les autres cas. Rappelons sa table de vérité :

Exemples

15 est un multiple de 3 et 5 est une proposition vraie

7 est impair et divisible par 2 est une proposition fausse

1.2.2 Le connecteur « ou »

Pour deux propositions p et q, la proposition p ou q noté p v q est la proposition qui est fausse si p et q le sont et vraie dans les autres cas. Rappelons sa table de vérité :

1.2.3 Le connecteur « implique »

Pour deux propositions p et q, la proposition si p alors q (p implique q) noté p => q est la proposition qui est fausse si p est vraie et q fausse , et vraie dans les autres cas. Rappelons sa table de vérité :

1.3 Les quantificateurs

Une proposition peut dépendre d'un paramètre x, par exemple « x est positif ». Cette proposition peut être vraie ou fausse selon la valeur de x.

1.3.1 Quantificateurs universels

Le quantificateur pour tout ou quel que soit est noté ∀x. La proposition ∀x∈ E, P(x) est vraie lorsque, pour tout x∈ E, la proposition P(x) est vraie.

Exemples :

- La proposition ∀x∈ IN, n≥ 0 est vraie.
- La proposition ∀x ≥ 2, $\sqrt{x}$ < x est fausse .

1.3.2 Quantificateurs existentiels

Le quantificateur il existe (au moins un) est noté ∃. La proposition $\exists x \in E$, P(x) est vraie lorsqu'il existe au moins un $x \in E$ telle que la proposition P(x) soit vraie.

Exemples :

- la proposition $\exists x \in IR$, $|x+3| = 0$ est vraie ;
- La proposition $\exists x \in IR$, $x^2+1 = 0$ est fausse

1.3.3 Négation des quantificateurs

La négation de $\forall x \in E$, P(x) est $\exists x \in E$, non P(x).

La négation de $\exists x \in E$, P(x) est $\forall x \in E$, non P(x).

Exemples :

- La négation de $\exists x \in IR$, $x + 4 = 0$ est $\forall x \in IR$ $x + 4 \neq 0$.
- La négation de $\forall x \in IR$, $x^3 \leq 0$ est $\exists x \in IR$, $x^3 > 0$

2. Compléments

2.1 Propositions équivalentes

La proposition p <=> q est la proposition (p => q) ∧ (q => p). On lit p est équivalent à q ou bien p équivaut à q ou bien p si et seulement si q.

2.2 Tautologie

En logique mathématiques, le mot « tautologie »désigne une proposition qui est toujours vraies

Exemples :

Pour une proposition p, la proposition p v ¬p est une tautologie

je l'ai vu de mes propres yeux est une tautologie

je vais monter en haut

3. Table de vérité

3.1 Table de vérité de p ∧ q

p	q	p ∧ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

3.2 Table de vérité de p v q

p	q	p v q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

3.3 Table de vérité de p => q

p	q	p => q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

3.4 Table de vérité de <=>q

p	q	p < => q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

4. Méthodes de raisonnements

4.1 Conditions nécessaires , conditions suffisantes

Lorsque p =>q, on dit que p est une condition suffisante à q, et que q est une condition nécessaire à p.

Pour démontrer que p => q est vraie , on suppose que p est vraie et on utilise différentes propriétés déjà connues pour établir que q est vraie.

Exemple : Soit f la fonction définie par : f(x) = 2x+3 . Montrer que est injective.

f est injective si elle vérifie la propriété $\forall x \in$ IR, $\forall x' \in$ IR f(x) = f(x') => x = x'.

Si f(x) = f(x'), alors 2x +3 = 2x' +3 , alors 2x = 2x' d'où x = x' . Ainsi f est injective

4.2 Conditions nécessaires et conditions suffisantes

Pour démontrer que p <=> q, on raisonne par double implication : on suppose d'abord que p est vraie, et on démontre que q est vraie. Ensuite, on suppose que q est vraie, et on démontre que q est vraie.

4.3 Raisonnement par contraposée

Pour démontrer que p => q est vraie , on utilise la contraposée , c'est-à-dire, démontrer que ¬ q => ¬ p est vraie,

Si on reprend l'exemple dans 2.1 supposons que x ≠ x', alors 2x ≠ 2x', ou encore, 2x + 3 ≠ 2x' + 3, c'est-à-dire, f(x) ≠ f(x'). f est injective

4.4 Raisonnement par l'absurde

Pour démontrer que p => q est vraie , on peut supposer que p et ¬ q sont toutes les deux vraies, et obtenir une contradiction. pour démontrer que p est vraie, on peut supposer que ¬ p est vraie et obtenir une contradiction.

Exemple : démontrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
Supposons que $\sqrt{2}$ est rationnel , alors $\sqrt{2}$ s'écrit sous la forme de quotient de deux entiers relatifs premiers entre eux, donc

$\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ avec p g c d (a ; b) = 1, alors $a^2 = 2b^2$. Ce qui signifie que a est pair , alors a est pair a = 2k.
Mais, $2b^2 = a^2 = 4k^2$; $b^2 = 2k^2$ donc b est pair ainsi a et b sont tous les deux multiples de 2 qui est contradictoire à p g c d (a ; b) = 1. L'hypothèse $\sqrt{2}$ est rationnel est fausse , donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$