MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

SECRÉTARIAT GÉNÉRAL

DIRECTION GÉNÉRALE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR

DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR

Service du Baccalauréat

BACCALAURÉAT DE L'ENSEIGNEMENTGÉNÉRAL

SESSION 2023

S

Série	: Scientifique	Épreuve de	: MATHÉMATIQUES
Option	: S	Durée	: 04 heures
Code matière	: 009	Coefficient	: 6

N.B : - Les deux exercices et les deux problèmes sont obligatoires
- Machine à calculer scientifique non programmable autorisée

EXERCICE 1 (03 points)

A. On considère le système $(S) : \begin{cases} 3y + 2z = 7 \\ x + y - z = 2 \\ 2x + y - 3z = 1 \end{cases}$

1. Ecrire (S) sous la forme matricielle : $AX = B$ où A est une matrice carrée d'ordre 3 et X et B deux matrices colonnes d'ordre 3. (0.25pt)

2. Soit $P = \begin{pmatrix} -2 & 11 & -5 \\ 1 & -4 & 2 \\ -1 & 6 & -3 \end{pmatrix}$

   Calculer $A \times P$ et $P \times A$. Conclure. (0.75pt)

3. En déduire la matrice X. (0.25pt)

B. On dispose deux urnes U_1 et U_2. L'Urne U_1 contient trois boules blanches et une boule noire. L'urne U_2 contient une boule blanche et une boule noire. Toutes les boules sont indiscernables au toucher. On appelle E l'épreuve suivante : On tire une boule de U_1 et on la met dans U_2 puis on tire au hasard et simultanément deux boules de U_2.
Soit A l'événement : « obtenir deux boules blanches au deuxième tirage. »

1. Montrer que la probabilité de l'événement A est égale à $\frac{1}{4}$. (0.75pt)
2. On répète trois fois de suite et d'une manière indépendante l'épreuve E.
   Soit X la variable aléatoire égale au nombre de réalisations de l'événement A.

   a- Donner la loi de X. (0.75pt)
   b- Calculer l'écart-type de X. (0.25pt)

EXERCICE 2 (02 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

On donne un point $A(2; 2; 1)$ et un plan $(\mathscr{P})$ d'équation : $3x + 2y + 6z + 33 = 0$

1. Vérifier que $(\mathscr{P})$ est strictement parallèle à un plan $(\mathscr{Q})$ contenant A et de vecteur normal $\vec{n}(-3; -2; -6)$ (0.25pt)
2. Déterminer la distance qui sépare ces deux plans. (0.75pt)
3. Soit $H(-1; 0; -5)$.
   Justifier que $H \in (\mathscr{P})$ et que (AH) et $(\mathscr{P})$ sont orthogonaux. (0.75pt)

4. Calculer $\|\overrightarrow{AH}\|$. (0.25pt)

PROBLEME 1 (07 points)

Dans le plan orienté $(\mathscr{P})$, on considère un triangle ABC, rectangle et isocèle en A tel que $AB = 4cm$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$. On désigne par O le milieu de $[BC]$ et E celui de $[AC]$.

Soient : r_1: la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

r_2: la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$

On pose $f = r_1 o r_2$

Partie I :

1. a) Justifier que f est une symétrie centrale. (0.5pt)

   b) En décomposant r_1 et r_2 en deux symétries orthogonales d'axes convenablement choisis, déterminer le centre de f. (0.75pt)

2. Soient $D = bary\{(A, 1), (B; -1), (C; -1)\}$ et $G = bary\{(B; 1 - \sqrt{2}), (A; \sqrt{2})\}$.

   a) Déterminer les points D et G. (0.25pt x 2)

   b) Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M du plan $(\mathscr{P})$ vérifiant $MA^2 - MB^2 - MC^2 = -12$. (0.25pt x 2)

3. Soit $\bar{S}$ la similitude plane indirecte qui laisse invariant le point B et transforme A en C. Notons par F le centre de $[CG]$.

   a) Vérifier qu'il existe une homothétie h de centre B et transforme A en G dont on précisera le rapport. (0.75pt)

   b) En déduire les éléments caractéristiques de $\bar{S}$. (0.75pt)

4. On note par :

   - $(\mathscr{C})$ le cercle de centre C et de rayon 2
   - I le point d'intersection de $(\mathscr{C})$ et (Γ) dont I se trouve à l'extérieur du carré $ABDC$.

   Montrer que I est le centre de la similitude plane directe S, de rapport $\sqrt{3}$, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et qui transforme C en D. (0.75pt)

Partie II :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. On donne $D(1 + i)$

1. a) Ecrire l'expression complexe de r_1 et r_2 (0.5pt)

   b) En déduire l'expression complexe, la nature et l'élément caractéristique de f. (0.75pt)

2. Déterminer l'expression complexe et les éléments caractéristiques de $\bar{S}$. (0.75pt)

3. Déterminer l'expression complexe de S et préciser l'affixe de son centre. (0.5pt)

PROBLEME 2 **(08 points)**

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, On note par f_n la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = e^{nx} \ln(1 + e^{-nx})$$

On désigne par $(\mathscr{C}_n)$ la courbe représentative de f_n dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2 cm.

Partie A :

1. Calculer les limites de f_n aux bornes de son ensemble de définition (Poser $X = e^{-nx}$) (0.25pt x 2)
2. On considère la fonction numérique g_n ; $n \in \mathbb{N}^*$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g_n(x) = ln\,(1 + e^{-nx}) - \frac{1}{1+e^{nx}}$$

   a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, g_n est strictement décroissante (0.75pt)

   b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g_n(x) > 0$ (0.75pt)

3. a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f'_n(x) = ne^{nx} . g_n(x)$$ (0.75pt)

   b) Dresser le tableau de variation de f_n (0.75pt)

4. Construire la courbe $(\mathscr{C}_2)$ (0.75pt)
5. En utilisant une intégration par parties, calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe $(\mathscr{C}_2)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. (0.75pt)

Partie B :

On considère l'équation différentielle $(E): y' - 2y = \frac{-2}{1+e^{-2x}}$

1. Vérifier que l'équation $f_2(x) = e^{2x}\, ln\,(1 + e^{-2x})$ est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. (0.75pt)
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $(E'): y' - 2y = 0$ (0.75pt)
3. Montrer qu'une fonction φ est solution de (E) si et seulement si $(\varphi - f_2)$ est solution de (E') (1pt)
4. En déduire la solution générale de (E). (0.5pt)